5 Teorie integrálu

V klasické teorii Riemannova integrálu na $\mathbb{R}$ je $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ limitou posloupnosti Riemannových součtů, což jsou vlastně integrály jednoduchých (schodovitých) funkcí, které aproximují f na $[a, b]$. Podobně i v obecném prostoru s mírou máme přirozeného kandidáta na integrál z jednoduché funkce (viz Definice 5.18) a tento integrál poté rozšíříme na obecnější funkce. V této kapitole takto vybudujeme abstraktní teorii integrace funkcí na obecných prostorech s mírou se speciálním důrazem na Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}$ a jeho zobecnění na $\mathbb{R}^n$.

5.1 Měřitelná funkce

Pojem měřitelnosti jsme doposud používali jen v souvislosti s množinami. Nyní ho rozšíříme na zobrazení mezi měřitelnými prostory.

Definice 5.1 (Měřitelné zobrazení)**:** Nechť $(X, \mathcal{M})$ a $(Y, \mathcal{N})$ jsou měřitelné prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ nazýváme $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-*měřitelné*, právě když

$$(\forall E \in \mathcal{N})(f^{-1}(E) \in \mathcal{M}).$$

Podle předchozí definice je tedy zobrazení měřitelné, právě když vzory měřitelných množin jsou měřitelné. Další tvrzení nám říká, že σ-algebru $\mathcal{N}$ lze v definici měřitelnosti zobrazení nahradit jejím libovolným generátorem.

Lemma 5.2: Nechť $(X, \mathcal{M})$ a $(Y, \mathcal{N})$ jsou měřitelné prostory, σ-algebra $\mathcal{N}$ je generována systémem $\mathcal{E} \subset 2^Y$ a $f : X \to Y$. Potom

$$f \text{ je } (\mathcal{M}, \mathcal{N})\text{-měřitelné} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall E \in \mathcal{E})(f^{-1}(E) \in \mathcal{M}).$$

Důkaz. Implikace ($\Rightarrow$) je triviální. K důkazu implikace ($\Leftarrow$) si stačí uvědomit, že systém $\{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$ je σ-algebra, která obsahuje $\mathcal{E}$, viz Cvičení 5.1. Potom podle Lemma 4.7 je $\mathcal{N} \subset \{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$, a tedy f je $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-měřitelné. □

Důsledek 5.3: Nechť (X, τ_X) a (Y, τ_Y) jsou topologické prostory. Je-li $f : X \to Y$ spojité, potom je $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$-měřitelné.

Důkaz. Připomeňme, že $f : X \to Y$ je spojité, právě když $(\forall E \in \tau_Y)(f^{-1}(E) \in \tau_X)$, viz Věta 2.61. Protože τ_Y generuje $\mathcal{B}_Y$ a $\tau_X \subset \mathcal{B}_X$, je tvrzení důsledkem Lemma 5.2. □

V případě funkcí s reálnými resp. komplexními hodnotami uvažujeme nejčastěji borelovské σ-algebry a používáme stručnější názvosloví.

Definice 5.4 (Měřitelná funkce, lebesgueovsky a borelovsky měřitelná funkce)**:** Nechť $(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor. Funkci $f : X \to \mathbb{R}$ resp. $f : X \to \mathbb{C}$ nazýváme $\mathcal{M}$-*měřitelná*, nebo jen *měřitelná*, právě když f je $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-měřitelná resp. $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-měřitelná. Speciálně funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nazýváme *lebesgueovsky* resp. *borelovsky měřitelná*, právě když f je $(\mathcal{L}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-měřitelná resp. $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-měřitelná a analogicky pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Poznámka: Zde se rozumí, že σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ je generovaná otevřenými podmnožinami $\mathbb{C}$. Obvyklá topologie na $\mathbb{C}$ je definována pomocí obvyklé topologie na $\mathbb{R}^2$ a přirozeného ztotožnění $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$, které je dané zobrazením $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 : z \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$. Neboli množina $A \subset \mathbb{C}$ je otevřená, právě když je $\phi(A) = \{(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \mid z \in A\} \subset \mathbb{R}^2$ otevřená v obvyklé topologii $\mathbb{R}^2$.

Je jednoduché si rozmyslet, že pokud jsou $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ a $\mathcal{O}$ σ-algebry na X, Y a Z, $f : X \to Y$ $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-měřitelné a $g : Y \to Z$ $(\mathcal{N}, \mathcal{O})$-měřitelné, potom také složení $g \circ f$ je $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$-měřitelné zobrazení. Ihned na tomto místě ale **upozorněme**, že jsou-li $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lebesgueovsky měřitelné funkce, jejich složení $f \circ g$ nemusí být lebesgueovsky měřitelná funkce, a to ani pokud je g spojitá. Skutečně pro $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ víme jen, že $f^{-1}(E) \in \mathcal{L}$, odtud ovšem neplyne, že $g^{-1}(f^{-1}(E)) \in \mathcal{L}$, není-li $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. K tomu bychom potřebovali silnější předpoklad borelovské měřitelnosti funkce f. Konkrétní příklad ilustrující tento fakt najde čtenář např. v [10, Sec. 2.1, Exer. 9].

Následující věta, jejíž důkaz je okamžitým důsledkem Věty 4.9 a Lemma 5.2, je užitečná.

Věta 5.5: Nechť $(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor a $f : X \to \mathbb{R}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. f je $\mathcal{M}$-měřitelná,
2. $(\forall a \in \mathbb{R})(f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{M})$,
3. $(\forall a \in \mathbb{R})(f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{M})$,
4. $(\forall a \in \mathbb{R})(f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{M})$,
5. $(\forall a \in \mathbb{R})(f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{M})$.

Někdy chceme vyjádřit měřitelnost funkce pouze na nějaké podmnožině X. Odpovídající pojem zavádí následující definice.

Definice 5.6 (Funkce měřitelná na množině)**:** Nechť $(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor a $E \in \mathcal{M}$. Funkci $f : X \to \mathbb{R}$ resp. $f \to \mathbb{C}$ nazýváme *$\mathcal{M}$-měřitelná na E*, nebo jen *měřitelná na E*, právě když $f^{-1}(B) \cap E \in \mathcal{M}$ pro všechny $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ resp. $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$.

Věta 5.7: Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $(X, \mathcal{M}), (Y_1, \mathcal{N}_1), \ldots, (Y_n, \mathcal{N}_n)$ jsou měřitelné prostory. Dále buďte $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n, \mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_n$ produktová σ-algebra na Y a $f : X \to Y$. Označme si komponenty $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Potom platí:

$$f \text{ je } (\mathcal{M}, \mathcal{N})\text{-měřitelné} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall i \in \hat{n})(f_i \text{ je } (\mathcal{M}, \mathcal{N}_i)\text{-měřitelné}).$$

Důkaz. Implikace $(\Rightarrow)$: Nechť f je $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-měřitelné a $i \in \hat{n}$. Zobrazení projekce na i-tou komponentu $\pi_i : Y \to Y_i : (y_1, \ldots, y_n) \mapsto y_i$ je $(\mathcal{N}, \mathcal{N}_i)$-měřitelné, neboť pro $E_i \in \mathcal{N}_i$ máme

$$\pi_i^{-1}(E_i) = Y_1 \times \cdots \times Y_{i-1} \times E_i \times Y_{i+1} \times \cdots \times Y_n \in \mathcal{N}.$$

Jelikož $f_i = \pi_i \circ f$, tedy f_i je složením $(\mathcal{N}, \mathcal{N}_i)$-měřitelného zobrazení π_i a $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-měřitelného zobrazení f, je f_i $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_i)$-měřitelné.

Implikace ($\Leftarrow$): Předpokládejme, že f_i jsou $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_i)$-měřitelná pro všechna $i \in \hat{n}$. Podle Lemma 4.11 je σ-algebra $\mathcal{N}$ generována systémem množin

$$\{Y_1 \times \ldots Y_{i-1} \times E_i \times Y_{i+1} \times \cdots \times Y_n \mid E_i \in \mathcal{N}_i, i \in \hat{n}\}.$$

A protože pro každé $i \in \hat{n}$ je

$$f^{-1}\left(Y_1 \times \ldots Y_{i-1} \times E_i \times Y_{i+1} \times \cdots \times Y_n\right) = f^{-1}\left(\pi_i^{-1}(E_i)\right) = f_i^{-1}(E_i) \in \mathcal{M},$$

vyplývá $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-měřitelnost zobrazení f z Lemma 5.2. □

Důsledek 5.8: Nechť $(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor. Potom funkce $f : X \to \mathbb{C}$ je měřitelná, právě když obě funkce $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : X \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné.

Důkaz. Z poznámky za Definicí 5.4 vyplývá, že $f : X \to \mathbb{C}$ je měřitelná, právě když funkce $(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f) : X \to \mathbb{R}^2$ je $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$-měřitelná, což podle Věty 5.7 nastává právě tehdy, když jsou $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : X \to \mathbb{R}$ měřitelné, neboť $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, viz Důsledek 4.14. □

V další části si ukážeme, že obvyklé algebraické a limitní operace zachovávají měřitelnost.

Věta 5.9: Nechť $(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor a $f, g : X \to \mathbb{C}$ měřitelné funkce. Potom

1. $f + g$ je měřitelná,
2. fg je měřitelná,
3. f/g je měřitelná za předpokladu, že $(\forall x \in X)(g(x) \neq 0)$.

Důkaz. 1. Definujme si pomocné funkce $F : X \to \mathbb{C}^2$ a $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ vztahy

$$F(x) = (f(x), g(x)) \quad \text{a} \quad \phi(z, w) = z + w.$$

Z měřitelnosti funkcí f a g a Věty 5.7 plyne, že funkce F je $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}^2})$-měřitelná, neboť platí $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^2} = \mathcal{B}_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$, viz Věta 4.13. Dále funkce ϕ je spojitá, a proto měřitelná podle Důsledku 5.3. Nyní si stačí uvědomit, že $f + g = \phi \circ F$ a využít již známého faktu, že složení měřitelných zobrazení je měřitelné.

