

## 6 Křivkové a plošné integrály

V této kapitole zavedeme integrály skalárních a vektorových funkcí přes křivky a plochy, které nachází mnoho aplikací zejména ve fyzice. Matematicky půjde o velmi lehký úvod do tzv. analýzy na varietách, ačkoliv se zde neobjeví ani základní koncepty této teorie jako je diferencovatelná varieta, diferenciální formy na varietách, integrální počet diferenciálních forem, atd. Integrální věty jako věta Greenova, Gaussova a Stokesova představují speciální případ hlubokého výsledku analýzy na varietách známého jako *Obecná Stokesova věta* nebo *Divergenční věta*. Seriozní kurz analýzy na varietách tato kapitola nemůže nahradit. V době psaní tohoto textu existuje na FJFI samostatný předmět věnovaný analýze na varietách, kde se student se zájmem o hlubší studium může dozvědět více.

Také styl výkladu poslední kapitoly bude trochu odlišný. Zatímco záměr předchozích kapitol bylo podat zcela rigorózní výklad obecné teorie, zde je naší prioritou dobrat se co nejrychleji a relativně přímočaře k výsledkům podstatným pro aplikace, a to i za cenu menší obecnosti či zjednodušení.

### 6.1 Křivka a její délka

Připomeňme, že *křivkou* v  $\mathbb{R}^n$  rozumíme jakékoliv spojitě zobrazení  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Často se ale také křivkou rozumí obor hodnot zobrazení  $\phi$ , tedy *stopa křivky*  $[\phi] := \phi([a, b])$  a zobrazení  $\phi$  se nazývá parametrizací křivky. My se budeme držet zde zavedených definic. Samozřejmě existuje více různých křivek se stejnou stopou (více parametrizací jedné křivky). Z hlediska studia geometrických vlastností by se mohlo zdát přirozené nazývat křivkou množinu  $[\phi]$ , avšak vlastnosti, které budeme studovat, budou skutečně záviset na zobrazení  $\phi$  a nikoliv jen na jeho oboru hodnot.

Uvažme např. křivky

a)  $\phi_1(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), \quad t \in [0, 1],$

b)  $\phi_2(t) = (\cos(2\pi t), -\sin(2\pi t)), \quad t \in [0, 1],$

c)  $\phi_3(t) = (\cos(2\pi t^5), \sin(2\pi t^5)), \quad t \in [0, 1],$

d)  $\phi_4(t) = (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t)), \quad t \in [0, 1].$

Stopa všech křivek  $\phi_i$  je kružnice  $[\phi_i] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \forall i \in \hat{4}$ . V případě  $\phi_1$ , pokud parametr  $t$  prochází interval  $[0, 2\pi]$  rovnoměrně od 0 do  $2\pi$ , projde bod  $\phi_1(t)$  rovnoměrně celou kružnicí od bodu  $(1, 0)$  do téhož bodu jednou proti směru hodinových ručiček (v tzv. *kladném směru*). V případě  $\phi_2$  se děje totéž jen v opačném (tzv. *záporném*) směru. V případě  $\phi_3$  projde bod  $\phi_3(t)$  jednou kružnicí „zrychleně“ a v případě  $\phi_4$  ji projde dvakrát dokola. Ačkoliv je obvod kružnice vždy  $2\pi$ , budou délky uvedených křivek  $\ell(\phi_1) = \ell(\phi_2) = \ell(\phi_3) = 2\pi$  a  $\ell(\phi_4) = 4\pi$  podle definice, kterou si vzápětí uvedeme. Tomu lze intuitivně dobře rozumět, pokud  $\phi(t)$  chápeme jako částici pohybující se v  $\mathbb{R}^2$  v čase  $t \in [0, 1]$  a délku křivky jako délku trajektorie, kterou částice projde.

Je zřejmé, jak definovat délku po částech lineární křivky, tj. křivky, jejíž stopa je konečné sjednocení úseček (stručněji lomená čára). Délka obecné křivky se poté zavede jako vhodná „limita“ délek lomených čar, kterými proložíme stopu dané křivky.

**Definice 6.1** (Rektifikovatelná křivka, délka křivky): Buď  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  křivka a  $\sigma : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  dělení intervalu  $[a, b]$ . Součet délek úseček spojujících body  $\phi(t_i)$  označíme

$$\ell_\sigma(\phi) := \sum_{i=1}^m \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\|.$$

Potom je-li množina

$$\{\ell_\sigma(\phi) \mid \sigma \text{ dělení } [a, b]\}$$

omezená, nazýváme  $\phi$  *rektifikovatelná křivka* a *délku*  $\ell(\phi)$  křivky  $\phi$  definujeme vztahem

$$\ell(\phi) := \sup\{\ell_\sigma(\phi) \mid \sigma \text{ dělení } [a, b]\}. \quad (74)$$

**Poznámka:** Aplikací trojúhelníkové nerovnosti dostaneme, že  $\ell_\sigma(\phi) \leq \ell_{\sigma'}(\phi)$  pro libovolné  $\sigma'$  zjemnění dělení  $\sigma$ , a tudíž supremum v definici (74) je tou „správnou limitou“ pro definici délky křivky.

Rovnosti délek křivek  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  a  $\phi_3$  z úvodu vyjadřují přirozenou vlastnost, totiž že délka křivky nezávisí na tzv. *reparametrizaci* křivky dané spojitou bijekcí (homeomorfismem) mezi uzavřenými intervaly, jak ukazuje první tvrzení následující věty.

**Věta 6.2:** Nechť  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  je rektifikovatelná křivka.

1. Je-li  $\xi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  spojitá bijekce, pak  $\psi := \phi \circ \xi$  je rektifikovatelná křivka a platí:

$$\ell(\psi) = \ell(\phi).$$

2. Délka křivky  $\phi$  je aditivní v následujícím smyslu: Je-li  $c \in (a, b)$ , potom jsou zúžení  $\phi_{[a,c]} := \phi \upharpoonright [a, c]$  a  $\phi_{[c,b]} := \phi \upharpoonright [c, b]$  rektifikovatelné křivky a platí:

$$\ell(\phi) = \ell(\phi_{[a,c]}) + \ell(\phi_{[c,b]}).$$

*Důkaz.* 1. Nechť  $\xi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  je spojitá bijekce. Potom je  $\xi$  buď rostoucí, nebo klesající funkce. Je-li  $\tau : c = s_0 < s_1 < \dots < s_m = d$  dělení  $[c, d]$ , potom

$$\xi \circ \tau : \begin{cases} a = \xi(s_0) < \xi(s_1) < \dots < \xi(s_m) = b, & \text{je-li } \xi \text{ rostoucí,} \\ a = \xi(s_m) < \xi(s_{m-1}) < \dots < \xi(s_0) = b, & \text{je-li } \xi \text{ klesající,} \end{cases}$$

je dělení  $[a, b]$  a platí  $\ell_\tau(\phi \circ \xi) = \ell_{\xi \circ \tau}(\phi)$ . Jelikož je  $\phi$  rektifikovatelná, je

$$\ell_\tau(\psi) = \ell_{\xi \circ \tau}(\phi) \leq \ell(\phi),$$

a tudíž  $\psi$  je také rektifikovatelná, neboť  $\tau$  bylo libovolné dělení  $[c, d]$ . Navíc vezmeme-li supremum přes  $\tau$ , dostaneme nerovnost  $\ell(\psi) \leq \ell(\phi)$ . Podobně z rovnosti  $\ell_\sigma(\phi) = \ell_{\xi^{-1} \circ \sigma}(\psi)$ , která platí pro každé  $\sigma$  dělení  $[a, b]$ , odvodíme opačnou nerovnost  $\ell(\phi) \leq \ell(\psi)$ .

2. Tvrzení o rektifikovatelnosti křivek  $\phi_{[a,c]}$  a  $\phi_{[c,b]}$  vyplývá z toho, že každé dělení intervalů  $[a, c]$  resp.  $[c, b]$  lze zjemnit na dělení intervalu  $[a, b]$  přidáním bodu  $b$  resp.  $a$ , a proto  $\ell(\phi_{[a,c]}) \leq \ell(\phi)$  a  $\ell(\phi_{[c,b]}) \leq \ell(\phi)$ .

Z rovnosti

$$\ell_{\sigma \cap [a,c]}(\phi_{[a,c]}) + \ell_{\sigma \cap [c,b]}(\phi_{[c,b]}) = \ell_{\sigma}(\phi),$$

která platí pro každé  $\sigma$  dělení  $[a, b]$  obsahující  $c$ , dostaneme nerovnost

$$\ell(\phi_{[a,c]}) + \ell(\phi_{[c,b]}) \geq \sup\{\ell_{\sigma}(\phi) \mid \sigma \text{ dělení } [a, b] \text{ obsahující } c\} = \ell(\phi).$$

Poslední rovnost platí, neboť  $\ell_{\sigma}(\phi) \leq \ell_{\sigma \cup \{c\}}(\phi)$  pro každé dělení  $\sigma$  intervalu  $[a, b]$ . Naopak zvolíme-li  $\epsilon > 0$ , potom

$$(\exists \sigma_1 \text{ dělení } [a, c]) \left( \ell(\phi_{[a,c]}) \leq \ell_{\sigma_1}(\phi_{[a,c]}) + \frac{\epsilon}{2} \right)$$

a podobně

$$(\exists \sigma_2 \text{ dělení } [c, b]) \left( \ell(\phi_{[c,b]}) \leq \ell_{\sigma_2}(\phi_{[c,b]}) + \frac{\epsilon}{2} \right).$$

Odtud

$$\ell(\phi_{[a,c]}) + \ell(\phi_{[c,b]}) \leq \ell_{\sigma_1}(\phi_{[a,c]}) + \ell_{\sigma_2}(\phi_{[c,b]}) + \epsilon = \ell_{\sigma_1 \cup \sigma_2}(\phi) + \epsilon \leq \ell(\phi) + \epsilon.$$

Jelikož bylo  $\epsilon > 0$  voleno libovolně, dostáváme i opačnou nerovnost

$$\ell(\phi_{[a,c]}) + \ell(\phi_{[c,b]}) \leq \ell(\phi).$$

□

Definice délky křivky (74) pomocí suprema přes dělení není vhodná pro praktické výpočty. Je-li daná křivka navíc třídy  $C^1$  alespoň po částech, máme užitečný integrální vzorec pro délku křivky. Připomeňme, že  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  je po částech  $C^1$  na  $(a, b)$ , právě když existuje dělení  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$  tak, že  $f \in C^1((t_{i-1}, t_i))$  pro každé  $i \in \hat{m}$  a existují jednostranné limity  $\phi'(t_i \pm)$  pro  $i \in \{1, \dots, m-1\}$ ,  $\phi'(a+)$  a  $\phi'(b-)$  v  $\mathbb{R}^n$ . Zde i dále používáme běžné značení  $\phi'(t) := D\phi(t) = (\phi'_1(t), \dots, \phi'_n(t))$ .

**Věta 6.3:** Nechť křivka  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  je po částech  $C^1$  na  $(a, b)$ . Potom je  $\phi$  rektifikovatelná a platí:

$$\ell(\phi) = \int_a^b \|\phi'(t)\| dt.$$

*Důkaz.* Díky aditivitě integrálu i délky křivky ve smyslu 2. tvrzení Věty 6.2 stačí tvrzení dokázat pro křivku  $\phi \in C^1((a, b))$  s jednostrannými limity  $\phi'(a+), \phi'(b-) \in \mathbb{R}^n$

Uvažujme libovolné dělení  $\sigma : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ . Potom s využitím nerovnosti z Lemma 3.27 dostaneme

$$\ell_{\sigma}(\phi) = \sum_{i=1}^m \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^m \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi'(t) dt \right\| \leq \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\phi'(t)\| dt = \int_a^b \|\phi'(t)\| dt.$$

Poslední integrál je konečný, neboť integrand je spojitá funkce na  $[a, b]$ , a tudíž je  $\phi$  rektifikovatelná a platí nerovnost

$$\ell(\phi) \leq \int_a^b \|\phi'(t)\| dt.$$

Dále budeme používat značení  $\phi_{[c,d]}$  pro zúžení křivky  $\phi$  na interval  $[c, d] \subset [a, b]$  (stejně jako ve Větě 6.2). Definujme funkci  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vztahem

$$g(t) := \begin{cases} \ell(\phi_{[a,t]}), & \text{pro } t \in (a, b], \\ 0, & \text{pro } t = a. \end{cases}$$

Nechť  $t \in (a, b)$  a  $h > 0$  tak, že  $t + h \in (a, b)$ . Z aditivity délky křivky, viz Věta 6.2, a z analogického odhadu, jaký jsme provedli výše, dostaneme

$$g(t+h) - g(t) = \ell(\phi_{[t,t+h]}) \leq \int_t^{t+h} \|\phi'(s)\| ds \leq h \max_{s \in [t,t+h]} \|\phi'(s)\|.$$

Uvážíme-li také, že když v definici délky křivky vezmeme dvoubodové dělení  $\{t, t+h\}$  intervalu  $[t, t+h]$ , máme

$$\|\phi(t+h) - \phi(t)\| \leq \ell(\phi_{[t,t+h]}).$$

Spojením obou odhadů získáme nerovnosti

$$\frac{\|\phi(t+h) - \phi(t)\|}{h} \leq \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \leq \max_{s \in [t,t+h]} \|\phi'(s)\|.$$

Ze spojitosti funkce  $t \rightarrow \|\phi'(t)\|$  na  $[a, b]$  plyne, že  $\max_{s \in [t,t+h]} \|\phi'(s)\| \rightarrow \|\phi'(t)\|$ , pokud  $h \rightarrow 0+$ . Také výraz nalevo v poslední nerovnosti konverguje k  $\|\phi'(t)\|$ , pokud  $h \rightarrow 0+$ , jak plyne z diferencovatelnosti  $\phi$  v bodě  $t$ . Odtud vidíme, že

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \|\phi'(t)\|.$$

Analogicky se ukáže, vezmeme-li na začátku  $h < 0$ , že také

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \|\phi'(t)\|.$$

Celkem zjišťujeme, že  $g$  je diferencovatelná funkce v bodě  $t \in (a, b)$  a platí  $g'(t) = \|\phi'(t)\|$ .