2. Postupuje se zcela analogicky jako v bodě 1. jen s tím rozdílem, že pomocnou funkci $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definujeme vztahem $\phi(z, w) = zw$.

3. Protože už máme dokázaný bod 2., stačí ukázat, že je-li $g : X \to \mathbb{C}$ měřitelná funkce taková, že $(\forall x \in X)(g(x) \neq 0)$, potom je $1/g$ také měřitelná. K tomu si zaveďme pomocnou funkci $\psi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ vztahem $\psi(z) = 1/z$. Funkce $\psi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ je spojitá, a tudíž $(\mathcal{B}_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-měřitelná podle Důsledku 5.3. Dále g je $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}\setminus\{0\}})$-měřitelná, neboť $\mathcal{B}_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ a g je měřitelná. Tudíž i funkce $1/g = \psi \circ g$ je měřitelná. □

Někdy je výhodné pracovat s funkcemi, jejichž hodnoty mohou být i $\pm\infty$, tj. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, kde $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ je rozšířená reálná osa. Topologie na $\overline{\mathbb{R}}$ se zavádí přirozenou volbou lokální báze jako v Příkladu 2.51. Ekvivalentně je tato topologie na $\overline{\mathbb{R}}$ indukována metrikou

$$\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$$

pro $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, kde dodefinujeme $\operatorname{arctg}(\pm\infty) := \pm\pi/2$.

Borelovská σ-algebra $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ je v následujícím vztahu s $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$:

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{E \subset \overline{\mathbb{R}} \mid E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\};$$

ověřte jako Cvičení 5.2. Potom analogicky jako ve Větě 4.9 lze dokázat, že σ-algebra $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ je generována např. systémy polopřímek typu $(a, \infty]$ nebo $[-\infty, a)$, kde $a \in \mathbb{R}$, viz Cvičení 5.2. Pojem měřitelnosti funkce s hodnotami v $\overline{\mathbb{R}}$ přirozeně rozšiřujeme tak, že $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ nazveme *$\mathcal{M}$-měřitelná*, nebo jen *měřitelná*, pokud je $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$-měřitelná.

Při rozšiřování aritmetických operací plus a krát na $\overline{\mathbb{R}}$ je třeba dbát jisté opatrnosti. Existují dva typy výrazů, u nichž bychom mohli váhat, jak je rozumně definovat. První výraz definujeme

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := 0,$$

což může být na první pohled překvapivé, ale v teorii, kterou budujeme, je to vhodná volba. Na druhou stranu výrazy

$$\infty - \infty \quad \text{a} \quad -\infty + \infty$$

nedefinujeme (žádná volba není vhodná). Všechny ostatní kombinace jsou dodefinovány tak, jak bychom očekávali:

$$a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & \text{pro } a \in (0, \infty], \\ \mp\infty, & \text{pro } a \in [-\infty, 0), \end{cases}$$

$$a + \infty = \infty + a = \infty, \qquad \text{pro } a \in (-\infty, \infty],$$

$$a - \infty = -\infty + a = -\infty, \qquad \text{pro } a \in [-\infty, \infty).$$

Analogie Věty 5.9 pro funkce s hodnotami v $\overline{\mathbb{R}}$ je obsahem Cvičení 5.3.

Věta 5.10: Nechť $(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ měřitelná. Potom také funkce

$$g_1(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \qquad g_2(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

a

$$g_3(x) := \limsup_{n\to\infty} f_n(x), \qquad g_4(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

jsou měřitelné. Speciálně funkce $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ je měřitelná za předpokladu, že limita existuje pro každé $x \in X$.

Důkaz. 1. Funkce g_1: Podle Lemma 5.2 a Cvičení 5.2 stačí ukázat, že $g_1^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{M}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. K tomu si stačí uvědomit, že

$$g_1^{-1}((a, \infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((a, \infty]),$$

využít předpokladu měřitelnosti funkcí f_n a toho, že $\mathcal{M}$ je σ-algebra.

2. Funkce g_2: Postupuje se podobně jako v předchozím bodě, akorát tentokrát použijeme systém $\{[-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$, který také generuje $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$, neboť pro něj máme

$$g_2^{-1}\left([-\infty, a)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}\left([-\infty, a)\right).$$

3. Funkce g_3: Podle definice limes superior je

$$g_3(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{j\geq n} f_j(x).$$

Z již dokázaného bodu 1. plyne, že funkce $h_n := \sup_{j\geq n} f_j$ jsou měřitelné pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a dále z bodu 2. vyplývá měřitelnost funkce $g_3 = \inf_{n\in\mathbb{N}} h_n$.

4. Funkce g_4: Postupuje se analogicky jako v předchozím bodě, neboť

$$g_4(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{j\geq n} f_j(x).$$

□

Důsledek 5.11: Nechť $(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor a $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ měřitelné funkce. Potom také funkce $\max(f, g)$ a $\min(f, g)$ jsou měřitelné.

Důkaz. Stačí položit $f_1 := f$ a $f_n := g$ pro všechna $n \geq 2$ ve Větě 5.10. □

Důsledek 5.12: Nechť $(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n : X \to \mathbb{C}$, je posloupnost měřitelných funkcí takových, že limita $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existuje pro každé $x \in X$. Potom je f měřitelná.

Důkaz. Z předpokladu bodové konvergence $f_n \to f$ plyne, že $\operatorname{Re} f_n \to \operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f_n \to \operatorname{Im} f$. Funkce $\operatorname{Re} f_n$ a $\operatorname{Im} f_n$ jsou reálné, a proto můžeme aplikovat Větu 5.10, ze které vyplývá měřitelnost limitních funkcí $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$. Nyní podle Důsledku 5.8 je f měřitelná komplexní funkce. □

Pro pozdější účely si zavedeme *pozitivní* a *negativní část* funkce.

Definice 5.13 (Pozitivní a negativní část funkce)**:** Nechť $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Funkce $f^{\pm} : X \to [0, \infty]$ definované vztahy

$$f^+(x) := \max(f(x), 0) \quad \text{a} \quad f^-(x) := \max(-f(x), 0)$$

nazýváme *pozitivní* a *negativní část* funkce f.

Všimněte si, že

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^- \quad \text{a} \quad f^+ f^- = 0.$$

Dále podle Důsledku 5.11 jsou f^+ i f^- měřitelné, je-li f měřitelná.

Základním stavebním kamenem budované teorie integrálu jsou *jednoduché funkce.*

Definice 5.14 (Jednoduchá funkce)**:** Funkce $\phi : X \to \mathbb{C}$ s konečným oborem hodnot $\phi(X)$ se nazývá *jednoduchá.*

Je-li $\phi : X \to \mathbb{C}$ jednoduchá, potom existuje $n \in \mathbb{N}$ a navzájem různá čísla $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ taková, že $\phi(X) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a funkci ϕ lze zapsat ve tvaru

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}, \tag{47}$$

kde $E_i := \phi^{-1}(\{a_i\})$ a

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x \in E, \\ 0, & \text{je-li } x \notin E, \end{cases}$$

je *charakteristická funkce* množiny $E \subset X$. Reprezentaci (47) ve tvaru lineární kombinace charakteristických funkcí s komplexními koeficienty budeme nazývat *standardní reprezentace* ϕ. Všimněte si, že jednoduchou funkci lze zapsat jako lineární kombinaci charakteristických funkcí více způsoby, neboť $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ pro disjunktní množiny A, B. Ovšem standardní reprezentace jednoduché funkce je určena jednoznačně. Upozorněme také, že jednoduchá funkce nabývá jen konečných hodnot.

Zřejmě součet $\phi_1 + \phi_2$ i součin $\phi_1\phi_2$ jednoduchých funkcí ϕ_1 a ϕ_2 jsou opět jednoduché funkce. Dále je jasné, že je-li $(X, \mathcal{M})$ měřitelný prostor, je jednoduchá funkce $\phi : X \to \mathbb{C}$ měřitelná, právě když $(\forall i \in \hat{n})(E_i \in \mathcal{M})$, kde $E_i = \phi^{-1}(\{a_i\})$ jsou množiny ze standardní reprezentace (47) funkce ϕ (rozmyslete).

Nyní si ukážeme velmi důležitou vlastnost, že každou měřitelnou funkci lze zespodu aproximovat měřitelnými jednoduchými funkcemi.

Věta 5.15: Nechť $(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor.

1. Je-li $f : X \to [0, \infty]$ měřitelná, potom existuje posloupnost měřitelných jednoduchých funkcí $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že

$$0 \le \phi_1 \le \phi_2 \le \cdots \le f \quad \text{a} \quad \phi_n \to f.$$

Navíc $\phi_n \overset{B}{\rightrightarrows} f$ pro libovolnou množinu $B \subset X$, na níž je f omezená.

2. Je-li $f : X \to \mathbb{C}$ měřitelná, potom existuje posloupnost měřitelných jednoduchých funkcí $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že

$$0 \le |\phi_1| \le |\phi_2| \le \cdots \le |f| \quad \text{a} \quad \phi_n \to f.$$

Navíc $\phi_n \overset{B}{\rightrightarrows} f$ pro libovolnou množinu $B \subset X$, na níž je f omezená.