Nyní již jednoduše odvodíme dokazovaný vzorec, neboť

$$\ell(\phi) = g(b) = g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t) dt = \int_a^b \|\phi'(t)\| dt.$$

□

**Poznámka:** Speciálně graf funkce  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , která je po částech  $C^1$  na  $[a, b]$ , je stopou křivky  $\phi(t) := (t, f(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , v  $\mathbb{R}^2$  vyhovující předpokladům Věty 6.3, a proto

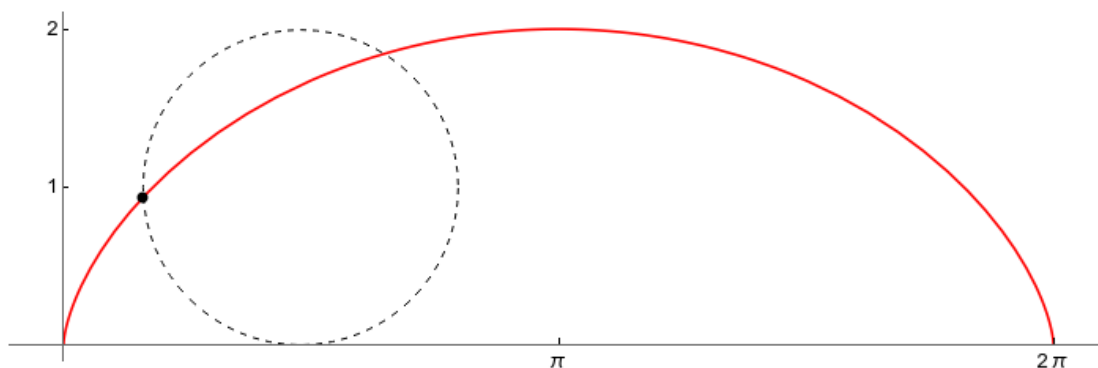
$$\ell(\phi) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

**Příklad 6.4** (Délka cykloidy): Křivka v  $\mathbb{R}^2$  zadaná parametricky rovnicemi

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t), \quad \text{pro } t \in [0, 2\pi],$$

kde  $a > 0$ , je oblouk *cykloidy*, viz Obrázek 16. Tuto křivku opíše bod na hranici kruhu o poloměru  $a$ , který se valí po ose  $x$ . Spočítáme její délku. Na tuto křivku  $\phi(t) := ((x(t), y(t)))$  lze aplikovat Větu 6.3, a proto je

$$\begin{aligned} \ell(\phi) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt \\ &= \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8a. \end{aligned}$$



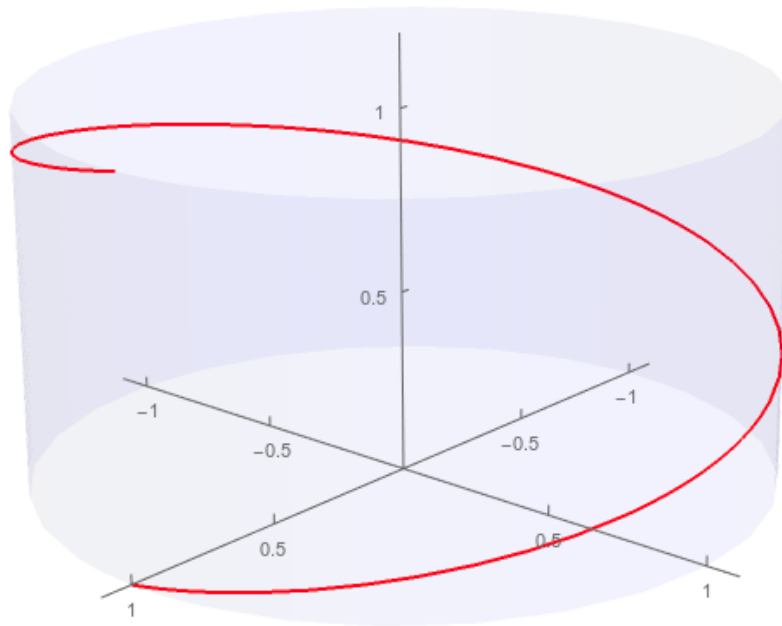
Obrázek 16: Cykloida pro  $a = 1$ .

**Příklad 6.5** (Délka šroubovice): Křivka v  $\mathbb{R}^3$  zadaná parametricky rovnicemi

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = a \sin t, \quad z(t) = bt \quad \text{pro } t \in [0, 2\pi],$$

kde  $a, b > 0$ , je oblouk *šroubovice* (*helix*), viz Obrázek 17. Pro délku této křivky  $\phi(t) := ((x(t), y(t), z(t)))$  dostaneme podle Věty 6.3 vztah

$$\ell(\phi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$



Obrázek 17: Šroubovice pro  $a = 1$  a  $b = 1/6$ .

**Příklad 6.6** (Délka Vivianiho křivky): Vivianiho křivka vznikne průnikem sféry a válce v  $\mathbb{R}^3$  daných rovnicemi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, \quad (x - a)^2 + y^2 = a^2,$$

kde  $a > 0$  je parametr, viz Obrázek 18. Pro nalezení vhodné parametrizace této křivky nejprve zvolíme polární souřadnice v  $x$  a  $y$  se středem v bodě  $(a, 0)$ , která „sedí“ rovnici pro válec, tj.

$$x = a + a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Parametrizaci souřadnice  $z = z(t)$  poté dopočítáme z rovnice pro kouli:

$$z^2 = 4a^2 - x^2 - y^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos t = 4a^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right).$$

Tedy

$$z = \pm 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Znaménko  $+$  resp.  $-$  odpovídá parametrizaci části křivky v polorovině  $z \geq 0$  resp.  $z \leq 0$ . Tyto dvě části jsou symetrické podle roviny  $z = 0$ . Není těžké si rozmyslet, že i ta část křivky nacházející se např. v polorovině  $z \geq 0$  se skládá ze dvou symetrických částí stejné délky. Proto stačí počítat délku jedné čtvrtiny Vivianiho křivky z kladného oktantu  $\mathbb{R}_+^3$ . Tato křivka  $\phi(t) = (x(t), y(t), z(t))$  je tedy parametricky určena rovnicemi:

$$x(t) = a(1 + \cos t), \quad y(t) = a \sin t, \quad z(t) = 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right),$$

kde  $t \in [0, \pi]$ .

Pro délku křivky  $\phi$  (a tedy 1/4 délky Vivianiho křivky) dostaneme podle Věty 6.3 vzorec

$$\ell(\phi) = a \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 2 \cos^2 \left(\frac{t}{2}\right)} dt = a \int_0^\pi \sqrt{1 + 2 \cos^2 \left(\frac{t}{2}\right)} dt.$$

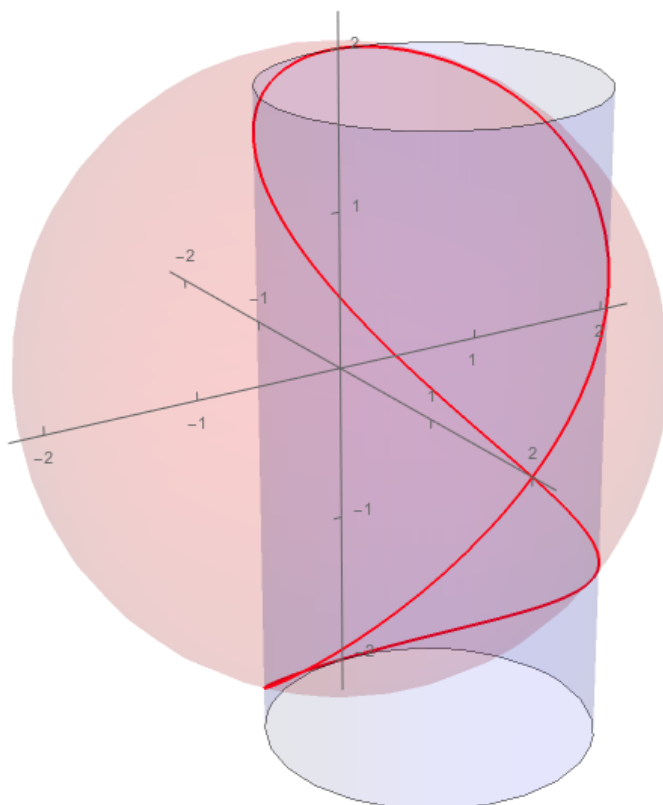
Poslední integrál bohužel nelze spočítat explicitně. Drobnou úpravou jej můžeme jen vyjádřit jakou specifickou hodnotu tzv. *uplného eliptického integrálu druhého druhu*, což je speciální funkce definovaná integrálem

$$E(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx, \quad k \in [0, 1]. \quad (75)$$

Dostaneme tak vzorec pro délku  $\phi$  ve tvaru

$$\ell(\phi) = 2a\sqrt{2} E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Numericky přibližná hodnota je  $E(1/\sqrt{2}) \approx 1.35064$ .



Obrázek 18: Vivianiho křivka pro  $a = 1$ .

Vzorec pro výpočet délky křivky z Věty 6.3 je užitečný, ale lze ho aplikovat jen na křivky, které jsou po částech  $C^1$ . Nesplňuje-li křivka tento předpoklad, nezbyvá než použít obecnou definici délky křivky, neboť ta diferencovatelnost křivky nevyžaduje. Upozorněme také, že vzorec z Věty 6.3 nemusí být délka křivky ani v případě, že má integrál ve vzorci dobrý smysl. Uvažujme např. křivku  $\phi$  danou grafem Cantorovy funkce, tzn.  $\phi(x) = (x, f(x))$ ,  $x \in [0, 1]$ , kde  $f$  je Cantorova funkce, viz Příklad 4.52. Funkce  $f$  je spojitá a navíc  $f'(x) = 0$  pro s.v.  $x \in [0, 1]$ , neboť  $f$  je konstantní na „prostředních“ intervalech z množin  $C_n$ , viz Příklad 4.51. Potom

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^1 1 dx = 1,$$

ale délka Cantorovy funkce **není** 1. Křivka, která by spojovala body  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$  a měla délku 1, ani neexistuje (proč?). Skutečnou délku Cantorovy funkce spočítáme v následujícím příkladě.

**Příklad 6.7** (Délka Cantorovy funkce): Spočítáme délku křivky  $\phi(x) = (x, f(x))$ ,  $x \in [0, 1]$ , kde  $f$  je Cantorova funkce. Nejprve ukážeme, že délka  $\phi$  je nejvýše 2. Uvažujme libovolné dělení  $\sigma : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$  intervalu  $[0, 1]$ . Potom

$$\ell_\sigma(\phi) = \sum_{i=1}^n \|(x_i, f(x_i)) - (x_{i-1}, f(x_{i-1}))\|$$

je délka lomené čáry spojující postupně body  $(0, 0) = (x_0, f(x_0))$ ,  $(x_1, f(x_1))$ ,  $\dots$ ,  $(x_n, f(x_n)) = (1, 1)$ . Protože je  $f$  **neklesající**, je také lomená čára určená dělením  $\sigma$  neklesající. Nyní si stačí rozmyslet, že žádná neklesající lomená čára spojující body  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$  nemůže mít délku větší než 2 (extrémní případ je čára spojující po řadě body  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ , příp.  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ). Proto  $\ell_\sigma(\phi) \leq 2$  pro každé dělení  $\sigma$  intervalu  $[0, 1]$ . Odtud plyne, že  $\phi$  je rektifikovatelná a její délka splňuje

$$\ell(\phi) = \sup_\sigma \ell_\sigma(\phi) \leq 2.$$

Dále dokážeme také opačnou nerovnost  $\ell(\phi) \geq 2$ . Označme si  $\ell_1(\phi) := \ell(\phi|_{[0, 1/3]})$  délku Cantorovy funkce zúžené na interval  $[0, 1/3]$ . Zřejmě  $\ell_1(\phi)$  nemůže být delší než úsečka spojující body  $(0, 0)$  a  $(2^{-1}, 3^{-1})$ , neboli

$$\ell_1(\phi) \leq \sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}}.$$

Uvědomíme-li si také, že graf Cantorovy funkce v intervalu  $[2/3, 1]$  je jen posunutý graf Cantorovy funkce v intervalu  $[0, 1/3]$ , tedy stejné délky, dostaneme vztah

$$\ell(\phi) = 2\ell_1(\phi) + \frac{1}{3},$$

kde  $1/3$  představuje délku Cantorovy funkce v intervalu  $(1/3, 2/3)$ , na němž je konstantní.

Postupujme analogicky zúžením analýzy do intervalu  $[0, 1/3]$ . Pro  $\ell_2(\phi) := \ell(\phi|_{[0, 1/9]})$  dostaneme

$$\ell_2(\phi) \leq \sqrt{\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4}} \quad \text{a} \quad \ell_1(\phi) = 2\ell_2(\phi) + \frac{1}{9}.$$



Obecně pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $\ell_n(\phi) := \ell(\phi_{[0,3^{-n}]})$  máme

$$\ell_n(\phi) \geq \sqrt{\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}}} \quad \text{a} \quad \ell_{n-1}(\phi) = 2\ell_n(\phi) + \frac{1}{3^n}.$$

Odtud snadno indukcí odvodíme, že

$$\ell(\phi) = 2^n \ell_n(\phi) + \sum_{j=1}^n \frac{2^{j-1}}{3^j} \geq \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}} + \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^j$$

pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Nakonec pošleme-li  $n \rightarrow \infty$ , dostaneme nerovnost

$$\ell(\phi) \geq 1 + \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j = 2.$$

Uzavíráme tedy, že  $\ell(\phi) = 2$ .

## 6.2 Křivkový integrál 1. a 2. druhu

V této části zavedeme tzv. křivkový integrál dané skalární funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nebo vektorové funkce  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Vzhledem k fyzikálním aplikacím se zde často místo funkcí mluví o daném *skalárním* resp. *vektorovém poli*, neboť  $f$  přiřazuje bodu  $x = (x_1, \dots, x_n)$  prostoru  $\mathbb{R}^n$  skalár  $f(x) \in \mathbb{R}$  a  $F$  vektor  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x)) \in \mathbb{R}^n$ . Ve fyzice může vektorové pole  $F$  představovat např. pole elektrické, magnetické, gravitační, atd. Skalární pole  $f$  může být např. jejich potenciál.

Integrál skalárního pole  $f$  podél křivky  $\phi$  je tzv. *křivkový integrál 1. druhu*. Funkci  $f : [\phi] \rightarrow \mathbb{R}^n$  nazýváme *integrabilní* na po částech  $C^1$  křivce  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , pokud  $(f \circ \phi) \|\phi'\| \in L([a, b])$ .

**Definice 6.8** (Křivkový integrál 1. druhu): Nechť  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  je po částech  $C^1$  křivka a  $f : [\phi] \rightarrow \mathbb{R}$  je integrabilní funkce. Integrál

$$\int_{\phi} f ds := \int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt$$

nazýváme *křivkový integrál funkce  $f$  podél křivky  $\phi$  1. druhu*.

**Poznámka:** 1. Všimněte si, že  $\ell(\phi) = \int_{\phi} 1 ds$ , viz Věta 6.3.

2. Podobně jako délku křivky bychom mohli definovat i křivkový integrál 1. druhu pro širší třídu křivek pomocí dělení. Nicméně vzhledem k aplikacím a integrálním větám, které chceme v této části dokázat, bude třída po částech  $C^1$  křivek zcela dostačující.

Číslo  $\int_{\phi} f ds$  představuje celkový příspěvek skalárního pole  $f$  podél křivky  $\phi$ . Např. v mechanice, modeluje-li křivka  $\phi$  nějaký drát, jehož rozložení hustoty v prostoru popisuje funkce  $\rho : [\phi] \rightarrow \mathbb{R}$ , bude  $m = \int_{\phi} \rho ds$  hmotnost drátu.