Důkaz. 1. Nechť $f : X \to [0, \infty]$ je měřitelná. Zafixujme $n \in \mathbb{N}_0$. Rozložíme $[0, \infty]$ na disjunktní množiny $[0, 2^{-n}]$, $(k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ pro $1 \le k \le 2^{2n} - 1$, $(2^n, \infty]$ a definujeme

$$\phi_n(x) := \begin{cases} 0, & f(x) \in [0, 2^{-n}] \\ k2^{-n}, & f(x) \in (k2^{-n}, (k+1)2^{-n}], \text{ kde } 1 \le k \le 2^{2n} - 1, \\ 2^n, & f(x) \in (2^n, \infty], \end{cases}$$

viz Obrázek 14. Ekvivalentně lze definici ϕ_n vyjádřit ve tvaru

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_n^k} + 2^n \chi_{F_n},$$

kde

$$\begin{aligned} E_n^0 &:= f^{-1}\left([0, 2^{-n}]\right), \\ E_n^k &:= f^{-1}\left((k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]\right), \quad 1 \le k \le 2^{2n} - 1, \\ F_n &:= f^{-1}\left((2^n, \infty]\right). \end{aligned}$$

Zřejmě ϕ_n je jednoduchá a měřitelná funkce, neboť z měřitelnosti f vyplývá, že $E_n^k \in \mathcal{M}$ pro každé $0 \le k \le 2^{2n} - 1$ a také $F_n \in \mathcal{M}$. Dále z definice ϕ_n vyplývá, že $0 \le \phi_n \le \phi_{n+1}$ a $\phi_n \le f$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $0 \le f - \phi_n \le 2^{-n}$ na množině $X \setminus F_n$, tj. tam, kde $f \le 2^n$. Z toho plyne, že $\phi_n(x) \to f(x)$ pro každé $x \in X$, pro které je $f(x) < \infty$. Je-li $f(x) = \infty$, potom $x \in F_n$, a proto $\phi_n(x) = 2^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy i v tomto případě $\phi_n(x) \to f(x) = \infty$. Celkem vidíme, že $\phi_n \to f$ na X.

Je-li $B \subset X$ množina, na níž je f omezená, tj. $\sup_{x \in B} f(x) < \infty$, potom $(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)(\forall n \ge n_0)(B \subset X \setminus F_n)$, a proto

$$\sup_{x \in B} |f(x) - \phi_n(x)| \le 2^{-n}$$

pro všechna $n \ge n_0$. Z toho plyne, že $\phi_n \overset{B}{\rightrightarrows} f$.

2. Nechť $f : X \to \mathbb{C}$ je měřitelná. Potom f můžeme rozložit

$$f = \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \operatorname{Im} f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + \mathrm{i}(\operatorname{Im} f)^+ - \mathrm{i}(\operatorname{Im} f)^-,$$

kde $(\operatorname{Re} f)^\pm$ a $(\operatorname{Im} f)^\pm$ jsou pozitivní a negativní části funkcí $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$. Podle Důsledků 5.8 a 5.11 jsou $(\operatorname{Re} f)^\pm$ a $(\operatorname{Im} f)^\pm$ měřitelné funkce s hodnotami v $[0, \infty)$. Můžeme na ně tedy aplikovat stejný postup jako v důkazu 1. tvrzení a dostaneme nezáporné měřitelné jednoduché funkce $\phi_n^{(\pm)}$ a $\psi_n^{(\pm)}$, které zespodu aproximují funkce $(\operatorname{Re} f)^\pm$ a $(\operatorname{Im} f)^\pm$.

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

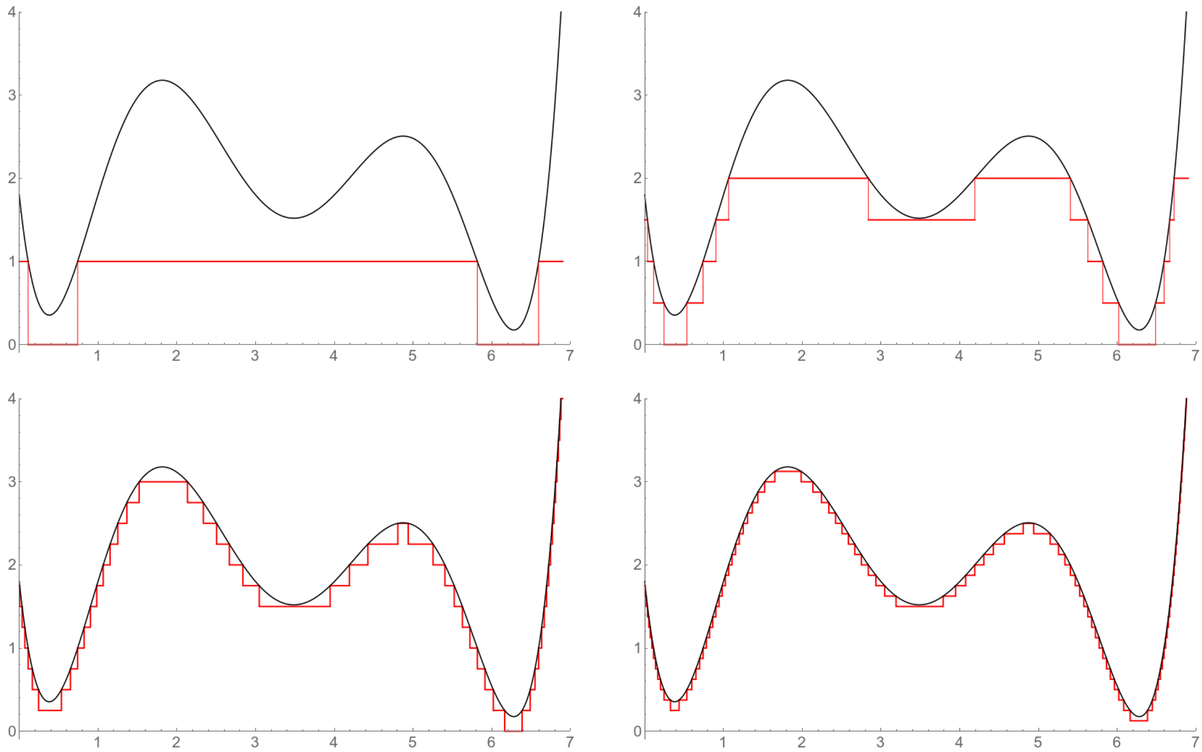
$$\phi_n := \phi_n^{(+)} - \phi_n^{(-)} + \mathrm{i}\left(\psi_n^{(+)} - \psi_n^{(-)}\right).$$

Funkce ϕ_n jsou jednoduché a měřitelné podle Věty 5.9. Protože $\phi_n^{(\pm)} \to (\operatorname{Re} f)^\pm$ a $\psi_n^{(\pm)} \to (\operatorname{Im} f)^\pm$, také $\phi_n \to f$. Je-li f omezená na $B \subset X$, jsou také $(\operatorname{Re} f)^\pm$ a $(\operatorname{Im} f)^\pm$ omezené na B, a tudíž $\phi_n \overset{B}{\rightrightarrows} f$, neboť $\phi_n^{(\pm)} \overset{B}{\rightrightarrows} (\operatorname{Re} f)^\pm$ a $\psi_n^{(\pm)} \overset{B}{\rightrightarrows} (\operatorname{Im} f)^\pm$.

Nakonec jelikož $0 \le \phi_n^{(\pm)} \le (\operatorname{Re} f)^\pm$ a $(\operatorname{Re} f)^+(\operatorname{Re} f)^- = 0$, máme také $\phi_n^{(+)}\phi_n^{(-)} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Analogicky $\psi_n^{(+)}\psi_n^{(-)} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Odtud dostaneme

$$\begin{aligned} |\phi_n|^2 &= \left(\phi_n^{(+)} - \phi_n^{(-)}\right)^2 + \left(\psi_n^{(+)} - \psi_n^{(-)}\right)^2 = \left(\phi_n^{(+)}\right)^2 + \left(\phi_n^{(-)}\right)^2 + \left(\psi_n^{(+)}\right)^2 + \left(\psi_n^{(-)}\right)^2 \\ &\le \left((\operatorname{Re} f)^+\right)^2 + \left((\operatorname{Re} f)^-\right)^2 + \left((\operatorname{Im} f)^+\right)^2 + \left((\operatorname{Im} f)^-\right)^2 \\ &= \left((\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^-\right)^2 + \left((\operatorname{Im} f)^+ - (\operatorname{Im} f)^-\right)^2 = (\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2 = |f|^2 \end{aligned}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Analogicky se také ověří nerovnost $|\phi_n| \le |\phi_{n+1}|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. $\square$



Obrázek 14: Jednoduché funkce ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 a ϕ_3 (červeně) z důkazu Věty 5.15 aproximující funkci f (černě).

Je-li na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{M})$ dána míra μ, je často výhodné při práci s měřitelnými funkcemi „ignorovat“ chování těchto funkcí na μ-nulových množinách. Avšak při modifikaci funkce na μ-nulové množině se obecně nezachovává její měřitelnost. Podobný problém nastává pro limitní funkci μ-s.v. konvergentní posloupnosti měřitelných funkcí. Pokud je navíc μ úplná míra, měřitelnost se zachovává, jak ukazuje další věta. Nicméně uvažovat pouze úplné míry, by bylo dosti omezující, proto tento problém později odstraníme tak, že rozšíříme samotnou definici měřitelnosti funkce (viz Definice 5.40 a Věta 5.42).

Věta 5.16: Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je prostor s ***úplnou*** mírou μ.

1. Je-li f měřitelná funkce na X a $g = f$ μ-s.v. na X, potom je g také měřitelná.

2. Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost měřitelných funkcí na X a $f_n \to f$ μ-s.v., potom je f měřitelná.