**Příklad 6.9:** Hmotnost oblouku paraboly  $y = 2x^2$ ,  $x \in [-1, 1]$ , jejíž hustota v bodě  $(x, y)$  je  $\rho(x, y) = |x|$ , je rovna

$$m = \int_{\phi} \rho \, ds,$$

kde  $\phi(t) := (t, 2t^2)$  pro  $t \in [-1, 1]$ . Potom podle definice křivkového integrálu 1. druhu máme

$$m = \int_{-1}^1 \rho(t, 2t^2) \|\phi'(t)\| dt = \int_{-1}^1 |t| \sqrt{1 + 8t^2} dt = 2 \left[ \frac{1}{24} (1 + 8t^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{13}{6}.$$

Křivkový integrál 1. druhu nezávisí na parametrizaci křivky.

**Věta 6.10:** Nechť  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  po částech  $C^1$  křivka a  $\psi = \phi \circ \xi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kde  $\xi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  je spojitá a difeomorfismus  $(c, d)$  na  $(a, b)$ , potom

$$\int_{\phi} f \, ds = \int_{\psi} f \, ds$$

pro každou integrabilní funkci  $f : [\phi] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

*Důkaz.* Tvrzení vyplývá z Věty 5.79 o substituci, podle které máme

$$\int_c^d f(\psi(t)) \|\psi'(t)\| dt = \int_c^d f(\phi \circ \xi(t)) \|\phi'(\xi(t))\| |\xi'(t)| dt = \int_a^b f(\phi(s)) \|\phi'(s)\| ds.$$

□

Integraci vektorových polí podél křivky zavádíme tzv. *křivkovým integrálem 2. druhu*. Vektorovou funkci  $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  nazveme *integrabilní* na po částech  $C^1$  křivce  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , pokud  $(F_i \circ \phi) \phi'_i \in L([a, b])$  pro každé  $i \in \hat{n}$ .

**Definice 6.11** (Křivkový integrál 2. druhu): Nechť  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  je po částech  $C^1$  křivka a  $F : [\phi] \rightarrow \mathbb{R}^n$  je integrabilní vektorová funkce. Integrál

$$\int_{\phi} F \cdot ds := \int_a^b (F(\phi(t)), \phi'(t)) dt$$

nazýváme *křivkový integrál funkce  $F$  podél křivky  $\phi$  2. druhu*. (Zde  $(\cdot, \cdot)$  je euklidovský skalární součin v  $\mathbb{R}^n$ .)

**Poznámka:** Pro křivkový integrál 2. druhu se také používá značení

$$\int_{\phi} F \cdot ds =: \int_{\phi} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n.$$

Samotnému výrazu  $F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$  lze dát konkrétní význam, je to tzv. *diferenciální 1-forma*. Integrace obecných diferenciálních forem je předmět studia analýzy na varietách.

Abychom získali alespoň intuitivní porozumění významu křivkového integrálu 2. druhu, ukážeme si nejprve, jak ho lze vyjádřit pomocí křivkového integrálu 1. druhu. Uvažujme pro jednoduchost křivku  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  takovou, že  $\phi \in C^1((a, b))$ . Nechť  $\phi$  je navíc *regulární*, tzn.  $(\forall t \in (a, b))(\phi'(t) \neq 0)$ . Potom můžeme tečný vektor  $\phi'(t)$  ke křivce  $\phi$  v bodě  $t \in (a, b)$  normalizovat a zavést jednotkový tečný vektor

$$T(\phi(t)) := \frac{\phi'(t)}{\|\phi'(t)\|}, \quad t \in (a, b).$$

Potom pro libovolné integrabilní vektorové pole  $F : [\phi] \rightarrow \mathbb{R}^n$  máme

$$\int_{\phi} F \cdot ds = \int_a^b (F(\phi(t)), \phi'(t)) dt = \int_a^b (F(\phi(t)), T(\phi(t))) \|\phi'(t)\| dt = \int_{\phi} (F, T) ds.$$

Výraz  $(F, T)$  je až na znaménko velikost projekce pole  $F$  do tečného směru  $T$  ke křivce  $\phi$  - tzv. *tečná komponenta* pole  $F$  podél křivky  $\phi$ . Z tohoto vztahu plyne, že  $\int_{\phi} F \cdot ds$  je celkový příspěvek tečné komponenty pole  $F$  podél křivky  $\phi$ . Např. v mechanice může  $F$  reprezentovat silové pole a  $\int_{\phi} F \cdot ds$  je potom celková energie, tzv. *práce*, kterou je třeba dodat částici, abychom ji přesunuli po trajektorii určené křivkou  $\phi$ .

**Příklad 6.12:** Elipsu v  $\mathbb{R}^3$ , která vznikne průnikem válce a roviny dané rovnicemi

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{a} \quad z = 2y + 1,$$

můžeme parametrizovat tak, že  $\phi(t) := (\cos t, \sin t, 2 \sin t + 1)$ , kde  $t \in [0, 2\pi]$ . Spočítáme  $\int_{\phi} F \cdot ds$  pro  $F(x, y, z) = (y, z, x)$ . Tedy

$$\begin{aligned} \int_{\phi} F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} ((\sin t, 2 \sin t + 1, \cos t), (-\sin t, \cos t, 2 \cos t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos t + 2 \cos^2 t) dt = \pi. \end{aligned}$$

Křivkový integrál 2. druhu závisí na parametrizaci křivky, ale jen co do znaménka.

**Věta 6.13:** Nechť  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  po částech  $C^1$  křivka a  $\psi = \phi \circ \xi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kde  $\xi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  je spojitá a difeomorfismus  $(c, d)$  na  $(a, b)$ , potom pro každé integrabilní  $F : [\phi] \rightarrow \mathbb{R}^n$  platí:

$$\int_{\psi} F \cdot ds = \begin{cases} \int_{\phi} F \cdot ds, & \text{je-li } \xi \text{ rostoucí,} \\ -\int_{\phi} F \cdot ds, & \text{je-li } \xi \text{ klesající.} \end{cases}$$

*Důkaz.* Z předpokladu plyne, že pro všechna  $t \in (c, d)$  je buď  $\xi'(t) > 0$ , nebo  $\xi'(t) < 0$ , nebo-li  $\xi$  je buď rostoucí, nebo klesající na  $[c, d]$ . Označme

$$\omega := \begin{cases} 1, & \text{je-li } \xi \text{ rostoucí,} \\ -1, & \text{je-li } \xi \text{ klesající.} \end{cases}$$

Potom aplikací Věty 5.79 o substituci dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\psi} F \cdot d\mathbf{s} &= \int_c^d (F(\psi(t)), \psi'(t)) dt = \int_c^d (F(\phi \circ \xi(t)), \phi'(t)) \xi'(t) dt \\ &= \omega \int_c^d (F(\phi \circ \xi(t)), \phi'(t)) |\xi'(t)| dt = \omega \int_a^b (F(\phi(t)), \phi'(t)) dt = \omega \int_{\phi} F \cdot d\mathbf{s} \end{aligned}$$

pro libovolné integrabilní  $F : [\phi] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , což je tvrzení věty. □

**Poznámka:** Křivky  $\phi$  a  $\psi = \phi \circ \xi$  jsou tzv. *stejně orientované* v případě, že  $\xi$  je rostoucí a *opačně orientované* v případě, že  $\xi$  je klesající. Křivkový integrál 2. druhu tedy nemění svou hodnotu při reparametrizaci křivky zachovávající orientaci a mění pouze své znaménko při reparametrizaci obracející orientaci.

### 6.3 Greenova věta

Greenova věta je první z řady užitečných integrálních vět, které dávají do rovnosti integrál „z něčeho“ přes hranici jisté množiny a integrál „z něčeho jiného“ přes samotnou množinu. Všechny tyto integrální věty představují speciální případy obecné Stokesovy věty z analýzy na varietách (za jistých dodatečných předpokladů hladkosti).

Úplně nejjednodušší situaci, kdy na jedné straně rovnosti integrujeme přes množinu a na druhé přes její hranici, představuje fundamentální věta integrálního počtu:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

pro  $f$  po částech  $C^1$  na  $(a, b)$ . Nalevo integrujeme funkci přes interval  $[a, b]$  a také pravou stranu lze interpretovat jako jistý integrál přes hranici  $\partial[a, b] = \{a, b\}$ . Znaménko mínus u  $f(a)$  souvisí s tzv. orientací - zde pozitivní volbou průchodu intervalu  $[a, b]$  od  $a$  do  $b$ .

Abychom mohli vyslovit Greenovu větu, budeme potřebovat definovat několik pojmů.

**Definice 6.14** (Jednoduchá, uzavřená, Jordanova křivka):

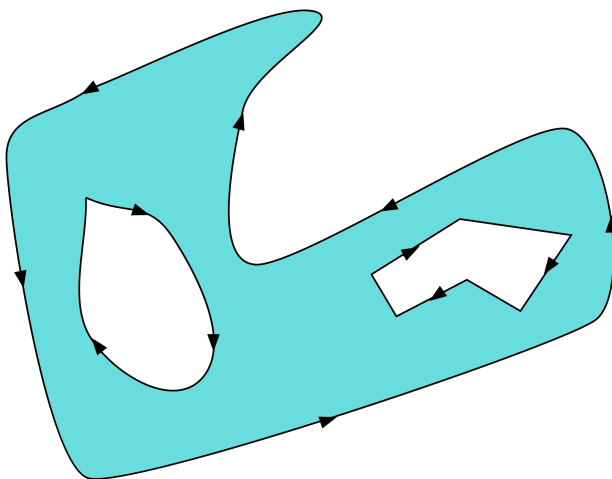
1. Křivka  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  se nazývá *jednoduchá*, právě když je  $\phi$  prosté.
2. Křivka  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  se nazývá *uzavřená*, právě když  $\phi(a) = \phi(b)$ .
3. Křivka  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  se nazývá *Jordanova*, právě když  $\phi$  je prosté na  $[a, b]$  a  $\phi(a) = \phi(b)$ .

Stopa jednoduché křivky neprotíná sama sebe. Stopa uzavřené křivky má stejný počáteční bod  $\phi(a)$  a koncový bod  $\phi(b)$ . Stopa Jordanovy křivky je uzavřená a neprotíná sama sebe vyjma bodů  $\phi(a)$  a  $\phi(b)$ .

Je-li  $n = 2$ , řekneme, že kompaktní množina  $S \subset \mathbb{R}^2$  má *po částech  $C^1$  hranici*, pokud existuje  $m \in \mathbb{N}$  a po částech  $C^1$  Jordanovy křivky  $\phi_1, \dots, \phi_m$ , jejichž stopy jsou po dvou disjunktní a platí:

$$\partial S = \bigcup_{j=1}^m [\phi_j].$$

Tedy hranice  $S$  nemusí být souvislá ( $S$  může mít „díry“). Dále hranici  $\partial S$  nazveme *kladně orientovanou*, pokud každá z křivek  $\phi_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{R}^2$  má tu vlastnost, že prochází-li parametr  $t$  interval  $[a_j, b_j]$  od bodu  $a_j$  k bodu  $b_j$ , je množina  $S$  vždy **vlevo** od bodu  $\phi_j(t)$ . Přesněji předpokládáme, že v každém bodě  $t \in [a_j, b_j]$ , kde je  $\phi_j$  diferencovatelná, je  $\phi_j'(t) \neq 0$  a jednotkový normálový vektor  $n := (-T_2, T_1)$  v bodě  $\phi_j(t)$ , kde  $T = (T_1, T_2) = \phi_j'(t)/\|\phi_j'(t)\|$  je jednotkový tečný vektor v bodě  $\phi_j(t)$ , **miří do množiny  $S$** , tzn.  $\phi_j(t) + \epsilon n \in S$  pro všechna  $\epsilon > 0$  dostatečně malá, viz Obrázek 19.



Obrázek 19: Kompaktní množina s po částech  $C^1$  kladně orientovanou hranicí.

Nyní můžeme zformulovat *Greenovu větu*, v níž použijeme značení

$$\int_{\partial S} F \cdot ds := \sum_{j=1}^m \int_{\phi_j} F \cdot ds$$

kde množina  $S$  a křivky  $\phi_1, \dots, \phi_m$  mají výše popsany význam. Navíc budeme psát  $dm^2(x, y) = dx dy$  pro Lebesgueovu míru v  $\mathbb{R}^2$ , jak je zde obvyklé.

**Věta 6.15 (Green):** Nechť  $S \subset \mathbb{R}^2$  je kompaktní množina s po částech  $C^1$  kladně orientovanou hranicí. Předpokládejme dále, že  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  je otevřená,  $S \subset \Omega$  a  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  je třídy  $C^1$  na  $\Omega$ . Potom platí:

$$\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_S \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

*Důkaz.* 1) Nejprve budeme uvažovat velmi omezenou třídu tzv. *jednoduchých množin*  $S$ , pro které bude snadné ověřit tvrzení Greenovy věty. Množina  $S$  se nazývá *jednoduchá*, právě když

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d], \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}, \end{aligned}$$

kde  $\phi_1, \phi_2$  resp.  $\psi_1, \psi_2$  jsou po částech  $C^1$  funkce na  $[a, b]$  resp.  $[c, d]$ . Tedy jednoduchá množina  $S$  je ohraničená grafy dvou po částech  $C^1$  funkcí jak od  $x$ , tak od  $y$ .

Předpokládejme tedy, že  $S$  je jednoduchá množina s pozitivně orientovanou hranicí. Potom podle prvního vyjádření  $S$  je hranice  $\partial S$  sjednocením stopy křivky dané rovnicí  $y = \phi_1(x)$  orientované zleva doprava, stopy křivky dané rovnicí  $y = \phi_2(x)$  orientované zprava doleva a dvou vertikálních úseček s  $x = a$  a  $x = b$ , které mohou degenerovat v jeden bod. Ukážeme, že pro vektorové pole  $F$  s nulovou druhou komponentou, tj.  $F = (F_1, 0)$ , platí vzorec z Greenovy věty. Levá strana vzorce je rovna

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} (F_1, 0) \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b (F_1(x, \phi_1(x)), 0)(1, \phi_1'(x))^T dx + \int_{\phi_1(b)}^{\phi_2(b)} (F_1(b, y), 0)(0, 1)^T dy \\ &\quad + \int_b^a (F_1(x, \phi_2(x)), 0)(1, \phi_2'(x))^T dx + \int_{\phi_2(a)}^{\phi_1(a)} (F_1(a, y), 0)(0, 1)^T dy \\ &= \int_a^b (F_1(x, \phi_1(x)) - F_1(x, \phi_2(x))) dx. \end{aligned}$$

Tento výraz dostaneme i na pravé straně, protože

$$- \int_S \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy = - \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) dy dx = \int_a^b (F_1(x, \phi_1(x)) - F_1(x, \phi_2(x))) dx.$$

Tedy

$$\int_{\partial S} (F_1, 0) \cdot d\mathbf{s} = - \int_S \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy.$$

Zcela analogicky ověříme, vyjádříme-li hranici  $\partial S$  druhým způsobem pomocí  $\psi_1$  a  $\psi_2$ , že pro vektorová pole tvaru  $F = (0, F_2)$  platí:

$$\int_{\partial S} (0, F_2) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy.$$

Nyní stačí oba výsledky zkombinovat a dostaneme pro obecné  $C^1$  vektorové pole  $F = (F_1, F_2)$ , že

$$\int_{\partial S} F \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial S} (F_1, 0) \cdot d\mathbf{s} + \int_{\partial S} (0, F_2) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy,$$

což jsme chtěli dokázat.