Důkaz. 1. Rovnost $f(x) = g(x)$ pro μ-s.v. $x \in X$ znamená, že existuje μ-nulová množina $N \in \mathcal{M}$ taková, že

$$(\forall x \in X \setminus N)(f(x) = g(x)).$$

Buď B borelovská podmnožina z $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ resp. $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ v závislosti na tom, zda $f, g : X \to \mathbb{C}$, resp. $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$; věta platí pro obě možnosti. Potom

$$g^{-1}(B) = \left(g^{-1}(B) \setminus N\right) \cup \left(g^{-1}(B) \cap N\right) = \left(f^{-1}(B) \setminus N\right) \cup \left(g^{-1}(B) \cap N\right).$$

Z měřitelnosti f plyne, že $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$, a tudíž také $f^{-1}(B) \setminus N \in \mathcal{M}$. Dále protože $g^{-1}(B) \cap N \subset N$ a $\mu(N) = 0$, je $g^{-1}(B) \cap N \in \mathcal{M}$ (a také μ-nulová) z úplnosti míry μ na $\mathcal{M}$. Odtud vyvodíme, že $g^{-1}(B) \in \mathcal{M}$, a tedy g je měřitelná.

2. Podle předpokladu existuje μ-nulová množina $N \in \mathcal{M}$ taková, že

$$(\forall x \in X \setminus N)(f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)).$$

Předefinujme f_n na množině N následovně:

$$\tilde{f}_n(x) := \begin{cases} f_n(x), & x \in X \setminus N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

Potom $\tilde{f}_n = f_n$ μ-s.v., a proto jsou funkce $\tilde{f}_n$ měřitelné pro každé $n \in \mathbb{N}$ podle již dokázaného bodu 1. Dále posloupnost funkcí $\{\tilde{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na celém X k funkci

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in X \setminus N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

Podle Důsledku 5.12 je $\tilde{f}$ měřitelná, a protože $\tilde{f} = f$ μ-s.v., je také f měřitelná opět podle bodu 1. □

Věta 5.17: Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je prostor s mírou a $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ jeho zúplnění (viz Věta 4.30). Je-li f $\overline{\mathcal{M}}$-měřitelná funkce na X, potom existuje $\mathcal{M}$-měřitelná funkce g taková, že $f = g$ $\overline{\mu}$-skoro všude.

Důkaz. Důkaz provedeme ve třech krocích nejprve pro případ, že f je charakteristická, pak jednoduchá a nakonec obecná měřitelná funkce.

Je-li f charakteristická $\overline{\mathcal{M}}$-měřitelná funkce, tj. $f = \chi_E$ pro $E \in \overline{\mathcal{M}}$, plyne z definice zúplnění míry, viz Věta 4.30, že existují $F \subset N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$ a $E \setminus F \in \mathcal{M}$. Proto položíme-li $g := \chi_{E\setminus F}$, je $f = g$ všude mimo množinu F, která je $\overline{\mu}$-nulová.

Ověření, že tvrzení platí i pro jednoduchou $\overline{\mathcal{M}}$-měřitelnou funkci f, je přímočaré a je přenecháno čtenáři.

Nakonec předpokládejme, že f je obecná $\overline{\mathcal{M}}$-měřitelná funkce. Podle Věty 5.15 existují jednoduché $\overline{\mathcal{M}}$-měřitelné funkce ϕ_n takové, že $\phi_n \to f$ na X. Podle předchozí části důkazu existují $\mathcal{M}$-měřitelné funkce ψ_n takové, že $\psi_n = \phi_n$ $\overline{\mu}$-s.v. pro každé $n \in \mathbb{N}$. Označme $E_n \in \overline{\mathcal{M}}$ $\overline{\mu}$-nulové množiny, pro které platí, že $(\forall x \in X \setminus E_n)(\phi_n(x) = \psi_n(x))$. Podle Věty 4.26 je

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0,$$

a proto z definice zúplnění existuje μ-nulová množina $N \in \mathcal{M}$ taková, že

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset N.$$

Nyní stačí položit $g := \lim_{n\to\infty} \chi_{X\setminus N}\psi_n$. Potom g je $\mathcal{M}$-měřitelná podle Důsledku 5.12. Navíc $g = f$ všude mimo množinu N, tedy $\overline{\mu}$-skoro všude. □

5.2 Integrace nezáporných funkcí

V této části zavedeme integrál z **nezáporných** měřitelných funkcí vzhledem k míře μ v daném prostoru s mírou $(X, \mathcal{M}, \mu)$. K tomuto účelu si označíme

$$\mathscr{L}_+ = \mathscr{L}_+(X, \mathcal{M}) := \{ f : X \to [0, \infty] \mid f \text{ měřitelná } \}.$$

Nejprve definujeme integrál jednoduché nezáporné měřitelné funkce.

Definice 5.18 (Integrál jednoduché funkce)**:** Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je prostor s mírou a $\phi \in \mathscr{L}_+$ je jednoduchá funkce se standardní reprezentací

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i},$$

viz (47). Potom definujeme *integrál funkce ϕ vzhledem k μ* vztahem

$$\int \phi \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i).$$

Nemůže-li dojít k nejasnostem, budeme stručně psát $\int \phi$ místo $\int \phi \, \mathrm{d}\mu$. Dále podle potřeby budeme používat také značení:

$$\int_X \phi \, \mathrm{d}\mu = \int \phi(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \phi(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int \phi \, \mathrm{d}\mu.$$

Připomeňme, že v definici $\int \phi$ používáme konvenci $0 \cdot \infty = 0$. Všimněte si, že $\int \phi$ může být ∞. Je-li $A \in \mathcal{M}$ a $\phi \in \mathscr{L}_+$ jednoduchá, potom je také $\chi_A \phi \in \mathscr{L}_+$ jednoduchá a je přirozené definovat *integrál z jednoduché funkce na množině A* následujícím způsobem.

Definice 5.19 (Integrál jednoduché funkce na množině)**:** Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je prostor s mírou, $A \in \mathcal{M}$ a $\phi \in \mathscr{L}_+$ je jednoduchá funkce. Potom *integrál funkce ϕ vzhledem k μ na množině A* definujeme vztahem

$$\int_A \phi \, \mathrm{d}\mu := \int \chi_A \phi \, \mathrm{d}\mu$$

a podle potřeby používáme jedno z následujících značení:

$$\int_A \phi = \int_A \phi(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_A \phi \, \mathrm{d}\mu.$$

Pro určitost jsme v definici integrálu jednoduché funkce $\phi \in \mathscr{L}_+$ použili její standardní reprezentaci. Dále si ukážeme, že vzorec z definice integrálu vlastně nezávisí na tom, jakým způsobem je ϕ vyjádřena jako lineární kombinace charakteristických funkcí s nezápornými koeficienty a měřitelnými množinami.

Lemma 5.20: Nechť $\phi = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{F_j}$, kde $F_1, \ldots, F_m \in \mathcal{M}$ a $b_1, \ldots, b_m \geq 0$. Potom

$$\int \phi \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(F_j).$$

Důkaz. V důkazu ověříme, že pokud

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{F_j}, \tag{48}$$

kde $E_1, \dots, E_n, F_1, \dots, F_m \in \mathcal{M}$ a $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \geq 0$, potom

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(F_j),$$

z čehož vyplývá tvrzení lemma.

Množiny $E_1, \dots, E_n, F_1, \dots, F_m$ rozkládají X na 2^{m+n} po dvou disjunktních podmnožin, z nichž každá vznikne jako průnik některých množin z $E_1, \dots, E_n, F_1, \dots, F_m$ s doplňky těch zbývajících. Vynecháme-li prázdné množiny, dostaneme takto $k \leq 2^{m+n}$ po dvou disjunktních množin $A_1, \dots, A_k$ takových, že $A_1 \cup \dots \cup A_k = X$. Potom

$$(\forall i \in \hat{n})(\exists I_i \subset \hat{k}) \left(E_i = \bigcup_{r \in I_i} A_r \right)$$

a podobně

$$(\forall j \in \hat{m})(\exists J_j \subset \hat{k}) \left(F_j = \bigcup_{r \in J_j} A_r \right).$$

Jelikož jsou množiny $A_1, \dots, A_k$ po dvou disjunktní a také měřitelné, plyne z aditivity μ, že

$$\mu(E_i) = \sum_{r \in I_i} \mu(A_r) \quad \text{a} \quad \mu(F_j) = \sum_{r \in J_j} \mu(A_r)$$

pro všechna $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$.

Zafixujme index $r \in \hat{k}$. Potom pro libovolné $i \in \hat{n}$ je bod $x \in E_i$, právě když $r \in I_i$. To lze ekvivalentně vyjádřit tak, že

$$(\forall i \in \hat{n})(\forall x \in X)(\chi_{E_i}(x) = \chi_{I_i}(r))$$

a podobně

$$(\forall j \in \hat{m})(\forall x \in X)(\chi_{F_j}(x) = \chi_{J_j}(r)).$$

Nyní můžeme předpoklad (48) zapsat jako rovnost

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{I_i}(r) = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{J_j}(r),$$

kterou když vynásobíme $\mu(A_r)$ a následně sečteme přes všechna $r \in \hat{k}$, dostaneme rovnost

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{r=1}^{k} \mu(A_k) \chi_{I_i}(r) = \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{r=1}^{k} \mu(A_k) \chi_{J_j}(r).$$

Nakonec si stačí uvědomit, že

$$\sum_{r=1}^{k}\mu(A_k)\chi_{I_i}(r)=\sum_{r\in I_i}\mu(A_r)=\mu(E_i)$$

a podobně

$$\sum_{r=1}^{k}\mu(A_k)\chi_{J_j}(r)=\sum_{r\in J_j}\mu(A_r)=\mu(F_j)$$

a důkaz je dokončen. □

Další věta shrnuje základní vlastnosti integrálu jednoduchých funkcí.

Věta 5.21: Nechť $(X,\mathcal{M},\mu)$ je prostor s mírou a $\phi,\psi\in\mathscr{L}_+$ jednoduché funkce. Potom platí:

1. Je-li $a\geq 0$, potom $\int a\phi = a\int\phi$.
2. $\int(\phi+\psi)=\int\phi+\int\psi$.
3. Je-li $\phi\leq\psi$, potom $\int\phi\leq\int\psi$.
4. Zobrazení $\mu_\phi:\mathcal{M}\to[0,\infty]$ definované vztahem

$$\mu_\phi(A):=\int_A\phi\,\mathrm{d}\mu$$

je míra na $\mathcal{M}$.

Důkaz. 1. Plyne okamžitě z definice.

2. Nechť

$$\phi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}\quad\text{a}\quad\psi=\sum_{j=1}^{m}b_j\chi_{F_j}$$

jsou standardní reprezentace ϕ a ψ. Protože množiny $E_1,\ldots E_n$ jsou po dvou disjunktní a $X=\cup_{i=1}^{n}E_i$ a podobně množiny $F_1,\ldots F_m$. Z toho plyne, že

$$(\forall i\in\hat{n})\left(E_i=\bigcup_{j=1}^{m}(E_i\cap F_j)\right),\quad(\forall j\in\hat{m})\left(F_j=\bigcup_{i=1}^{n}(E_i\cap F_j)\right)$$

a

$$(\forall i\in\hat{n})\left(\chi_{E_i}=\sum_{j=1}^{m}\chi_{E_i\cap F_j}\right),\quad(\forall j\in\hat{m})\left(\chi_{F_j}=\sum_{i=1}^{n}\chi_{E_i\cap F_j}\right).$$

Potom

$$\phi+\psi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}+\sum_{j=1}^{m}b_j\chi_{F_j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_i\chi_{E_i\cap F_j}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_j\chi_{E_i\cap F_j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i+b_j)\chi_{E_i\cap F_j},$$

a tedy

$$\int(\phi+\psi)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i+b_j)\mu\left(E_i\cap F_j\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{m}\mu\left(E_i\cap F_j\right)+\sum_{j=1}^{m}b_j\sum_{i=1}^{n}\mu\left(E_i\cap F_j\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(E_i)+\sum_{j=1}^{m}b_j\mu(F_j)=\int\phi+\int\psi$$

z aditivity míry μ.

3. Ještě jednou využijeme reprezentací funkcí ϕ a ψ ve tvaru

$$\phi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_i\chi_{E_i\cap F_j}\qquad\text{a}\qquad\psi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_j\chi_{E_i\cap F_j}$$

jako v důkazu bodu 2. Z předpokladu $\phi\leq\psi$ plyne, že $a_i\leq b_j$, kdykoliv je $E_i\cap F_j\neq\emptyset$. Odtud plyne

$$\int\phi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_i\mu(E_i\cap F_j)\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_j\mu(E_i\cap F_j)=\int\psi.$$

4. Zřejmě

$$\mu_\phi(\emptyset)=\int_\emptyset\phi\,\mathrm{d}\mu=\int 0\,\mathrm{d}\mu=0.$$

Dále nechť je $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{M}$ a $\phi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}$. Potom pro $A:=\cup_{k=1}^{\infty}A_k$ dostaneme ze σ-aditivity μ rovnost

$$\mu_\phi(A)=\int_A\phi\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(A\cap E_i)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(A_k\cap E_i)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}\phi\,\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_\phi(A_k),$$

a tedy μ_ϕ je σ-aditivní. □

Nyní si rozšíříme definici integrálu na libovolnou nezápornou měřitelnou funkci.

Definice 5.22 (Integrál nezáporné funkce)**:** Nechť $(X,\mathcal{M},\mu)$ je prostor s mírou a $f\in\mathscr{L}_+$. *Integrál funkce f vzhledem k μ* definujeme vztahem

$$\int f\mathrm{d}\mu:=\sup\left\{\int\phi\,\mathrm{d}\mu\;\middle|\;\phi\in\mathscr{L}_+\text{ je jednoduchá a }\phi\leq f\right\}.$$

Podobně pro $A\in\mathcal{M}$ definujeme *integrál f vzhledem k μ na množině A* vztahem

$$\int_A f\mathrm{d}\mu:=\sup\left\{\int_A\phi\,\mathrm{d}\mu\;\middle|\;\phi\in\mathscr{L}_+\text{ je jednoduchá a }\phi\leq f\right\}.$$

Poznámka: Všimněte si, nyní máme dvě definice integrálu pro nezáporné jednoduché funkce, avšak nejsou v rozporu. Hodnota $\int f$ pro jednoduchou funkci f je stejná v Definici 5.22 jako v Definici 5.18, neboť funkce f je jednou z funkcí v supremu z Definice 5.22.

Příklad 5.23: Uvažujme $x_0 \in \mathbb{R}$ a $\mu = \delta_{x_0}$ Diracovu delta míru na $\mathbb{R}$, tzn., že $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = 2^{\mathbb{R}}$ a pro každé $E \subset \mathbb{R}$ máme

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x_0 \in E, \\ 0, & \text{je-li } x_0 \notin E. \end{cases}$$

Není těžké si rozmyslet, že z Definic 5.18, 5.22 a Věty 5.15 plyne, že pro každé $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ platí:

$$\int f \mathrm{d}\delta_{x_0} = f(x_0).$$

Z Definice 5.22 a Věty 5.21 jednoduše plyne, že pro $f, g \in \mathscr{L}_+$, $f \leq g$, platí

$$\int f \leq \int g.$$

Podobně pro libovolné $f \in \mathscr{L}_+$ a $c \geq 0$ je $cf \in \mathscr{L}_+$ a platí

$$\int cf = c \int f.$$

Nyní si můžeme ukázat první ze tří fundamentálních limitních vět teorie integrálu - tzv. *Větu o monotónní konvergenci* známou také jako *Léviho větu.* Předpoklad, že **je dán prostor s mírou** $(X, \mathcal{M}, \mu)$, bude platit pro každou z následujících vět, aniž bychom to explicitně v každé větě zmiňovali.

Věta 5.24 (O monotónní konvergenci)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí z $\mathscr{L}_+$ taková, že $f_n \leq f_{n+1}$ pro každé n. Potom funkce $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ $(= \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n)$ je z $\mathscr{L}_+$ a platí:

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Jelikož je posloupnost $\{\int f_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající, $\lim_{n\to\infty} \int f_n$ existuje v $[0, \infty]$. Dále z předpokladů a Věty 5.10 plyne, že $f \in \mathscr{L}_+$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n \leq f$. Odtud máme

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \leq \int f \mathrm{d}\mu.$$

Stačí tedy dokázat opačnou nerovnost.

Zvolme pevně $\alpha \in (0, 1)$ a jednoduchou funkci $\phi \in \mathscr{L}_+$ takovou, že $\phi \leq f$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme množiny

$$E_n := \{x \in X \mid f_n(x) \geq \alpha\phi(x)\}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $E_n \in \mathcal{M}$, protože $E_n = (f_n - \alpha\phi)^{-1}([0, \infty])$ a $f_n - \alpha\phi$ je měřitelná funkce. Navíc platí $E_n \subset E_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Dále

$$\int f_n \mathrm{d}\mu \geq \int \chi_{E_n} f_n \mathrm{d}\mu = \int_{E_n} f_n \mathrm{d}\mu \geq \alpha \int_{E_n} \phi \, \mathrm{d}\mu \tag{49}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. S využitím 4. tvrzení Věty 5.21 a spojitosti míry μ_ϕ zdola, viz Věta 4.24, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \phi \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_\phi(E_n) = \mu_\phi(X) = \int \phi \, d\mu.$$

Proto limitním přechodem $n \to \infty$ v nerovnosti (49) dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \alpha \int \phi \, d\mu.$$

Tato nerovnost platí pro každé $\alpha \in (0, 1)$, a proto opět limitním přechodem $\alpha \to 1-$ odvodíme nerovnost

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \int \phi \, d\mu.$$

Nyní stačí vzít supremum přes všechny jednoduché funkce $\phi \in \mathscr{L}_+$ takové, že $\phi \leq f$, a dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \int f d\mu.$$

$\square$

Věta o monotónní konvergenci je zcela zásadní nástroj v mnoha situacích. Mimo to má pro nás následující bezprostřední důsledek. Jen velmi zřídka můžeme spočítat integrál funkce $f \in \mathscr{L}_+$ přímo z Definice 5.22, protože je třeba najít supremum přes v jistém smyslu složitou a typicky nespočetnou množinu jednoduchých funkcí. Věta 5.24 nám říká, že stačí najít jakoukoliv neklesající posloupnost jednoduchých funkcí $\phi_n \in \mathscr{L}_+$, která bodově konverguje f, a spočítat $\lim_{n\to\infty} \int \phi_n$. Navíc Věta 5.15 garantuje existenci takové posloupnosti.

Příklad 5.25: Uvažujme počítací míru μ na $\mathbb{N}$, tzn., že $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = 2^{\mathbb{N}}$ a $\mu(E)$ je počet prvků množiny $E \subset \mathbb{N}$. Funkce $f \in \mathscr{L}_+$ jsou v tomto případě nezáporné posloupnosti, a proto místo $f(n)$ budeme psát f_n. Všimněte si, že je-li nezáporná funkce ϕ nulová od jistého indexu, tj. $(\exists j_0 \in \mathbb{N})(\forall j \geq j_0)(\phi_j = 0)$, potom je ϕ jednoduchá a z Definice 5.18 plyne, že

$$\int \phi \, d\mu = \sum_{j=1}^{j_0} \phi_j,$$

neboť ϕ lze reprezentovat ve tvaru $\phi = \sum_{j=1}^{j_0} \phi_j \chi_{\{j\}}$.

Obecnou posloupnost $f \in \mathscr{L}_+$ lze aproximovat zespodu posloupností jednoduchých funkcí tvaru $\sum_{j=1}^{n} f_j \chi_{\{j\}}$, a proto je

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_j = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$$

podle Věty o monotónní konvergenci. Připomeňme, že poslední výraz může být ∞. Vidíme tedy, že pro počítací míru μ, je integrál vlastně číselná řada (prozatím s nezápornými členy). Mnoho vět, které platí pro číselné řady, lze získat jako speciální případ obecných vět teorie integrálu.