2) Když už víme, že Greenova věta platí pro jednoduché množiny, můžeme její platnost snadno rozšířit na mnohem obecnější třídu množin  $S$ , které lze rozložit na konečné sjednocení množin  $S_1, \dots, S_m$  takových, že platí:

- i. Množiny  $S_1, \dots, S_m$  mají po dvou disjunktní vnitřky.
- ii. Pro každé  $i \in \hat{m}$  je  $S_i$  jednoduchá množina s kladně orientovanou po částech  $C^1$  hranicí.

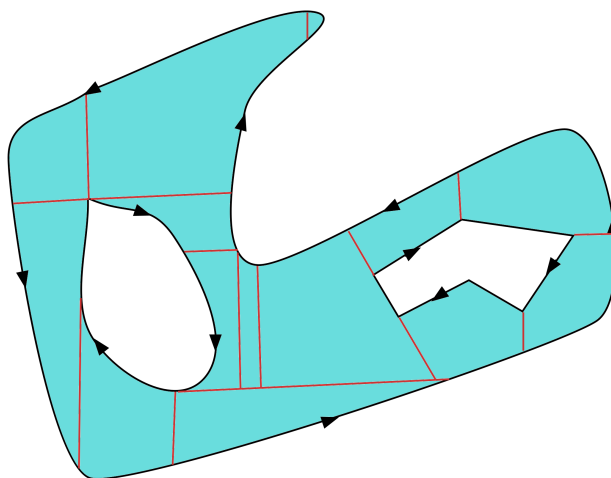
Viz Obrázek 20. Jelikož společné hranice množin  $S_1, \dots, S_m$  je množina Lebesgueovy míry nula, máme

$$\int_S \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^m \int_{S_i} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Také ale platí rovnost

$$\int_{\partial S} F \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^m \int_{\partial S_i} F \cdot d\mathbf{s},$$

protože všechny křivkové integrály přes ty části hranic množin  $S_i$ , které nejsou částí hranice  $S$ , se vynulují. Všimněte si, že je-li  $C$  společná hranice množin  $S_i$  a  $S_j$ ,  $i \neq j$ , potom je stopou dvou křivek, které jsou opačně orientované. Tudíž ty části integrálů  $\int_{\partial S_i}$  a  $\int_{\partial S_j}$  přes společnou hranici  $C$  se odečtou, viz poznámku za Větou 6.13. Nyní již stačí aplikovat Greenovu větu na jednotlivé integrály přes jednoduché množiny  $S_1, \dots, S_m$ .



Obrázek 20: Příklad rozkladu množiny z Obrázku 19 na jednoduché množiny.

3) Třída množin  $S$ , pro které jsme Greenovu větu dokázali, je dostačující pro mnoho aplikací. Nicméně ne každou kompaktní množinu s po částech  $C^1$  hranicí lze zapsat jako sjednocení konečného počtu jednoduchých množin. Kompletní důkaz obecné Greenovy věty zde neuvedeme, protože vyžaduje jistou dodatečnou technickou mašinerii, tzv. rozklad jedničky. Zaujatý čtenář najde více detailů v dodatcích.  $\square$

**Poznámka:** Je zajímavé a někdy i užitečné, že plochu množiny  $S \subset \mathbb{R}^2$  lze počítat pomocí křivkového integrálu 2. druhu podél hranice  $S$ . Je to možné udělat dokonce více různými způsoby, např.

$$m(S) = \int_S dx dy = \int_{\partial S} (x, 0) \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\partial S} (0, y) \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2} \int_{\partial S} (-y, x) \cdot d\mathbf{s},$$

jak vyplývá z Greenovy věty.

**Příklad 6.16:** Bylo by obtížné počítat přímo křivkový integrál 2. druhu vektorového pole

$$F(x, y) = \left( \sqrt{1+x^2} - ye^{xy} + 3y, x^2 - xe^{xy} + \ln(1+y^8) \right)$$

přes kladně orientovanou kružnici  $\phi$  určenou hranicí kruhu  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Aplikací Greenovy věty ale dostaneme výsledek téměř okamžitě, neboť

$$\begin{aligned} \int_{\phi} F \cdot d\mathbf{s} &= \int_D \left( \frac{\partial}{\partial x} [x^2 - xe^{xy} + \ln(1 + y^8)] - \frac{\partial}{\partial y} [\sqrt{1 + x^2} - ye^{xy} + 3y] \right) dx dy \\ &= \int_D (2x - 3) dx dy = -3m(D) = -3\pi, \end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že integrál  $\int_D 2x dx dy = 0$  ze symetrie.

**Příklad 6.17** (Plocha Descartova listu): Spočítáme plochu *Descartova listu*, což je omezená množina  $S$  v  $\mathbb{R}_+^2$  s hranicí určenou rovnicí  $x^3 + y^3 = 3axy$ , kde  $a > 0$ , viz Obrázek 21. Parametrizujeme-li hranici  $S$  pomocí polárních souřadnic  $\phi(\theta) := (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$ , zjistíme, že

$$r(\theta) = \frac{3a \sin \theta \cos \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Potom podle Greenovy věty můžeme plochu  $S$  počítat následovně:

$$\begin{aligned} m(S) &= \frac{1}{2} \int_{\phi} (-y, x) \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (-r(\theta) \sin \theta, r(\theta) \cos \theta) \begin{pmatrix} r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta \\ r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta \end{pmatrix} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} r^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{3a \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg}^3 \theta} \right)^2 \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{9}{2} a^2 \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1 + t^3)^2} dt \\ &= \frac{3}{2} a^2 \left[ -\frac{1}{1 + t^3} \right]_0^{\infty} = \frac{3}{2} a^2, \end{aligned}$$

kde jsme provedli substituci  $t = \operatorname{tg} \theta$ .

## 6.4 Plocha a plošné integrály 1. a 2. druhu

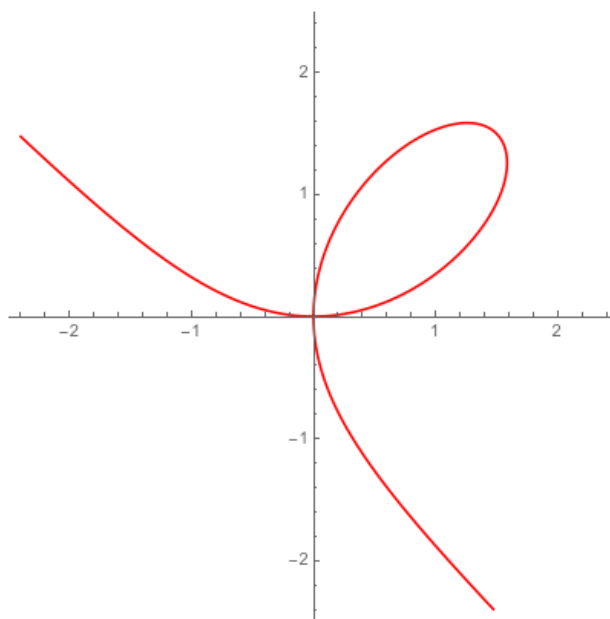
V této části si zavedeme integrály skalárních a vektorových polí přes plochy v  $\mathbb{R}^3$ . Nejprve si musíme vyjasnit, co budeme rozumět *plochou* v  $\mathbb{R}^3$  a také co znamená, že je plocha *po částech třídy  $C^1$* . Hned od začátku budeme pracovat se speciální třídou podmnožin  $\mathbb{R}^3$ , které budeme nazývat *parametrizované po částech  $C^1$  plochy*. To sice není nejobecnější definice pojmu po částech  $C^1$  plocha, ale její technická složitost je přijatelná a přitom zahrnuje dostatečně bohatou třídu množin. Navíc nám umožní poměrně rychle odvodit výsledky zásadní pro aplikace.

**Definice 6.18** (Parametrizovaná po částech  $C^1$  plocha v  $\mathbb{R}^3$ ): Množinu  $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$ , kde  $S_i \subset \mathbb{R}^3$  pro každé  $i \in \hat{k}$ , splňující:

1.  $(\forall i \in \hat{k})(\exists \Omega_i \subset \mathbb{R}^2 \text{ neprázdná oblast})(\exists \Phi_i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ třídy } C^1)(\Phi_i(\Omega_i) = S_i^{\circ S})$ ,
2. pro každé  $i, j \in \hat{k}, i \neq j$ , je průnik  $S_i \cap S_j$  buď prázdný, nebo konečné sjednocení stop po částech  $C^1$  křivek,

nazýváme *parametrizovanou po částech  $C^1$  plochou* v  $\mathbb{R}^3$ . Množina  $S_i^{\circ S}$  označuje vnitřek množiny  $S_i$  v topologii  $S$ .





Obrázek 21: Descartův list.

**Poznámka:** Parametrizovaná po částech  $C^1$  plocha se tedy skládá z konečného počtu množin, které jsou obrazy spojitě diferencovatelných zobrazení  $\Phi_i$  z otevřené a souvislé podmnožiny  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}^3$  (parametrizace) a navíc ze „společných částí nižší dimenze“, viz konkrétní příklady níže. Všimněte si, že na rozdíl od křivek je parametrizovaná plocha množina a nikoliv zobrazení. To zdůrazňuje slovo *parametrizovaná*. V této logice je parametrizovaná plocha vícedimenzionální analogie stopy křivky.

**Příklad 6.19:** Sféra  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$  o poloměru  $a > 0$  je parametrizovaná po částech  $C^1$  plocha v  $\mathbb{R}^3$ , neboť ji lze např. složit z dolní a horní hemisféry  $S = S_1 \cup S_2$ , kde  $S_i^{\circ S} = \Phi_i(\Omega_i)$ , parametrizace  $\Omega_i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}^2$  lze volit jako hladká zobrazení

$$\Phi_1(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad \text{a} \quad \Phi_2(x, y) = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

na množině

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < a^2\}.$$

Průnik  $S_1 \cap S_2 = \{(x, y, z) \in S \mid z = 0\}$  je kružnice („rovník“), a tedy stopa křivky třídy  $C^1$ .

Jinou volbou je např. rozklad  $S = \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2$  na levou a pravou hemisféru, které parametrizujeme zobrazeními  $\tilde{\Phi}_i : \tilde{\Omega}_i \rightarrow \mathbb{R}^3$  určenými sférickými souřadnicemi:

$$\tilde{\Phi}_1(u, v) = \tilde{\Phi}_2(u, v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v),$$

kde

$$\tilde{\Omega}_1 = (-\pi, 0) \times (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{a} \quad \tilde{\Omega}_2 = (0, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2).$$

Průnik  $\tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_2 = \{(x, y, z) \in S \mid y = 0\}$  je opět kružnice („poledník“).

**Příklad 6.20:** Hranice (plného) válce  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \wedge 0 \leq z \leq b\}$  o poloměru  $a > 0$  a výšce  $b > 0$  je parametrizovaná po částech  $C^1$  plocha v  $\mathbb{R}^3$ . Množinu  $S := \partial V$  můžeme např. rozložit na dvě poloviny pláště válce

$$S_1 := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = a^2 \wedge 0 \leq z \leq b \wedge x \leq 0\},$$

$$S_2 := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = a^2 \wedge 0 \leq z \leq b \wedge x \geq 0\}$$

a dvě podstavy

$$S_3 := \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}, \quad S_4 := \{(x, y, b) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Možnou volbou parametrizací  $\Phi_i : \Omega_i \rightarrow S_i^{\circ S}$  je např.

$$\Phi_1(u, v) := (a \cos u, a \sin u, v), \quad \Omega_1 := (-\pi, 0) \times (0, b),$$

$$\Phi_2(u, v) := (a \cos u, a \sin u, v), \quad \Omega_2 := (0, \pi) \times (0, b)$$

a

$$\Phi_3(u, v) := (u, v, 0), \quad \Phi_4(u, v) := (u, v, b), \quad \Omega_3 = \Omega_4 := \{(u, v) \mid u^2 + v^2 < a^2\}.$$

Ověření, že průniky  $S_i \cap S_j$ ,  $i \neq j$ , jsou buď prázdné, nebo stopy  $C^1$  křivek, je jednoduché a je přenecháno čtenáři.

**Příklad 6.21:** Hranice (plného) kváдру  $K = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$  je parametrizovaná po částech  $C^1$  plocha v  $\mathbb{R}^3$ . Množiny  $S_i$ ,  $i \in \hat{6}$ , lze volit jako jednotlivé stěny kváдру  $K$ . Detailní ověření definice je přenecháno čtenáři jako cvičení.

Předpokládejme na chvíli, že  $S$  je plocha parametrizovaná jedinou funkcí  $\Phi$ , tj.  $k = 1$  v Definicí 6.18. Tedy  $\Phi : \Omega \rightarrow S$  je třídy  $C^1$ , kde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  je oblast. Navíc nechť  $h(D\Phi) = 2$  na  $\Omega$ . Zvolme pevně  $(u_0, v_0) \in \Omega$ . Parametrizace  $\Omega$  určuje na ploše  $S$  dvě důležité křivky procházející bodem  $\Phi(u_0, v_0)$ , které jsou dány zobrazeními

$$\Phi_{v_0}(u) := \Phi(u, v_0) \quad \text{a} \quad \Phi_{u_0}(v) := \Phi(u_0, v)$$

pro  $u, v \in \Omega$ . Tečné vektory ke křivkám  $\Phi_{v_0}$  a  $\Phi_{u_0}$  v bodě  $(u_0, v_0)$  jsou

$$T_{u_0} := \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

a

$$T_{v_0} := \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right),$$

kde jsme použili značení jako např. ve Větě o implicitní funkci a označili si komponenty parametrizace  $\Phi$ :

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in \Omega.$$

Vektory  $T_{u_0}$  a  $T_{v_0}$  jsou lineárně nezávislé, neboť jsou to sloupce matice  $D\Phi(u_0, v_0)$ , která má dle předpokladu hodnot 2. Tedy  $T_{u_0}$  a  $T_{v_0}$  určují tečnou rovinu k ploše  $S$  v bodě  $\Phi(u_0, v_0)$ .

Normálový vektor této roviny, tj. vektor kolmý na oba vektory  $T_{u_0}$  a  $T_{v_0}$ , lze volit jako vektorový součin

$$T_{u_0} \times T_{v_0} = \left( \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right| (u_0, v_0), \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right| (u_0, v_0), \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| (u_0, v_0) \right).$$

Z lineární nezávislosti vektorů  $T_{u_0}$  a  $T_{v_0}$  vyplývá, že  $T_{u_0} \times T_{v_0} \neq 0$ . V takovém případě můžeme zavést *jednotkový normálový vektor k ploše  $S$  v bodě  $\Phi(u_0, v_0)$*  vztahem

$$n = n(u_0, v_0) := \frac{T_{u_0} \times T_{v_0}}{\|T_{u_0} \times T_{v_0}\|}. \quad (76)$$

Všimněte si, že jsme provedli jednu volbu jednotkového normálového vektoru ze dvou možností lišících se znaménkem.

Nyní můžeme zavést integrál skalárního pole  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  přes plochu  $S$ . O funkci  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  řekneme, že je *integrabilní* na parametrizované  $C^1$  ploše  $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$ , pokud  $(f \circ \Phi_i) \|\partial_u \Phi_i \times \partial_v \Phi_i\| \in L(\Omega_i)$  pro každé  $i \in \hat{k}$ .

**Definice 6.22:** Buď  $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$  parametrizovaná po částech  $C^1$  plocha, kde množiny  $S_1, \dots, S_k$  jsou jako v Definici 6.18. Nechť  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  je integrabilní funkce na  $S$ . Potom definujeme *plošný integrál funkce  $f$  přes plochu  $S$  1. druhu* vztahy:

$$\int_S f \, dS := \sum_{i=1}^k \int_{S_i} f \, dS, \quad (77)$$

kde

$$\int_{S_i} f \, dS := \int_{\Omega_i} f(\Phi_i(u, v)) \left\| \frac{\partial \Phi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} \right\| \, dudv$$

pro každé  $i \in \hat{k}$ . Speciálně *obsah plochy* definujeme vztahem

$$A(S) := \int_S 1 \, dS = \sum_{i=1}^k \int_{S_i} 1 \, dS = \sum_{i=1}^k \int_{\Omega_i} \left\| \frac{\partial \Phi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} \right\| \, dudv. \quad (78)$$

**Poznámka:** Druhý bod z Definice 6.18 zaručuje, že části  $S$ , které se integrují v integrálech napravo v (77) vícekrát, tj. průniky  $S_i \cap S_j$ , do integrálů nepřispívají.

**Poznámka:** Připomeňme, že pro vektory  $a, b \in \mathbb{R}^3$ , platí vzorec:

$$\|a \times b\| = \sqrt{\|a\|^2 \|b\|^2 - (a, b)^2}.$$

Ten bývá užitečný při výpočtu konkrétních plošných integrálů 1. druhu, viz příklady níže.

**Příklad 6.23:** Spočítáme plošný integrál 1. druhu funkce  $f(x, y, z) = x^2 z$  přes plášť válce  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \wedge 0 < z < 1\}$ . Zvolíme parametrizaci  $S$  pomocí cylindrických souřadnic:

$$\Phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

kde  $(u, v) \in \Omega := (-\pi, \pi) \times (0, 1)$ . Jelikož

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \|(\cos u, \sin u, 0)\| = 1,$$

dostáváme

$$\int_S f dS = \int_{\Omega} f(\cos u, \sin u, v) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| du dv = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} v \cos^2 u du dv = \frac{\pi}{2}.$$

Ze vzorce (78) není zřejmé, proč právě tento vztah je smysluplná definice pro obsah plochy  $S$ . Motivaci pro tuto definici si jen naznačíme. Zřejmě stačí uvažovat plochu  $S \subset \mathbb{R}^3$  parametrizovanou jednou parametrizací  $\Phi \in C^1(\Omega)$ . Jelikož je  $\Omega$  otevřená, můžeme ji pro pevně zvolené  $k \in \mathbb{N}$  aproximovat zevnitř čtverci o straně např.  $2^{-k}$  tak, jako v Lemma 5.78. Na každém čtverci  $Q = [u, u + 2^{-k}] \times [v, v + 2^{-k}]$  z množiny  $A_k(\Omega) \subset \Omega$  aproximujeme odpovídající část plochy  $S$ , tj.  $\Phi(Q)$ , rovnoběžníkem se stranami danými vektory  $\Phi(u + 2^{-k}, v) - \Phi(u, v)$  a  $\Phi(u, v + 2^{-k}) - \Phi(u, v)$ . Připomeňme, že norma vektorového součinu vektorů  $a, b \in \mathbb{R}^3$  je rovna právě obsahu rovnoběžníku, jehož strany jsou dány vektory  $a$  a  $b$ . Obsah našeho rovnoběžníku je tedy roven

$$\| [\Phi(u + 2^{-k}, v) - \Phi(u, v)] \times [\Phi(u, v + 2^{-k}) - \Phi(u, v)] \|,$$

což je pro  $k$  velké podle Věty o přírůstku přibližně rovno

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| 2^{-2k} = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| m^2(Q).$$

Obsah celé plochy  $S$  lze pak odhadnout výrazem

$$\sum_{Q \subset A_k(\Omega)} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| m^2(Q).$$

Poslední výraz lze chápat jako integrál funkce

$$\phi_k := \sum_{Q \subset A_k(\Omega)} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \chi_Q.$$

Díky předpokladu  $\Phi \in C^1(\Omega)$  lze ukázat, že  $\phi_k \rightarrow \|\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi\|$  pro  $k \rightarrow \infty$  bodově na  $\Omega$  a s pomocí Lebesgueovy věty dále argumentovat, že  $\int_{\Omega} \phi_k$  konverguje pro  $k \rightarrow \infty$  k integrálu

$$\int_{\Omega} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| du dv.$$

Jinými slovy pokud aproximujeme obsah plochy  $S$  součtem obsahů malých rovnoběžníků určených tečnými rovinami k ploše  $S$  v bodech dělení množiny  $\Omega$  a dělení zjemňujeme, dostaneme v limitě integrál (78).

Podobně jako křivkový integrál 1. druhu také hodnota plošného integrálu 1. druhu nezávisí na reparametrizaci parametrizované plochy  $S$ . *Reparametrizací* zde rozumíme to, že parametrizace  $\Phi_i : \Omega_i \rightarrow S_i$  jednotlivých částí  $S_i$ , viz Definice 6.18, nahradíme novými parametrizacemi  $\Psi_i = \Phi_i \circ \xi_i : \Lambda_i \rightarrow S_i$ , kde  $\xi_i : \Lambda_i \rightarrow \Omega_i$  je difeomorfismus oblastí  $\Lambda_i, \Omega_i \subset \mathbb{R}^2$ . Zřejmě díky aditivní definici (77) stačí tuto nezávislost ověřit pro  $C^1$  plochu parametrizovanou jedinou funkcí ( $k = 1$  v Definici 6.18).

**Věta 6.24:** Nechť  $S$  je parametrizovaná  $C^1$  plocha v  $\mathbb{R}^3$ , pro niž existuje oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  a  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  třídy  $C^1$  tak, že  $\Phi(\Omega) = S$ . Nechť je dále  $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$  oblast a  $\xi : \Lambda \rightarrow \Omega$  difeomorfismus. Potom pro  $\Psi := \Phi \circ \xi$  a libovolné integrabilní  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  platí:

$$\int_{\Omega} f(\Phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| dudv = \int_{\Lambda} f(\Psi(s, t)) \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\| dsdt.$$

*Důkaz.* Píšeme-li  $\xi(s, t) = (u, v)$ , dostaneme aplikací řetězového pravidla rovnosti

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} \quad \text{a} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Potom

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial s} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \det D\xi,$$

kde jsme využili toho, že vektorový součin lineárně závislých vektorů je nula. Tudíž podle Věty 5.79 o substituci je

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} f(\Psi(s, t)) \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\| dsdt &= \int_{\Lambda} (f \circ \Phi)(\xi(s, t)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(\xi(s, t)) \right\| |\det D\xi(s, t)| dsdt \\ &= \int_{\Omega} f(\Phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| dudv. \end{aligned}$$

□

**Příklad 6.25 (Obsah plochy grafu funkce):** Uvažujme plochu  $S$ , která je grafem funkce  $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  třídy  $C^1$  na oblasti  $\Omega$ , tedy  $S = \{(x, y, g(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega\}$ . Potom se nabízí volit parametrizaci  $\Phi(x, y) := (x, y, g(x, y))$  pro  $(x, y) \in \Omega$ . Zřejmě je

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left( 1, 0, \frac{\partial g}{\partial x} \right) \quad \text{a} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left( 0, 1, \frac{\partial g}{\partial y} \right)$$

a odtud

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\|^2 - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 = 1 + \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^2.$$

Tudíž podle (78) dostáváme vzorec pro obsah plochy  $S$  ve tvaru

$$A(S) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^2} dx dy. \quad (79)$$

**Příklad 6.26** (Povrch koule): Odvodíme známý vzorec pro povrch koule o poloměru  $a > 0$  dvěma způsoby.

Položme  $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ . Zřejmě stačí spočítat obsah např. horní hemisféry  $S_+ := S \cap \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ . Ta je grafem funkce

$$g(x, y) := \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

pro  $(x, y) \in \Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < a^2\}$ . Krátkým výpočtem zjistíme, že

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Tudíž podle (79) máme

$$A(S) = 2A(S_+) = \int_{\Omega} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

Po substituci do polárních souřadnic nám vyjde

$$A(S) = 2 \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} d\theta dr = 4\pi a \left[ -\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^a = 4\pi a^2.$$

Druhý postup využívá parametrizace pomocí sférických souřadnic

$$\Phi(u, v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$$

pro  $(u, v) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ . Obor hodnot  $\Phi$  sice není celá sféra  $S$ , nýbrž  $S$  bez jedné půlkružnice („poledníku“), to ale nemá na obsah  $S$  vliv. Jelikož

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (-a \sin u \cos v, a \cos u \cos v, 0) \quad \text{a} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (-a \cos u \sin v, -a \sin u \sin v, a \cos v),$$

vyjde nám

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|^2 - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)^2 = a^4 \cos^2 v$$

a odtud opět dostaneme

$$A(S) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos v dv du = 4\pi a^2.$$

**Příklad 6.27** (Obsah rotačního tělesa): Uvažujme jednoduchou po částech  $C^1$  křivku v  $\mathbb{R}^3$  s parametrizací ve tvaru

$$\phi(t) = (0, y(t), z(t)), \quad t \in [a, b].$$

Najdeme parametrizaci plochy  $S$ , která vznikne rotací stopy křivky  $\phi$  kolem osy  $z$ . Zafixujeme-li  $t \in [a, b]$ , vznikne rotací  $[\phi]$  v rovině  $z = z(t)$  kružnice o poloměru  $y(t)$  se středem v bodě  $(0, 0, z(t))$ . Odtud vyvodíme, že parametrizace rotační plochy  $S$  je tvaru

$$\Phi(t, \theta) = (y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t)),$$

kde  $t \in [a, b]$  a  $\theta \in (-\pi, \pi]$ . Snadno spočítáme, že

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = (y'(t) \cos \theta, y'(t) \sin \theta, z'(t)), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = (-y(t) \sin \theta, y(t) \cos \theta, 0),$$

a

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\| = |y(t)| \sqrt{(y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

pro všechna  $t \in (a, b)$  a  $\theta \in (-\pi, \pi)$ . Tudíž obsah  $S$  je dán integrálem

$$A(S) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_a^b |y(t)| \sqrt{(y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt d\theta = 2\pi \int_a^b |y(t)| \|\phi'(t)\| dt. \quad (80)$$

Uvedme si několik konkrétních příkladů těles, které vzniknou rotací jednoduché křivky:

a) *Sféra* o poloměru  $a > 0$  vznikne rotací půlkružnice

$$\phi(t) = (0, a \cos t, a \sin t), \quad t \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Pro její obsah proto podle (80) platí:

$$A(S) = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos t dt = 4\pi a^2.$$

b) *Plášť válce* o poloměru  $a > 0$  a výšce  $b > 0$  vznikne rotací úsečky

$$\phi(t) = (0, a, bt), \quad t \in [0, 1],$$

a proto

$$A(S) = 2\pi \int_0^1 ab dt = 2\pi ab.$$

c) *Plášť kuželu* o poloměru  $a > 0$  a výšce  $b > 0$  vznikne rotací úsečky

$$\phi(t) = (0, at, bt), \quad t \in [0, 1],$$

a proto

$$A(S) = 2\pi \int_0^1 at \sqrt{a^2 + b^2} dt = \pi a \sqrt{a^2 + b^2}.$$

d) *Torus* vznikne rotací kružnice (v rovině  $x = 0$ ) o poloměru  $a > 0$  se středem v bodě  $(0, b, 0)$ , kde  $b > a$ , kolem osy  $z$ . Jeho plášť můžeme rozdělit na dvě části, které vzniknou rotací půlkružnic

$$\phi_{\pm}(t) = (0, b \pm a \cos t, a \sin t), \quad t \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Proto podle (80) pro obsah toru dostaneme

$$\begin{aligned} A(S) &= A(S_-) + A(S_+) = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (b - a \cos t) a \, dt + 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (b + a \cos t) a \, dt \\ &= 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ab \, dt = 4\pi^2 ab. \end{aligned}$$

**Příklad 6.28** (Povrch Vivianiho tělesa): Spočítáme povrch Vivianiho tělesa, tj. obsah hranice  $S$  tělesa, které vznikne průnikem válce a koule dané nerovnostmi:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2 \quad \text{a} \quad (x - a)^2 + y^2 \leq a^2,$$

kde  $a > 0$ , viz Obrázek 18. Tuto plochu můžeme rozdělit na dvě části, válcový plášť

$$S_v := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2 \wedge (x - a)^2 + y^2 = a^2\}$$

a sférickou část

$$S_s := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 \wedge (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Vzhledem k symetrii tělesa stačí počítat obsah např. části z kladného oktantu  $\mathbb{R}_+^3$ .