Jako první aplikaci Věty o monotónní konvergenci si dokážeme následující tvrzení, ze kterého speciálně vyplývá aditivita integrálu na $\mathscr{L}_+$.

Věta 5.26: Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost funkcí z $\mathscr{L}_+$ a $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$. Potom je $f \in \mathscr{L}_+$ a platí:

$$\int f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Speciálně pro $f, g \in \mathscr{L}_+$ platí:

$$\int (f+g)\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\mu + \int g\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Nejprve uvažujme dvě funkce $f_1, f_2 \in \mathscr{L}_+$. Podle Věty 5.15 existují neklesající posloupnosti jednoduchých funkcí $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ a $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ z $\mathscr{L}_+$ takové, že $\phi_n \le f_1$ a $\psi_n \le f_2$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\phi_n \to f_1$ a $\psi_n \to f_2$. Potom $\{\phi_n + \psi_n\}_{n=1}^\infty$ je také neklesající posloupnost jednoduchých funkcí z $\mathscr{L}_+$ taková, že $\phi_n + \psi_n \le f_1 + f_2$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\phi_n + \psi_n \to f_1 + f_2$. Z Věty 5.24 o monotónní konvergenci a 2. tvrzení Věty 5.21 plyne, že

$$\int (f_1+f_2)\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int (\phi_n + \psi_n)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n \mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n \mathrm{d}\mu = \int f_1 \mathrm{d}\mu + \int f_2 \mathrm{d}\mu.$$

Dále indukcí snadno dokážeme, že pro každé $N \in \mathbb{N}$ a $f_1, \dots, f_N \in \mathscr{L}_+$ platí:

$$\int \sum_{n=1}^N f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^N \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Nyní stačí v poslední rovnosti poslat $N \to \infty$ a opět použít Větu 5.24 o monotónní konvergenci. Odtud plyne, že $f \in \mathscr{L}_+$ a také rovnost

$$\int f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int f_n \mathrm{d}\mu,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Důsledek 5.27: Nechť $a_{i,j} \ge 0$ pro všechna $i, j \in \mathbb{N}$, potom

$$\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_{i,j} = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty a_{i,j}.$$

Důkaz. Ve Větě 5.26 stačí vzít za μ počítací míru na $\mathbb{N}$. □

Věta 5.28: Buď $f \in \mathscr{L}_+$. Potom platí:

$$\int f \mathrm{d}\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \quad \mu\text{-s.v.}$$

Důkaz. Předpokládejme nejdřív, že f je jednoduchá. Je-li f tvaru $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$, kde $a_i \geq 0$ a $E_i \in \mathcal{M}$, potom

$$\int f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall i \in \hat{n})\, (a_i \mu(E_i) = 0)\,,$$

neboli $\int f \mathrm{d}\mu = 0$, právě když $a_i = 0$, kdykoliv je $\mu(E_i) > 0$, což znamená, že $f = 0$ μ-s.v.

Nyní předpokládejme, že je dána obecná funkce $f \in \mathscr{L}_+$ taková, že $f = 0$ μ-s.v. Potom libovolná jednoduchá funkce $\phi \in \mathscr{L}_+$ splňující $0 \leq \phi \leq f$ je také skoro všude nulová, tj. $\phi = 0$ μ-s.v. Tudíž

$$\begin{aligned}\int f \mathrm{d}\mu &= \sup \left\{ \int \phi \,\mathrm{d}\mu \,\middle|\, \phi \in \mathscr{L}_+ \text{ je jednoduchá a } \phi \leq f \right\} \\ &= \sup \left\{ \int \phi \,\mathrm{d}\mu \,\middle|\, \phi \in \mathscr{L}_+ \text{ je jednoduchá a } \phi = 0 \ \mu\text{-s.v.} \right\} = 0.\end{aligned}$$

Nechť naopak $f \in \mathscr{L}_+$ splňuje $\int f \mathrm{d}\mu = 0$. Pro spor předpokládejme, že f není μ-s.v. nulová. Zaveďme pomocné měřitelné množiny

$$E_n := f^{-1}\left(\left(\frac{1}{n}, \infty\right)\right) = \left\{ x \in X \,\middle|\, f(x) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Potom

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \{x \in X \mid f(x) > 0\}.$$

Jelikož f není μ-s.v. nulová, $\mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) > 0$, a proto existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\mu(E_n) > 0$. Z definice množiny E_n plyne, že

$$f > \frac{1}{n} \chi_{E_n},$$

a proto

$$\int f \mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{n} \int \chi_{E_n} \mathrm{d}\mu = \frac{\mu(E_n)}{n} > 0,$$

což je spor s předpokladem $\int f \mathrm{d}\mu = 0$. □

Důsledek 5.29: Pro funkce $f, g \in \mathscr{L}_+$ platí implikace:

$$f = g \ \mu\text{-s.v.} \quad \Rightarrow \quad \int f \mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu. \tag{50}$$

Poznámka: Opačná implikace v (50) samozřejmě neplatí. Stačí uvážit např. Lebesgueovu míru $\mu = m$ a funkce $f = \chi_{(0,1)}$ a $g = \chi_{(-1,0)}$.

Důkaz Důsledku 5.29. Je-li $f = g$ μ-s.v., pak existuje μ-nulová množina $E \in \mathcal{M}$ tak, že $(\forall x \in X \setminus E)(f(x) = g(x))$. Potom $f\chi_{E^c} = g\chi_{E^c}$. Uvážíme-li ještě, že $f = f\chi_E + f\chi_{E^c}$ a $f\chi_E = 0$ μ-s.v. a analogicky pro funkci g, potom z aditivity integrálu a Věty 5.28 dostaneme

$$\int f \mathrm{d}\mu = \underbrace{\int f\chi_E \,\mathrm{d}\mu}_{=0} + \int f\chi_{E^c} \,\mathrm{d}\mu = \underbrace{\int g\chi_E \,\mathrm{d}\mu}_{=0} + \int g\chi_{E^c} \,\mathrm{d}\mu = \int g \mathrm{d}\mu.$$

□

Předpoklady Věty o monotónní konvergenci lze mírně zeslabit, neboť, jak už jsme naznačili, chování funkcí na množinách nulové míry můžeme při integraci zanedbávat.

Důsledek 5.30: Nechť f a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou funkce z $\mathscr{L}_+$, které splňují:

i. $(\forall n \in \mathbb{N})(f_n \leq f_{n+1}$ μ-s.v.$)$,

ii. $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-s.v.

Potom platí:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Z předpokladu i. plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje μ-nulová množina $E_n \in \mathcal{M}$ taková, že $(\forall x \in X \setminus E_n)(f_n(x) \leq f_{n+1}(x))$. Podobně předpoklad ii. implikuje existenci μ-nulové množiny $E_0 \in \mathcal{M}$ takové, že $(\forall x \in X \setminus E_0)(f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x))$. Položíme-li

$$E := \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n,$$

potom podle Věty 4.26 je $\mu(E) = 0$ a funkce $f\chi_{E^c}$ a $\{f_n\chi_{E^c}\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovují předpokladům Věty 5.24, ze které plyne

$$\int f\chi_{E^c} \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\chi_{E^c} \mathrm{d}\mu.$$

Protože $\mu(E) = 0$, je $f = f\chi_{E^c}$ μ-s.v. a podobně $f_n = f_n\chi_{E^c}$ μ-s.v. pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tudíž s využitím Důsledku 5.29 dostáváme

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int f\chi_{E^c} \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\chi_{E^c} \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

□

Předpoklad monotonie ve Větě o monotónní konvergenci musí být splněn alespoň μ-s.v., jinak věta neplatí. Stačí uvážit např. posloupnosti funkcí $f_n := \chi_{(n,n+1)}$ nebo $g_n := n\chi_{(0,1/n)}$, které obě bodově konvergují k nulové funkci na $\mathbb{R}$. Avšak je-li $\mu = m$ Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$, potom

$$\int f_n \mathrm{d}m = m((n, n+1)) = 1 \quad \text{a} \quad \int g_n \mathrm{d}m = n \cdot m\left(\left(0, \frac{1}{n}\right)\right) = 1$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tedy limita posloupnosti integrálů není integrál limitní funkce, který by v tomto příkladě byl 0. Jedna nerovnost ovšem platí vždy, což je důsledek další fundamentální limitní věty teorie integrálu - tzv. *Fatouovo lemma.*

Lemma 5.31 (Fatou)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}_+$, potom

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Měřitelnost všech funkcí v tomto důkazu je zaručena předpokladem a Větou 5.10. Buď $k \in \mathbb{N}$. Pro každé $j \geq k$ platí

$$\inf_{n\geq k} f_n \leq f_j,$$

z čehož plyne, že

$$\int \inf_{n\geq k} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

Vezmeme-li v této nerovnosti infimum přes všechna $j \in \mathbb{N}$, $j \geq k$, máme

$$\int \inf_{n\geq k} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \inf_{j\geq k} \int f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

Protože $\{\inf_{n\geq k} f_n\}_{k=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost funkcí z $\mathcal{L}_+$, můžeme v poslední nerovnosti poslat $k \to \infty$ a aplikovat Větu 5.24 o monotónní konvergenci, čímž dostaneme

$$\begin{aligned}\int (\liminf_{n\to\infty} f_n)\mathrm{d}\mu &= \int (\lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} f_n)\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int (\inf_{n\geq k} f_n)\mathrm{d}\mu \leq \lim_{k\to\infty} \inf_{j\geq k} \int f_j \,\mathrm{d}\mu \\ &= \liminf_{j\to\infty} \int f_j \,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka: Nerovnost v Lemma 5.31 může být ostrá, jak ukazují příklady zmíněné před ním.

Důsledek 5.32: Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}_+$, $f \in \mathscr{L}_+$ a $f_n \to f$ μ-s.v. Potom

$$\int f \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Z předpokladu $f_n \to f$ μ-s.v. vyplývá, že existuje μ-nulová množina $E \in \mathcal{M}$ tak, že $(\forall x \in X \setminus E)(f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x))$. Odtud máme

$$(\forall x \in X)(f(x)\chi_{E^c}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\chi_{E^c}(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\chi_{E^c}(x)).$$

Dále rovnosti $f = f\chi_{E^c}$ a $f_n = f_n\chi_{E^c}$ platí μ-skoro všude a pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Proto aplikací Fatouova Lemma 5.31 na posloupnost $\{f_n\chi_{E^c}\}_{n=1}^{\infty}$ a Důsledku 5.29 dostane

$$\int f\chi_{E^c}\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\chi_{E^c}\mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

□

Následující jednoduché pozorování, že funkce s konečným integrálem je skoro všude konečná, budeme potřebovat později.

Lemma 5.33: Nechť $f \in \mathscr{L}_+$ a $\int f \mathrm{d}\mu < \infty$. Potom

$$\mu\left(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}\right) = 0.$$

Důkaz. Pro spor předpokládejme naopak, že $\mu(E_\infty) > 0$, kde

$$E_\infty := \{x \in X \mid f(x) = \infty\}.$$

Protože $f \geq f\chi_{E_\infty}$, máme

$$\int f \mathrm{d}\mu \geq \int f\chi_{E_\infty} \mathrm{d}\mu = \infty \cdot \mu(E_\infty) = \infty,$$

což je ve sporu s předpokladem $\int f \mathrm{d}\mu < \infty$. □

Nakonec si dokážeme větu, která je rozšířením 4. tvrzení Věty 5.21. Existuje velmi důležitá tzv. *Radon–Nikodymova věta*, která je v jistém smyslu obrácení následujícího tvrzení, ale tu si dokážeme až mnohem později.

Věta 5.34: Nechť $f \in \mathscr{L}_+$ a $\mu_f : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ je definována vztahem

$$\mu_f(E) := \int_E f \mathrm{d}\mu.$$

Potom μ_f je míra na $\mathcal{M}$ a pro každé $g \in \mathscr{L}_+$ platí:

$$\int g \, \mathrm{d}\mu_f = \int fg \, \mathrm{d}\mu. \tag{51}$$

Důkaz. Nejprve dokážeme, že μ_f je míra na $\mathcal{M}$. Zřejmě $\mu_f(\emptyset) = 0$, a proto stačí ověřit σ-aditivitu μ_f. Nechť $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ jsou po dvou disjunktní a $E := \cup_{n=1}^\infty E_n$. Všimněte si, že

$$f\chi_E = \sum_{n=1}^\infty f\chi_{E_n},$$

a proto s použitím Věty 5.26 dostaneme

$$\mu_f(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu = \int f\chi_E \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int f\chi_{E_n} \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \mu_f(E_n),$$

což jsme chtěli ověřit.

Dále dokážeme rovnost (51). Uvažujme nejdříve funkci $g = \chi_E \in \mathscr{L}_+$, kde $E \in \mathcal{M}$, potom

$$\int g \mathrm{d}\mu_f = \mu_f(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu = \int fg \mathrm{d}\mu.$$

Odtud a z aditivity integrálu plyne, že (51) platí pro každou jednoduchou funkci $g \in \mathscr{L}_+$. Nyní k důkazu rovnosti (51) pro obecnou funkci $g \in \mathscr{L}_+$ stačí aproximovat g zespodu jednoduchými funkcemi jako ve Větě 5.15 a použít Větu 5.24 o monotónní konvergenci (ověřte). □

5.3 Integrace reálných a komplexních funkcí

Budeme pokračovat v konstrukci integrálu a definici si rozšíříme z měřitelných nezáporných funkcí nejprve na měřitelné funkce reálné a poté komplexní, tzn. s hodnotami v $\mathbb{R}$ a v $\mathbb{C}$. Stále předpokládáme, že je daný prostor s mírou $(X, \mathcal{M}, \mu)$, aniž bychom to explicitně zmiňovali.

K rozšíření integrálu z nezáporných funkcí na reálné, využijeme rozkladu funkce f na pozitivní a negativní část:

$$f = f^+ - f^-,$$

viz Definice 5.13. Je-li f měřitelná, jsou $f^\pm \in \mathscr{L}_+$, a tudíž integrály $\int f^\pm$ jsou dobře definované. Nyní je jasné, jakým způsobem rozšířit definici integrálu na f. Jediné (kromě měřitelnosti f), co je třeba ošetřit, je, abychom v definici integrálu nedostali výraz „$\infty - \infty$“. Rozšíření integrálu z reálných na komplexní funkce přirozeně využívá rozkladu funkce f na reálnou a imaginární část, $f = \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \operatorname{Im} f$.

Definice 5.35 (Integrál reálné a komplexní funkce)**:** Buď $f : X \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce taková, že alespoň jeden integrál z $\int f^+ \mathrm{d}\mu$ a $\int f^- \mathrm{d}\mu$ je konečný. Potom definujeme

$$\int f \mathrm{d}\mu := \int f^+ \mathrm{d}\mu - \int f^- \mathrm{d}\mu.$$

Je-li $f : X \to \mathbb{C}$ měřitelná funkce, potom klademe

$$\int f \mathrm{d}\mu := \int \operatorname{Re} f \mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int \operatorname{Im} f \mathrm{d}\mu,$$

mají-li oba integrály napravo smysl podle definice výše.

Navíc, je-li $f : X \to \mathbb{C}$ měřitelná na $E \in \mathcal{M}$, definujeme

$$\int_E f \mathrm{d}\mu := \int f \chi_E \, \mathrm{d}\mu,$$

je-li integrál napravo dobře definován ve smyslu definice výše.

Hodnota integrálu z předchozí definice nemusí být konečná, v aplikacích však obvykle pracujeme s funkcemi, jež mají konečný integrál. Tyto funkce nazýváme *integrabilní*. Všimněte si, že $f : X \to \mathbb{R}$ má konečný integrál, pokud oba $\int f^+ \mathrm{d}\mu < \infty$ i $\int f^- \mathrm{d}\mu < \infty$. Protože $|f| = f_+ + f_-$, lze integrabilitu f stručně vyjádřit následovně:

$$f \text{ je integrabilní} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ je měřitelná a } \int |f| \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Stejnou ekvivalenci lze napsat i pro funkce s komplexními hodnotami, tzn., že $f : X \to \mathbb{C}$ nazveme integrabilní, právě když jsou obě reálné funkce $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ integrabilní v předchozím smyslu.

Definice 5.36 (Integrabilní funkce, prostor integrabilních funkcí)**:** Funkci $f : X \to \mathbb{C}$ nazveme *integrabilní*, právě když je f měřitelná a $\int |f| \mathrm{d}\mu < \infty$. Obecněji řekneme, že f je *integrabilní na množině* $E \in \mathcal{M}$, právě když je f měřitelná na E a $\int_E |f| \mathrm{d}\mu < \infty$. Dále pro prostor integrabilních komplexních funkcí používáme následující značení:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(X, \mathcal{M}, \mu) = \mathscr{L}(X, \mu) = \mathscr{L}(\mu) := \{ f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ integrabilní} \}.$$

Věta 5.37: Je-li $f, g \in \mathscr{L}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$, potom $f + \alpha g \in \mathscr{L}$ a platí:

$$\int (f + \alpha g)\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\mu + \alpha \int g\mathrm{d}\mu.$$

Tedy $\mathscr{L}$ je lineární prostor nad $\mathbb{C}$ a integrál je lineární funkcionál na $\mathscr{L}$.

Důkaz. Je-li $f, g \in \mathscr{L}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$, potom je $\alpha f + g$ měřitelná, a protože $|f + \alpha g| \le |f| + |\alpha||g|$, máme také

$$\int |f + \alpha g|\mathrm{d}\mu \le \int (|f| + |\alpha||g|)\,\mathrm{d}\mu = \int |f|\mathrm{d}\mu + |\alpha| \int |g|\mathrm{d}\mu,$$

díky již známým vlastnostem integrálu na $\mathscr{L}_+$. Tedy $f + \alpha g \in \mathscr{L}$.

Druhé tvrzení bude dokázáno, ověříme-li, že

$$\int (f + g)\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\mu + \int g\mathrm{d}\mu \tag{52}$$

a

$$\int (\alpha f)\mathrm{d}\mu = \alpha \int f\mathrm{d}\mu. \tag{53}$$

Nejprve ověříme aditivitu (52). Všimněte si, že pokud ověříme (52) pro dvě reálné funkce $f, g \in \mathscr{L}$, bude (52) platit také pro dvě obecně komplexní funkce $f, g \in \mathscr{L}$, jak vyplývá jednoduše z definice integrálu. Předpokládejme tedy, že $f, g \in \mathscr{L}$ jsou reálné funkce a označme $h := f + g$. Potom

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

neboli

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+.$$

Z aditivity integrálu na $\mathscr{L}_+$, viz Věta 5.26, vyplývá rovnost

$$\int h^+\mathrm{d}\mu + \int f^-\mathrm{d}\mu + \int g^-\mathrm{d}\mu = \int h^-\mathrm{d}\mu + \int f^+\mathrm{d}\mu + \int g^+\mathrm{d}\mu,$$

která po přeskládání implikuje rovnost

$$\int h\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\mu + \int g\mathrm{d}\mu,$$

což jsme chtěli dokázat.