Válcový plášť  $S_v$  parametrizujeme pomocí cylindrických souřadnic:

$$\Phi_c(u, v) := (a + a \cos u, a \sin u, av),$$

kde  $u \in (0, \pi)$  a  $v > 0$ , omezíme-li se jen na část válce v  $\mathbb{R}_+^3$ . Abychom parametrizovali jen tu část válce, která se nachází v kouli, dosadíme souřadnice do nerovnice pro kouli a dostaneme

$$(a + a \cos u)^2 + a^2 \sin^2 u + a^2 v^2 \leq 4a^2,$$

což je po zjednodušení nerovnost

$$2 \cos u + v^2 \leq 2.$$

Tím dostaneme parametrizaci plochy  $S_v$  v  $\mathbb{R}_+^3$  ve tvaru

$$S_v \cap \mathbb{R}_+^3 = \{(a + a \cos u, a \sin u, av) \mid 0 < v < \sqrt{2 - 2 \cos u} \wedge u \in (0, \pi)\}.$$

Jelikož

$$\frac{\partial \Phi_c}{\partial u} = (-a \sin u, a \cos u, 0) \quad \text{a} \quad \frac{\partial \Phi_c}{\partial v} = (0, 0, a),$$



dostaneme

$$\left\| \frac{\partial \Phi_c}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_c}{\partial v} \right\| = \sqrt{\left\| \frac{\partial \Phi_c}{\partial u} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \Phi_c}{\partial v} \right\|^2 - \left( \frac{\partial \Phi_c}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_c}{\partial v} \right)^2} = a^2,$$

a proto pro plochu máme

$$A(S_v \cap \mathbb{R}_+^3) = \int_0^\pi \int_0^{\sqrt{2-2\cos u}} a^2 dv du = a^2 \int_0^\pi \sqrt{2-2\cos u} du = 2a^2 \int_0^\pi \sin\left(\frac{u}{2}\right) du = 4a^2.$$

Sférickou část  $S_s$  omezenou na  $\mathbb{R}_+^3$  parametrizujeme sférickými souřadnicemi

$$\Phi_s(\varphi, \theta) := (2a \cos \varphi \cos \theta, 2a \sin \varphi \cos \theta, 2a \sin \theta)$$

kde  $\varphi \in (0, \pi/2)$  a  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Z omezení na válec dostaneme nerovnost

$$(a - 2a \cos \varphi \cos \theta)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \leq a^2,$$

což je po zjednodušení

$$(\cos \theta - \cos \varphi) \cos \theta \leq 0.$$

Jelikož pro  $\theta \in (0, \pi/2)$  je  $\cos \theta > 0$  a kosinus je klesající funkce na  $(0, \pi/2)$ , dostaneme z poslední nerovnosti jednoduché omezení  $\varphi \leq \theta$ . Tudíž

$$S_s \cap \mathbb{R}_+^3 = \left\{ (2a \cos \varphi \cos \theta, 2a \sin \varphi \cos \theta, 2a \sin \theta) \mid 0 < \varphi < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Jednoduše spočítáme, že

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial \varphi} = (-2a \sin \varphi \cos \theta, 2a \cos \varphi \cos \theta, 0)$$

a

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial \theta} = (-2a \cos \varphi \sin \theta, -2a \sin \varphi \sin \theta, 2a \cos \theta).$$

Odtud

$$\left\| \frac{\partial \Phi_s}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi_s}{\partial \theta} \right\| = 4a^2 \cos \theta,$$

a tudíž

$$A(S_s \cap \mathbb{R}_+^3) = \int_0^{\pi/2} \int_0^\theta 4a^2 \cos \theta d\varphi d\theta = 4a^2 \int_0^{\pi/2} \theta \cos \theta d\theta = 2a^2(\pi - 2).$$

Celkem tedy pro povrch Vivianiho tělesa dostáváme

$$A(S) = 4A(S_v \cap \mathbb{R}_+^3) + 4A(S_s \cap \mathbb{R}_+^3) = 8\pi a^2.$$

Plošný integrál 2. druhu je integrál vektorového pole přes plochu, který se zavádí jako integrál normálové komponenty pole přes plochu  $S$ , tj. vztahem

$$\int_S F \cdot d\mathbf{S} := \int_S (F, n) dS, \quad (81)$$

kde  $n = n(x, y, z)$  je jednotkový normálový vektor k ploše  $S$  v bodě  $(x, y, z) \in S$ . Připomeneme-li si vztah (76), dojdeme k následující definici *plošného integrálu 2. druhu*. O funkci  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , kde  $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$  je parametrizovaná po částech  $C^1$  plocha z Definice 6.18, řekneme, že je *integrabilní* na  $S$ , pokud skalární součin  $(F \circ \Phi_i, \partial_u \Phi_i \times \partial_v \Phi_i) \in L(\Omega_i)$  pro každé  $i \in \hat{k}$ .

**Definice 6.29:** Buď  $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$  parametrizovaná po částech  $C^1$  plocha, kde množiny  $S_1, \dots, S_k$  jsou jako v Definici 6.18. Nechť  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  je integrabilní vektorová funkce na  $S$ . Potom definujeme *plošný integrál funkce  $F$  přes plochu  $S$  2. druhu* vztahy:

$$\int_S F \cdot d\mathbf{S} := \sum_{i=1}^k \int_{S_i} F \cdot d\mathbf{S},$$

kde

$$\int_{S_i} F \cdot d\mathbf{S} := \int_{\Omega_i} \left( F \circ \Phi_i, \frac{\partial \Phi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} \right) dudv \quad (82)$$

pro každé  $i \in \hat{k}$ .

Integrály v (82) závisí na parametrizacích  $\Phi_i$  z definice parametrizované plochy  $S$ . Jednoduchou modifikací důkazu Věty 6.24 dokážeme následující tvrzení.

**Věta 6.30:** Nechť  $S$  je parametrizovaná  $C^1$  plocha v  $\mathbb{R}^3$ , pro níž existuje oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  a  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  třídy  $C^1$  tak, že  $\Phi(\Omega) = S$ . Nechť je dále  $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$  oblast a  $\xi : \Lambda \rightarrow \Omega$  difeomorfismus. Potom pro  $\Psi := \Phi \circ \xi$  a libovolné integrabilní vektorové pole  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  platí:

$$\int_{\Omega} \left( F \circ \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) dudv = \omega \int_{\Lambda} \left( F \circ \Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) dsdt,$$

kde  $\omega := \text{sgn det } D\xi$  (z předpokladů plyne, že buď  $\text{det } D\xi > 0$ , nebo  $\text{det } D\xi < 0$  na celém  $\Lambda$ ).

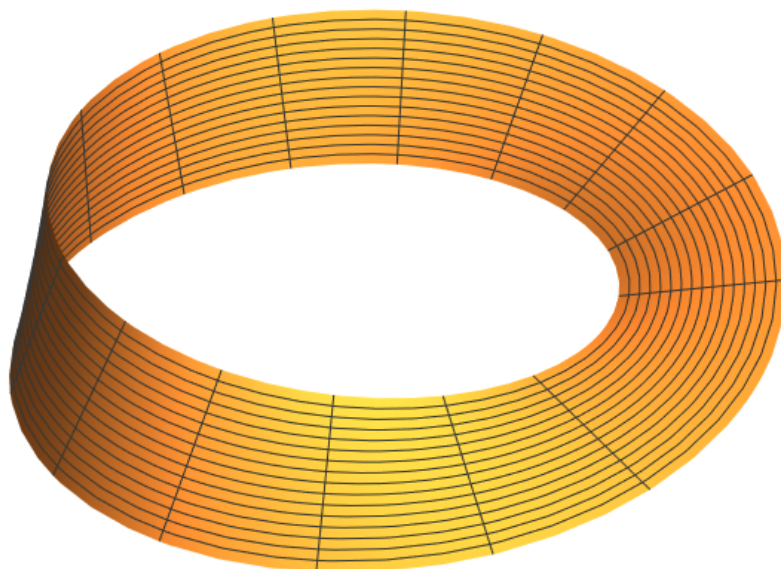
*Důkaz.* Postupuje se podobně jako v důkazu Věty 6.24. Detaily jsou přenechány čtenáři.  $\square$

V předchozí větě bychom mohli říct, že plošný integrál 2. druhu nezávisí na reparametrizaci realizované difeomorfismem  $\xi$  *zachovávajícím orientaci* plochy  $S$ , tj. takové, že  $\text{det } D\xi > 0$  na  $\Lambda$ . Naopak plošný integrál 2. druhu změni znaménko, pokud  $\xi$  *mění orientaci*  $S$ , tj.  $\text{det } D\xi < 0$  na  $\Lambda$  (např. prohození parametrů  $u$  a  $v$ ).

Samotný pojem *orientace* plochy jsme dosud nezavedli. V případě křivky je volba orientace volbou „kladného“ směru na křivce. V případě plochy je volba orientace označení „kladné“ strany plochy. V  $\mathbb{R}^3$  se orientace na ploše  $S$  zadává volbou spojitého normálového pole, tj. zadáním spojitého zobrazení  $n : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , které každému bodu plochy  $S$  přiřadí jednotkový normálový vektor k ploše  $S$  v tomto bodě (ze dvou možných). „Kladná“ strana  $S$  potom označuje stranu, ze které normálový vektor vychází. Spojitost zobrazení  $n$  je zde zásadní požadavek.

Zaručuje, že se normálový vektor  $n(x, y, z)$  mění spojitě s bodem  $(x, y, z)$  pohybujícím se spojitě po ploše  $S$  (náhle se nepřeklápí). Speciálně pohybuje-li se bod po uzavřené křivce na  $S$ , musí normálový vektor v počátečním bodě křivky přejít spojitě v normálový vektor v koncovém bodě.

Je důležité poznamenat, že spojitě normálové (jednotkové) pole nemusí na  $S$  vůbec existovat. O takové ploše říkáme, že není *orientovatelná*. Klasickým příkladem takové neorientovatelné plochy je *Möbiův list*, který lze zkonstruovat tak, že ustříháme delší proužek papíru, jeden konec otočíme o 180 stupňů a konce slepíme, viz Obr. 22. Zvolíme-li na středové kružnici v jednom bodě jednotkový normálový vektor a projdeme kružnicí jednou dokola do téhož bodu, normálový vektor se změní na opačný, mění-li se při procházení křivkou spojitě. Tedy na Möbiově listu nelze zadat spojitě normálové pole. Intuitivně chápeme, že nelze rozlišit strany Möbiova listu (jako kladnou a zápornou), protože Möbiův list má jen jednu stranu.



Obrázek 22: Möbiův list.

Všimněte si, že v integrálu (81), který byl motivací pro definici (82), jsme provedli konkrétní volbu normálového vektoru  $n$  určeného parametrizací plochy, ačkoliv jsme měli v každém bodě dvě možnosti. Jinými slovy v definici (82) jsme specifikovali orientaci na každé části  $S_i^{\circ S}$  plochy  $S$  volbou parametrizace  $\Phi_i$ . Není-li plocha  $S$  zadána konkrétní parametrizací, je třeba pro výpočet plošného integrálu 2. druhu orientaci na  $S$  zadat specifikací normálového pole na  $S$ , viz následující příklad.

**Příklad 6.31:** Spočítáme plošný integrál 2. druhu funkce  $F(x, y, z) := (x^2, yz, y)$  přes plášť kužele

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 \wedge 0 < z < 1\}$$

s orientací určenou normálovým vektorem, jehož směr míří *dovnitř* kužele.

Plochu  $S$  můžeme např. parametrizovat zobrazením

$$\Phi(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta, r),$$

kde  $r \in (0, 1)$  a  $\theta \in (-\pi, \pi]$ . Jeden normálový vektor v bodě  $\Phi(r, \theta)$  plochy  $S$  je

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = (\cos \theta, \sin \theta, 1) \times (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) = (-r \cos \theta, -r \sin \theta, r).$$

Tento vektor míří dovnitř kuželu pro každé  $r \in (0, 1)$  a  $\theta \in (-\pi, \pi]$ , což je vidět např. z toho, že jeho 3. složka ( $z = r$ ) je kladná. Zvolená parametrizace  $\Phi$  tedy zadává na  $S$  orientaci ze zadání úlohy. Dostáváme proto

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot d\mathbf{S} &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \left( F(\Phi(r, \theta)), \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) dr d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 ((r^2 \cos^2 \theta, r^2 \sin \theta, r \sin \theta), (-r \cos \theta, -r \sin \theta, r)) dr d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (-r^3 \cos^3 \theta - r^3 \sin^2 \theta + r^2 \sin \theta) dr d\theta = -\frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

kde hodnotu  $-\pi/4$  posledního integrálu najdeme snadno po krátkém výpočtu.

Rozhodnout, zda je daná plocha orientovatelná je obecně obtížný problém. My se touto otázkou více nebudeme zabývat. Poznamenejme, že častý způsob zadání orientace na orientovatelné ploše, která je hranicí kompaktní množiny  $R \subset \mathbb{R}^3$ , je volbou tzv. *vnější normály* k  $R$ , tedy spojitým polem normálových vektorů mířících *mimo* množinu  $R$ , viz popis před Větou 6.33.

**Poznámka:** Představuje-li vektorové pole  $F$  nějakou substanci v prostoru, např.  $F$  je rychlostní pole molekul tekutiny, je fyzikální význam integrálu  $\int_S (F, n) dS$  celkový *tok* substance plochou  $S$  z její negativní strany do pozitivní strany. Je proto přirozené, že tato veličina není závislá na parametrizaci  $S$  zachovávající orientaci a mění pouze znaménko při změně orientace. V tomto kontextu nemá definice plošného integrálu 2. druhu pro neorientovatelné plochy dobrý smysl, a proto ji někteří autoři ani nedefinují.

## 6.5 Gaussova věta

Naším cílem je dokázat větu, která je 3-dimenzionální analogií Greenovy věty. Před tím si ale ještě stručně shrneme tři používané derivace vektorové analýzy.

Připomeňme, že *gradient* diferencovatelné funkce  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $\Omega$  je otevřená množina, je vektorová funkce

$$\text{grad } f \equiv \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Označíme-li si formálně uspořádanou  $n$ -tici

$$\nabla := \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$

můžeme  $\nabla$  kombinovat se skalárním a vektorovým součinem (pro  $n = 3$ ) a definovat další dvě derivace vektorových polí  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  třídy  $C^1$ . Divergence vektorové funkce  $F \in C^1(\Omega)$  je skalární funkce na  $\Omega$  definována vztahem

$$\operatorname{div} F \equiv \nabla \cdot F := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n},$$

jejíž geometrický význam (nezávisící na souřadnicích) vyplyne později z Gaussovy věty. Nakonec ještě v případě, že  $n = 3$ , definujeme rotaci vektorové funkce  $F \in C^1(\Omega)$  jako vektorovou funkci

$$\operatorname{rot} F \equiv \nabla \times F := \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right),$$

jejíž geometrický význam vyjasní až Stokesova věta.

Shrneme několik užitečných identit pro gradient, divergenci a rotaci. Budeme používat značení  $\operatorname{div}$  a  $\operatorname{rot}$  pro divergenci a rotaci, protože identity jsou v této formě lépe čitelné, a  $\operatorname{grad}$  pro gradient, abychom zůstali konzistentní.

**Věta 6.32:** Nechť  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  a  $F, G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  jsou třídy  $C^1$  na otevřené množině  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Potom platí:

- 1)  $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f,$
- 2)  $\operatorname{grad}(F, G) = (F \cdot \nabla)G + F \times \operatorname{rot} G + (G \cdot \nabla)F + G \times \operatorname{rot} F, \quad (n = 3),$
- 3)  $\operatorname{rot}(fF) = f \operatorname{rot} F + (\operatorname{grad} f) \times F, \quad (n = 3),$
- 4)  $\operatorname{rot}(F \times G) = (G \cdot \nabla)F + (\operatorname{div} G)F - (F \cdot \nabla)G - (\operatorname{div} F)G, \quad (n = 3),$
- 5)  $\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + (\operatorname{grad} f, F),$
- 6)  $\operatorname{div}(F \times G) = (G, \operatorname{rot} F) - (F, \operatorname{rot} G), \quad (n = 3),$

kde

$$(F \cdot \nabla)G = \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial G_i}{\partial x_i}.$$

*Důkaz.* Ověření identit je přenecháno čtenáři jako Cvičení 6.7. □

Dvojici z operací  $\operatorname{grad}$ ,  $\operatorname{div}$  a  $\operatorname{rot}$  lze nakombinovat pěti různými způsoby:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} F, \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} f, \quad \operatorname{grad} \operatorname{div} F, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} F,$$

kde  $f$  a  $F$  jsou třídy  $C^2$ . První dvě kombinace jsou identicky nulové, tj.

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 \quad \text{a} \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$$

pro každé  $f \in C^2(\Omega)$  a  $F \in C^2(\Omega)$ , viz Cvičení 6.8. Třetí výraz, který má smysl pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$ , je tzv. *Laplacián* funkce  $f$ :

$$\Delta f \equiv \nabla^2 f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Laplacián hraje podstatnou úlohu v teorii harmonických funkcí a v matematické fyzice. Poslední dvě kombinace nejsou tak významné, ale dohromady dávají tzv. *vektorový Laplacián* funkce  $F$ :

$$\nabla^2 F := \operatorname{grad} \operatorname{div} F - \operatorname{rot} \operatorname{rot} F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3),$$

kde  $F \in C^2(\Omega)$ . Ověření poslední rovnosti je přenecháno čtenáři jako Cvičení 6.9.

Připomeňme, že Greenova věta 6.15 dávala do rovnosti integrál přes kompaktní množinu v  $\mathbb{R}^2$  na jedné straně a křivkový integrál 2. druhu přes hranici množiny na straně druhé. Podobně Gaussova věta srovnává (objemový) integrál přes kompaktní množinu  $R \subset \mathbb{R}^3$  s plošným integrálem 2. druhu přes její hranici. Budeme předpokládat, že  $\partial R$  je parametrizovaná po částech  $C^1$  plocha z Definice 6.18. O  $\partial R$  pak řekneme, že je orientovaná normálovým polem  $n$  daným *vnější* jednotkovou normálou k  $R$ , pokud existuje normálové pole  $n$  na  $\partial R = S_1 \cup \dots \cup S_k$  spojitě na  $S_i^{\circ\partial R}$  pro každé  $i \in \hat{k}$  a takové, že pro každé  $i \in \hat{k}$  a každé  $x \in S_i^{\circ\partial R}$  je  $n(x)$  jednotkový normálový vektor k  $S_i$ , který míří *vně*  $R$ , tj. pro všechna  $\epsilon > 0$  dostatečně malá je  $x + \epsilon n(x) \notin R$ .

*Gaussova věta* je též známá jako *Gaussova–Ostrogradského věta* nebo *Divergenční věta*. Z tradičních důvodů označíme Lebesgueovu míru na  $\mathbb{R}^3$  písmenem  $V$  (Volume = objem), tj. v Gaussově větě píšeme  $dV$  místo  $dm^3$ .

**Věta 6.33 (Gauss):** Nechť  $R \subset \mathbb{R}^3$  je kompaktní množina, jejíž hranice  $\partial R$  je parametrizovaná po částech  $C^1$  plocha orientovaná normálovým polem daným *vnější* jednotkovou normálou  $n$ . Dále nechť  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je třídy  $C^1$  na otevřené nadmnožině  $\Omega \supset R$ . Potom platí:

$$\int_{\partial R} (F, n) dS = \int_R \operatorname{div} F dV.$$

*Důkaz.* Podobně jako v případě Greenovy věty dokážeme Gaussovu větu jen pro speciální případ množin  $R$ , které jsou sjednocením konečně mnoha jednoduchých množin. I tento speciální případ je v mnoha aplikacích zcela dostačující. Důkaz obecného tvrzení, který využívá technický prostředek, tzv. rozklad jedničky, najde čtenář v dodatcích.

1) Předpokládejme nejprve, že  $R$  je *jednoduchá*, tj.

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y, z) \mid (x, y) \in W_1 \wedge \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\} \\ &= \{(x, y, z) \mid (x, z) \in W_2 \wedge \varphi_3(x, z) \leq y \leq \varphi_4(x, z)\} \\ &= \{(x, y, z) \mid (y, z) \in W_3 \wedge \varphi_5(y, z) \leq x \leq \varphi_6(y, z)\}, \end{aligned} \quad (83)$$

kde  $W_1, W_2, W_3 \subset \mathbb{R}^2$  jsou kompaktní množiny a funkce  $\varphi_i$ ,  $i \in \hat{6}$ , jsou třídy  $C^1$  na vnitřku odpovídající množiny  $W_1, W_2$ , nebo  $W_3$ . Zapišeme-li vektorové pole  $F = F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3$ , kde  $\{e_1, e_2, e_3\}$  je standardní báze  $\mathbb{R}^3$ , je jasné, že Gaussovu větu stačí dokázat pro jednotlivé komponenty:

$$\int_{\partial R} F_1 n_1 dS = \int_R \frac{\partial F_1}{\partial x} dV, \quad \int_{\partial R} F_2 n_2 dS = \int_R \frac{\partial F_2}{\partial y} dV \quad \text{a} \quad \int_{\partial R} F_3 n_3 dS = \int_R \frac{\partial F_3}{\partial z} dV.$$

Dokážeme pouze poslední rovnost a k tomu použijeme vyjádření (83), podle kterého je  $R$  množina mezi plochami, které jsou grafy funkcí  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$ . Zbývající dvě rovnosti se dokáží analogicky za použití zbylých dvou vyjádření jednoduché množiny  $R$ .

Z vyjádření (83) vyplývá, že hranice  $\partial R$  je plocha složená ze tří částí:

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{(x, y, \varphi_1(x, y)) \mid (x, y) \in W_1\}, & \text{ („dno“)} \\ S_2 &:= \{(x, y, \varphi_2(x, y)) \mid (x, y) \in W_1\}, & \text{ („vršek“)} \end{aligned}$$

a

$$S_3 := \{\lambda(x, y, \varphi_1(x, y)) + (1 - \lambda)(x, y, \varphi_2(x, y)) \mid \lambda \in [0, 1] \wedge (x, y) \in \partial W_1\}, \quad \text{ („plášť“).}$$

Plocha  $S_3$  je sjednocení vertikálních úseček spojujících body  $(x, y, \varphi_1(x, y))$  a  $(x, y, \varphi_2(x, y))$ , kde  $(x, y)$  prochází hranicí  $W_1$ . Normálový vektor  $n$  k ploše  $S_3$  je vodorovný, tj.  $n_3 = 0$ , a proto plocha  $S_3$  do plošného integrálu  $\int_{\partial R} F_3 n_3 dS$  nepřispívá. Tedy

$$\int_{\partial R} F_3 n_3 dS = \int_{S_1} F_3 n_3 dS + \int_{S_2} F_3 n_3 dS.$$

Normálový vektor k ploše  $S_2$ , který ještě nemusí být normalizovaný (označeno vlnkou), je

$$\tilde{n} = \left(1, 0, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, 1\right)$$

a míří **ven** z  $R$ . Jeho orientace tedy souhlasí se zadanou orientací na  $\partial R$ . Proto

$$\int_{S_2} F_3 n_3 dS = \int_{W_1} F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) dx dy.$$

Podobně zjistíme, že

$$\int_{S_1} F_3 n_3 dS = - \int_{W_1} F_3(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy.$$

Znaménko  $-$  je důsledkem toho, že normálový vektor  $\tilde{n} = (-\partial_x \varphi_1, -\partial_y \varphi_1, 1)$  míří z  $S_1$  **dovnitř** množiny  $R$ , a proto je vnější normálou k  $S_1$  vektor opačný, tj.  $-\tilde{n}$ .

Celkem tedy máme

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} F_3 n_3 dS &= \int_{W_1} F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) dx dy - \int_{W_1} F_3(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy \\ &= \int_{W_1} \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) dz dx dy = \int_R \frac{\partial F_3}{\partial z} dV, \end{aligned}$$

kde jsme v poslední rovnosti použili Fubiniho větu.

2) Platnost Gaussovy věty můžeme nyní rozšířit na množiny  $R$ , které lze rozložit na sjednocení konečného počtu jednoduchých množin  $R_1, \dots, R_k$ , které jsou buď disjunktní, nebo mají společnou část hranice. Zřejmě

$$\int_R \operatorname{div} F dV = \sum_{i=1}^k \int_{R_i} \operatorname{div} F dV.$$

Také

$$\int_{\partial R} (F, n) \, dS = \sum_{i=1}^k \int_{\partial R_i} (F, n) \, dS,$$

neboť integrály přes ty části hranic  $\partial R_i$ , které nejsou částí  $\partial R$ , jsou v sumě vždy dva s opačnou vnější normálou  $n$ , a proto se vzájemně odečtou. Argument je analogický jako v důkazu Greenovy věty 6.15.  $\square$

S pomocí Gaussovy věty můžeme interpretovat geometrický význam divergence vektorového pole třídy  $C^1$ . Nejprve si všimněte, že je-li  $u$  spojitá funkce na nějakém okolí bodu  $a \in \mathbb{R}^n$ , potom průměrná hodnota funkce  $u$  na kouli  $B_a(r)$  konverguje k  $u(a)$  pro  $r \rightarrow 0+$ , tj.

$$u(a) = \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{1}{m(B_a(r))} \int_{B_a(r)} u(x) \, dx,$$

neboť

$$\left| u(a) - \frac{1}{m(B_a(r))} \int_{B_a(r)} u(x) \, dx \right| \leq \frac{1}{m(B_a(r))} \int_{B_a(r)} |u(a) - u(x)| \, dx \leq \sup_{x \in B_r(a)} |u(a) - u(x)|,$$

kde pravá strana jde k nule s  $r \rightarrow 0+$  díky spojitosti funkce  $u$  v  $a$ . Aplikujeme-li toto pozorování na funkci  $\operatorname{div} F$ , kde  $F$  je vektorové pole třídy  $C^1$  na nějaké kouli  $B_a(r)$ , dostaneme

$$\operatorname{div} F(a) = \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{3}{4\pi r^3} \int_{B_a(r)} \operatorname{div} F \, dV,$$

protože  $m(B_a(r)) = 4\pi r^3/3$  v  $\mathbb{R}^3$ . Potom z Gaussovy věty vyplývá vztah

$$\operatorname{div} F(a) = \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{3}{4\pi r^3} \int_{S_a(r)} (F, n) \, dS, \quad (84)$$

kde  $S_a(r) := \partial B_a(r)$  a  $n$  jednotkový vnější normálový vektor ke sféře  $S_a(r)$ .

Integrál napravo v (84) představuje tok pole  $F$  sférou  $S_a(r)$  zevnitř (z  $B_a(r)$ ) směrem ven (do doplňku  $B_a(r)$ ). Reprezentuje-li  $F$  tok nějaké tekutiny v prostoru, integrál napravo v (84) představuje množství tekutiny, které vyteče z  $B_a(r)$ , mínus množství tekutiny, která do  $B_a(r)$  vtéká (za jednotku času). Tedy pokud  $\operatorname{div} F(a) > 0$ , znamená to, že pole z okolí  $a$  odtéká (např. v bodě  $a$  je nějaký zdroj, přítok, atp.), kdežto pokud  $\operatorname{div} F(a) < 0$  pole do okolí  $a$  vtéká (např. v bodě  $a$  je výpust'). Tento jev je ovšem jemný, neboť integrál v (84) je třeba vydělit  $r^3$ , aby byl v limitě  $r \rightarrow 0+$  nenulový. Každopádně vztah (84) ukazuje, že divergence je geometrická veličina nezávislá na volbě souřadnic.

Z mnoha užitečných důsledků Gaussovy uvedme alespoň tzv. *Greenovy identity*.

**Důsledek 6.34** (Greenovy identity): Nechť  $R \subset \mathbb{R}^3$  splňuje předpoklady Gaussovy věty 6.33 a  $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  jsou třídy  $C^2$  na otevřené množině  $\Omega \supset R$ , potom platí:

$$\int_{\partial R} f (\nabla g, n) \, dS = \int_R [f \Delta g + (\nabla f, \nabla g)] \, dV$$

a

$$\int_{\partial R} (f \nabla g - g \nabla f, n) \, dS = \int_R (f \Delta g - g \Delta f) \, dV.$$



*Důkaz.* Z identity 5) z Věty 6.32 plyne, že

$$\operatorname{div}(f\nabla g) = f \operatorname{div} \nabla g + (\nabla f, \nabla g) = f \Delta g + (\nabla f, \nabla g),$$

a proto první Greenovu identitu dostaneme aplikací Gaussovy věty na  $F := f\nabla g$ . Tato identita platí také, prohodíme-li  $f$  a  $g$ . Odečtením obou variant první identity dostaneme druhou Greenovu identitu.  $\square$

**Poznámka:** Všimněte si, že  $(\nabla f, n)$  je směrová derivace  $f$  v normálovém směru  $n$ , viz Věta 3.10, a proto se nazývá *vnější normálová derivace  $f$* .

## 6.6 Stokesova věta

Dokážeme si ještě jednu integrální větu, která je zobecněním Greenovy věty 6.15 v tom smyslu, že rovinnou oblast v  $\mathbb{R}^2$  nahrazuje zakřivenou plochou v  $\mathbb{R}^3$ . Nejprve si vymežíme plochy, pro které Stokesovu větu zformulujeme. Třída uvažovaných ploch není nejobecnější možná, ale pro potřeby většiny aplikací je dostačující. Obvyklý důkaz Stokesovy věty, která platí i pro obecnější třídu ploch než vymezuje Definice 6.18, využívá adaptace metody založené na rozkladu jedničky popsané v dodatcích.

Předpokládejme, že  $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$  je parametrizovaná po částech  $C^1$  plocha taková, že hranice každé části  $S_i$  v topologii  $S$ , ozn.  $\partial S_i$ , je po částech  $C^1$  ve stejném smyslu jako v Greenově větě 6.15 (tj. je konečné sjednocení stop po částech  $C^1$  Jordanových křivek). Budeme stručně psát  $\partial S_i$  a  $\partial S := \partial S_1 \cup \dots \cup \partial S_k$ , kde nezdůrazňuje, že hranice jsou uvažovány v topologii  $S$ , což musíme mít na paměti (uvědomte si, že plocha  $S$  má prázdný vnitřek v topologii  $\mathbb{R}^3$ , tudíž v topologii  $\mathbb{R}^3$  je  $S \subset \partial S$ ).

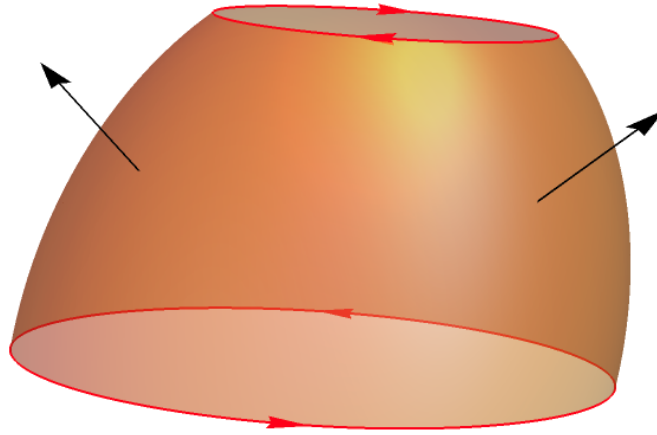
Dále předpokládejme, že každá část  $S_i$  je orientovatelná s orientací určenou daným spojitým polem  $n$  jednotkových normálových vektorů. Tato orientace na  $S_i$  indukuje tzv. *kompatibilní orientaci* na  $\partial S_i$  ve smyslu analogickém jako u Greenovy věty. Řečeno neformálně to znamená, že pokud kráčíte podél  $\partial S_i$  v pozitivním směru, máte kladnou stranu plochy  $S_i$ , tj. stranu  $S_i$ , z níž vektor  $n$  vychází, stále po *levé ruce*. Přesněji to lze vyjádřit tak, že tečný vektor  $T$  k  $\partial S_i$  v bodě  $x \in S_i$  je v souladu s orientací na  $\partial S_i$  („míří kladným směrem“), pokud vektor  $n \times T$  v bodě  $x$  *míří do  $S_i$* , což znamená, že polokoule  $B_x(\epsilon) \cap \{y \in \mathbb{R}^3 \mid (n \times T, y) > 0\}$  má neprázdný průnik s  $S_i$  pro každé  $\epsilon > 0$ , viz Obr. 23.

**Věta 6.35 (Stokes):** Nechť  $S$  a  $\partial S$  splňují předpoklady popsané výše a  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je třídy  $C^1$  na otevřené množině  $\Omega \supset S$ . Potom platí:

$$\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_S (\operatorname{rot} F, n) dS.$$

*Důkaz.* Podobně jako důkazy Vět 6.15 a 6.33 i důkaz Stokesovy věty provedeme za jistých dodatečných předpokladů, a tedy si ukážeme odvození jen jistého speciálnějšího tvrzení. Tento výsledek můžeme totiž poměrně jednoduše odvodit z Greenovy věty 6.15, musíme ovšem zajistit splnění jejich předpokladů.

Nechť  $S^{\circ S} = \Phi(\Omega)$ , kde parametrizace  $\Phi$  je  $C^1$  funkce na oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  a  $\bar{\Omega}$  je kompaktní množina. Navíc předpokládejme, že  $\Phi$  lze dodefinovat na nějakou otevřenou nadmnožinu  $\bar{\Omega}$



Obrázek 23: Orientovaná plocha (černé šipky) a kompatibilní orientace na hraničních křivkách (červené šipky).

jako zobrazení třídy  $C^1$  a  $\Phi(\partial\Omega) = \partial S$ . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že parametrizace  $\Phi$  určuje na  $S$  zadanou orientaci. V opačném případě bychom prohodily parametry, tzn. reparametrizovali plochu  $S$  tak, že bychom  $\Phi$  nahradili  $\Phi \circ \xi$ , kde  $\xi(u, v) = (v, u)$ . Idea důkazu je nyní použít parametrizaci  $\Phi$  k převedení integrace přes  $S$  a  $\partial S$  na integrace přes  $\Omega$  a aplikovat Greenovu větu.

Všimněte si, že napíšeme-li  $F = F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3$ , kde  $(e_1, e_2, e_3)$  je standardní báze  $\mathbb{R}^3$ , stačí Stokesovu větu dokázat zvlášť pro každé pole  $F_i e_i$ , kde  $i \in \hat{\mathbb{Z}}$ , a sečtením jednotlivých rovností dostaneme výslednou identitu pro  $F$ . Odvození je analogické pro všechny tři případy, a proto budeme dále uvažovat jen případ  $F = F_1 e_1 = (F_1, 0, 0)$ , pro který má Stokesova věta tvar

$$\int_{\partial S} F_1 e_1 \cdot ds = \int_S \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} e_2 - \frac{\partial F_1}{\partial y} e_3, n \right) dS.$$

Použijeme-li parametrizaci  $(x, y, z) = \Phi(u, v)$  plochy  $S$ , dostaneme pro pravou stranu

$$\begin{aligned} \int_S \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} e_2 - \frac{\partial F_1}{\partial y} e_3, n \right) dS &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} (\Phi(u, v)) e_2 - \frac{\partial F_1}{\partial y} (\Phi(u, v)) e_3, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) dudv \\ &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial z} (\Phi(u, v)) \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right| - \frac{\partial F_1}{\partial y} (\Phi(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \right] dudv. \end{aligned} \quad (85)$$

Označíme-li  $\phi : I \rightarrow \partial\Omega$  parametrizaci křivky  $\partial\Omega$ , najdeme pro levou stranu

$$\int_{\partial S} F_1 e_1 \cdot ds = \int_I F_1(\Phi(\phi(t))) \left[ \frac{\partial x}{\partial u} \phi'_1(t) + \frac{\partial x}{\partial v} \phi'_2(t) \right] dt = \int_{\partial\Omega} F_1(\Phi(u, v)) \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right) \cdot ds.$$

V posledním integrálu aplikujeme Greenovu větu a dostaneme

$$\int_{\partial\Omega} F_1 \circ \Phi(u, v) \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( F_1 \circ \Phi \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( F_1 \circ \Phi \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] dudv. \quad (86)$$

Derivujeme-li výrazy v integrandu posledního integrálu jako součin, dva sčítance obsahující smíšené derivace  $\partial^2 x / \partial u \partial v = \partial^2 x / \partial v \partial u$  se odečtou, a proto

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( F_1 \circ \Phi \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( F_1 \circ \Phi \frac{\partial x}{\partial u} \right) = \frac{\partial (F_1 \circ \Phi)}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial (F_1 \circ \Phi)}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}.$$

Dále aplikací řetězového pravidla zjistíme, že se pravá strana rovná

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right] \frac{\partial x}{\partial v} - \left[ \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right] \frac{\partial x}{\partial u} \\ = \frac{\partial F_1}{\partial z} \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right| - \frac{\partial F_1}{\partial y} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|. \end{aligned}$$

(Všechny parciální derivace  $F_1$  jsou vyhodnoceny v bodě  $\Phi(u, v)$ , nepíšeme to pro úsporu místa.) Zjistujeme tedy, že se integrály (85) a (86) rovnají, což jsme chtěli dokázat.

Dále opět analogicky jako v důkazech Greenovy a Gaussovy věty, můžeme rozšířit platnost Stokesovy věty na plochy  $S$ , které lze rozložit na konečně mnoho částí, které lze parametrizovat výše popsaným způsobem. Důkaz Stokesovy věty pro obecnější třídu ploch využívá techniku rozkladu jedničky.  $\square$

Je užitečné si uvědomit, že jedna uzavřená křivka v  $\mathbb{R}^3$  je hranicí nekonečně mnoha ploch v  $\mathbb{R}^3$ . Např. jednotková kružnice  $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1 \wedge z = 0\}$  je hranicí např. jednotkového kruhu  $S_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z = 0\}$ , hemisféry  $S_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge z \geq 0\}$ , části paraboloidu  $S_3 = \{(x, y, z) \mid z = 1 - x^2 - y^2 \leq 1 \wedge z \geq 0\}$ , atd. Podle Stokesovy věty 6.35 platí rovnost

$$\int_C F \cdot d\mathbf{s} = \int_S \text{rot } F \cdot d\mathbf{S}$$

pro **jakoukoliv** orientovatelnou plochu  $S$  ohraničenou křivkou  $C$  a pole  $F$  třídy  $C^1$  za předpokladu, že orientace na  $S$  a  $C$  jsou kompatibilní. To lze v některých případech vyžít ke zjednodušení výpočtů, jak ilustruje následující příklad.

**Příklad 6.36:** Uvažujme část paraboloidu  $S = \{(x, y, z) \mid z = 1 - x^2 - y^2 \leq 1 \wedge z \geq 0\}$  orientovaného normálou  $n$  mířící vně  $S$  (tj.  $n_3 > 0$ ) a vektorové pole

$$F(x, y, z) = (e^{xz} + e^{x+2y}, \ln(2 + y + z) + 2e^{x+2y}, 3xyz).$$

Spočítáme integrál  $\int_S (\text{rot } F, n) dS$ .

Přímý výpočet integrálu by byl komplikovaný. Podle Stokesovy věty je

$$\int_S (\text{rot } F, n) dS = \int_C F \cdot d\mathbf{s},$$

kde  $C$  je jednotková kružnice v rovině  $xy$ , což problém příliš nezjednoduší. Všimneme-li si ale, že 3. složka  $\operatorname{rot} F$  je nulová, můžeme uvažovat jednotkový kruh  $D = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ , jehož hranicí je také  $C$  a navíc jednotkový normálový vektor k  $D$  je  $n = (0, 0, 1)$  v každém bodě  $D$ . Potom totiž  $(\operatorname{rot} F, n) = 0$  a aplikujeme-li Stokesovu větu ještě jednou, zjistíme okamžitě, že

$$\int_S (\operatorname{rot} F, n) \, dS = \int_C F \cdot ds = \int_D (\operatorname{rot} F, n) \, dS = 0.$$

Podobně jako Gaussova věta umožňuje porozumět významu divergence, Stokesova věta nabízí interpretaci rotace a navíc její geometrickou charakterizaci nezávislou na volbě souřadnic. Buď  $F$  vektorové pole třídy  $C^1$  na okolí bodu  $a \in \mathbb{R}^3$ . Komponentu pole  $\operatorname{rot} F$  určeného zvoleným jednotkovým vektorem  $n$  v  $\mathbb{R}^3$ , tj.  $(\operatorname{rot} F, n)$ , můžeme vyjádřit následovně. Buď  $D_a(r)$  kruh se středem v  $a$  o poloměru  $r > 0$  v prostoru  $\mathbb{R}^3$  orientován tak, že  $n$  je jeho normálový vektor, tj. kruh  $D_a(r)$  je kolmý na  $n$ . Snadno se ověří, že

$$(\operatorname{rot} F(a), n) = \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{1}{\pi r^2} \int_{D_a(r)} (\operatorname{rot} F, n) \, dS,$$

tedy průměr  $(\operatorname{rot} F, n)$  na kruhu  $D_a(r)$  konverguje k hodnotě  $(\operatorname{rot} F, n)$  v bodě  $a$  pro  $r \rightarrow 0+$ . Aplikací Stokesovy věty zjistíme, že

$$(\operatorname{rot} F(a), n) = \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_a(r)} F \cdot ds, \quad (87)$$

kde  $C_a(r)$  je kružnice se středem v  $a$  a poloměrem  $r$  v rovině s normálou  $n$  orientovaná proti směru hodinových ručiček viděno z poloprostoru, do něhož vektor  $n$  míří (nakreslete si obrázek).

Vztah (87) určuje vektor  $\operatorname{rot} F(a)$  nezávisle na souřadnicích. Budeme-li  $F$  interpretovat jako silové pole, představuje křivkový integrál v limitě (87) celkovou práci, kterou pole  $F$  vykoná, aby částice oběhla po kružnici  $C_a(r)$ . Tedy číslo  $(\operatorname{rot} F(a), n)$  vyjadřuje tendenci silového pole  $F$  působit na částici, tak že rotuje kolem  $a$  v rovině s normálovým vektorem  $n$  proti směru hodinových ručiček, pokud  $(\operatorname{rot} F(a), n) > 0$ , a po směru hodinových ručiček, pokud  $(\operatorname{rot} F(a), n) < 0$  (viděno opět z poloprostoru, do něhož z  $a$  míří vektor  $n$ ). Je-li  $\operatorname{rot} F(a) = 0$ , nenutí pole částici v okolí bodu  $a$  rotovat. Proto se pole  $F$  nazývá *nevírové (irrotational)* v  $\Omega$ , je-li  $\operatorname{rot} F = 0$  na  $\Omega$ .

## 6.7 Konzervativní pole a Poincarého lemma \*

„Nepřednáší se ... snad někdy v budoucnu dopíšu.“

## 6.8 Cvičení

**Cvičení 6.1:** Dokažte, že délku elipsy  $\phi$  určené rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

s poloosami  $a > b > 0$  lze pomocí úplného eliptického integrálu 2. druhu (75), vyjádřit ve tvaru

$$\ell(\phi) = 4aE(k),$$

kde

$$k = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

je tzv. *excentricita* elipsy.

**Cvičení 6.2:** Spočítejte

$$\int_{\partial S} (-x^2y, xy^2) \cdot d\mathbf{s},$$

kde  $S$  je mezikruží  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ , dvěma způsoby: z definice a pomocí Greenovy věty.

**Cvičení 6.3:** Najděte pozitivně orientovanou Jordanovu křivku  $\phi$  tak, aby hodnota integrálu

$$\int_{\phi} (3x - x^3, y^3) \cdot d\mathbf{s}$$

byla maximální.

**Cvičení 6.4:** Pomocí Greenovy věty spočítejte plochu pod jedním obloukem cykloidy, viz Příklad 6.4.

**Cvičení 6.5** (Pappova věta): Dokažte, že obsah plochy  $S$ , která vznikne rotací jednoduché po částech  $C^1$  rovinné křivky kolem nějaké osy v  $\mathbb{R}^3$ , splňuje vztah

$$A(S) = 2\pi\ell d,$$

kde  $\ell$  je délka rotované křivky a  $d$  vzdálenost jejího těžiště od osy rotace.

**Cvičení 6.6:** Určete obsah:

a) úseku elipsoidu

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \wedge 0 \leq h_1 \leq z \leq h_2 \leq c \right\},$$

b) úseku jednodílného hyperboloidu

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \wedge 0 \leq h_1 \leq z \leq h_2 \right\},$$

c) úseku dvoudílného hyperboloidu

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \wedge c \leq h_1 \leq z \leq h_2 \right\}.$$

**Cvičení 6.7:** Dokažte identity z Věty 6.32.

**Cvičení 6.8:** Ověřte, že pro libovolné  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  a  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  třídy  $C^2$  na otevřené množině  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  platí:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 \quad \text{a} \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0.$$

**Cvičení 6.9:** Dokažte, že pro vektorovou funkci  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  třídy  $C^2$  na otevřené množině  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  platí:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} F - \operatorname{rot} \operatorname{rot} F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3).$$

**Cvičení 6.10:** Nechť  $R \subset \mathbb{R}^3$  je kompaktní množina, jejíž hranice  $\partial R$  je parametrizovaná po částech  $C^1$  plocha orientovaná vnější jednotkovou normálou  $n$ . Dokažte, že pro objem  $R$  platí:

$$m(R) = \frac{1}{3} \int_{\partial R} (F, n) \, dS,$$

kde  $F(x, y, z) = (x, y, z)$ . Existuje i jiné pole  $F$ , pro které to platí?

**Cvičení 6.11:** Nechť  $R \subset \mathbb{R}^3$  je jako v předešlém cvičení a  $f$  a  $g$  funkce třídy  $C^1$ . Ukažte, že platí následující varianta integrace *per partes* v  $\mathbb{R}^3$ :

$$\int_R f \frac{\partial g}{\partial x} \, dV = \int_{\partial R} f g n_1 \, dS - \int_R g \frac{\partial f}{\partial x} \, dV,$$

kde  $n_1$  je první komponenta normálového vektoru  $n = (n_1, n_2, n_3)$ . Samozřejmě platí i analogické varianty vzorce s parciálními derivacemi podle  $y$  a  $z$ .