Pro důkaz homogenity (53) předpokládejme nejprve, že $f \in \mathscr{L}$ je reálná funkce a $\alpha \in \mathbb{R}$. Je-li $\alpha \ge 0$, platí $(\alpha f)^{\pm} = \alpha f^{\pm}$ a rovnost (53) je snadné ověřit. Je-li naopak $\alpha < 0$, potom máme

$$\begin{aligned}\int (\alpha f)\mathrm{d}\mu &= \int (\alpha f)^+\mathrm{d}\mu - \int (\alpha f)^-\mathrm{d}\mu = \int (-\alpha)(-f)^+\mathrm{d}\mu - \int (-\alpha)(-f)^-\mathrm{d}\mu \\ &= -\alpha \left(\int (-f)^+\mathrm{d}\mu - \int (-f)^-\mathrm{d}\mu \right) = -\alpha \left(\int f^-\mathrm{d}\mu - \int f^+\mathrm{d}\mu \right) = \alpha \int f\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že $(-f)^\pm = f^\mp$. K důkazu obecného případu s $\alpha \in \mathbb{C}$ a komplexní funkcí $f \in \mathscr{L}$ nyní stačí použít již dokázané vlastnosti a definici integrálu komplexní funkce. Označíme-li pro jednoduchost $a := \operatorname{Re}\alpha$, $b := \operatorname{Im}\alpha$ a podobně $g := \operatorname{Re} f$, $h := \operatorname{Im} f$, dostaneme

$$\begin{aligned}\int \alpha f \mathrm{d}\mu &= \int (a+\mathrm{i}b)(g+\mathrm{i}h)\mathrm{d}\mu = \int ((ag-bh)+\mathrm{i}(ah+bg))\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int (ag-bh)\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int (ah+bg)\mathrm{d}\mu = a\int g\mathrm{d}\mu - b\int h\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}a\int h\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}b\int g\mathrm{d}\mu \\ &= (a+\mathrm{i}b)\left(\int g\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int h\mathrm{d}\mu\right) = \alpha\int f\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

□

Věta 5.38: Je-li $f \in \mathscr{L}$, potom

$$\left|\int f\mathrm{d}\mu\right| \le \int |f|\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Nerovnost platí triviálně, pokud $\int f\mathrm{d}\mu = 0$ a téměř triviálně, je-li $f \in \mathscr{L}$ reálná, neboť

$$\left|\int f\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int f^+\mathrm{d}\mu - \int f^-\mathrm{d}\mu\right| \le \int f^+\mathrm{d}\mu + \int f^-\mathrm{d}\mu = \int (f^+ + f^-)\mathrm{d}\mu = \int |f|\mathrm{d}\mu.$$

Předpokládejme tedy, že $f \in \mathscr{L}$ a $\int f\mathrm{d}\mu \neq 0$. Položme

$$\alpha := \frac{\overline{\int f\mathrm{d}\mu}}{\left|\int f\mathrm{d}\mu\right|}.$$

Protože

$$\left|\int f\mathrm{d}\mu\right| = \alpha\int f\mathrm{d}\mu = \int \alpha f\mathrm{d}\mu,$$

je číslo $\int \alpha f\mathrm{d}\mu$ reálné (dokonce nezáporné), a tudíž

$$\int \alpha f\mathrm{d}\mu = \operatorname{Re}\int \alpha f\mathrm{d}\mu = \int \operatorname{Re}(\alpha f)\,\mathrm{d}\mu.$$

Využijeme-li navíc toho, že nerovnost jsme již dokázali pro reálné funkce, dostaneme

$$\left|\int f\mathrm{d}\mu\right| = \int \operatorname{Re}(\alpha f)\,\mathrm{d}\mu \le \int |\operatorname{Re}(\alpha f)|\,\mathrm{d}\mu \le \int |\alpha f|\,\mathrm{d}\mu = |\alpha|\int |f|\mathrm{d}\mu = \int |f|\mathrm{d}\mu,$$

neboť $|\alpha| = 1$. □

Věta 5.39: Nechť $f, g \in \mathscr{L}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $f = g$ μ-s.v.,

2. $\int |f-g| \mathrm{d}\mu = 0$,

3. $(\forall E \in \mathcal{M}) \left(\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_E g \mathrm{d}\mu\right)$.

Důkaz. Ekvivalence 1. $\Leftrightarrow$ 2. vyplývá z Věty 5.28, neboť $|f-g| \in \mathscr{L}_+$ pro $f, g \in \mathscr{L}$ a $f = g$ μ-s.v., právě když $|f-g| = 0$ μ-s.v.

Implikace 2. $\Rightarrow$ 3.: Pokud je $\int |f-g| \mathrm{d}\mu = 0$ a $E \in \mathcal{M}$, potom s využitím Věty 5.38 máme

$$\left|\int_E f \mathrm{d}\mu - \int_E g \mathrm{d}\mu\right| = \left|\int \chi_E (f-g) \mathrm{d}\mu\right| \leq \int \chi_E |f-g| \mathrm{d}\mu \leq \int |f-g| \mathrm{d}\mu = 0,$$

a proto $\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_E g \mathrm{d}\mu$.

Implikace 3. $\Rightarrow$ 1.: Důkaz provedeme sporem. Všimněte si, že označíme-li $u := \mathrm{Re}(f-g)$ a $v := \mathrm{Im}(f-g)$, potom

$$f = g \quad \mu\text{-s.v.} \quad \Leftrightarrow \quad u = v = 0 \quad \mu\text{-s.v.} \quad \Leftrightarrow \quad u^+ = u^- = v^+ = v^- = 0 \quad \mu\text{-s.v.}$$

Pokud tedy $f \neq g$ μ-s.v., potom některá z funkcí u^+, u^-, v^+, v^- není μ-s.v. nulová. Nechť je to např. u^+. Potom pro množinu $E := \{x \in X \mid u^+(x) > 0\}$ platí $\mu(E) > 0$, a proto

$$\mathrm{Re}\left(\int_E f \mathrm{d}\mu - \int_E g \mathrm{d}\mu\right) = \int_E u \mathrm{d}\mu = \int_E u^+ \mathrm{d}\mu > 0,$$

kde druhá rovnost plyne z toho, že $u^- = 0$ na E, neboť $u^+ u^- = 0$. Na druhou stranu podle předpokladu 3. je $\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_E g \mathrm{d}\mu$, z čehož speciálně plyne

$$\mathrm{Re}\left(\int_E f \mathrm{d}\mu - \int_E g \mathrm{d}\mu\right) = 0$$

a to je spor. Ostatní možnosti se diskutují analogicky. $\square$

Věta 5.39 ukazuje, že z hlediska integrace je lhostejné, změníme-li funkci na množině nulové míry. Funkce by nemusela být na množině nulové míry ani definována a přesto má integrál této funkce dobrý smysl, dodefinujeme-li ji třeba nulou (nebo jinak). V podobném duchu lze integrovat také funkce s hodnotami v $\overline{\mathbb{R}}$, pokud jsou μ-skoro všude konečné. Např. integrál funkce $f(x) = \ln|x|$ na intervalu $(-1, 1)$ vzhledem k Lebesgueově míře je dobře definovaný, ať už hodnotu $\ln 0$ definujeme jakkoliv, např. $\ln 0 := 0$.

Tyto úvahy si formalizujeme a rozšíříme tak definici měřitelnosti a integrability funkce. Připomeňme, že je dán prostor s mírou $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Definiční obor funkce f označíme D_f.

Definice 5.40 (Rozšíření pojmu měřitelná funkce)**:** Komplexní funkci f definovanou μ-skoro všude na X nazveme ***měřitelnou*** na X, právě když existuje $E_f \in \mathcal{M}$, $E_f \subset D_f$, $\mu(E_f^c) = 0$ a platí $f^{-1}(U) \cap E_f \in \mathcal{M}$ pro každou otevřenou množinu $U \subset \mathbb{C}$ (viz Lemma 5.2).

Dodefinujeme-li měřitelnou f na množině E_f^c nulou, tj. definujeme

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in E_f, \\ 0, & x \in E_f^c, \end{cases} \tag{54}$$

potom je $\tilde{f}$ měřitelná v původním smyslu (ověřte). Samozřejmě pokud je f definovaná na celém X a měřitelná v původním smyslu, je také f měřitelná ve smyslu novém, neboť v tomto případě stačí položit $E_f = X$. Tedy definici měřitelnosti jsme skutečně rozšířili. Pokud je navíc μ úplná, mohli bychom v definici (54) dodefinovat f na E_f^c jakkoliv, a pak by taková $\tilde{f}$ byla také měřitelná, což plyne z 1. tvrzení Věty 5.16.

Podobně rozšíříme integrabilitu na μ-s.v. definované měřitelné funkce.

Definice 5.41 (Rozšíření pojmu integrabilní funkce a její integrál)**:** Řekneme, že μ-s.v. definovaná komplexní funkce f je ***integrabilní***, právě když je měřitelná a funkce $\tilde{f}$ z definice (54) je integrabilní, tj. $\tilde{f} \in \mathscr{L}$. Prostor integrabilních μ-s.v. definovaných funkcí označíme

$$L = L(X, \mathcal{M}, \mu) = L(X, \mu) = L(\mu).$$

Integrál funkce $f \in L$ dodefinujeme vztahem

$$\int f \mathrm{d}\mu := \int \tilde{f} \mathrm{d}\mu.$$

I když není množina E_f z definice měřitelnosti f, a tedy ani funkce $\tilde{f}$, určena jednoznačně, je korektnost definice integrálu pro funkci $f \in L$ zaručena Větou 5.39. V následující větě shrneme základní vlastnosti týkající se právě rozšířených pojmů.

Věta 5.42: Platí:

1. L je lineární prostor a integrál je lineární funkcionál na L.
2. Je-li f měřitelná/integrabilní a $g = f$ μ-s.v., potom je také g měřitelná/integrabilní.
3. Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost μ-s.v. definovaných měřitelných funkcí a $f_n \to f$ μ-s.v., potom je f měřitelná.

Důkaz. 1. Ověření 1. tvrzení je jednoduchá aplikace Vět 5.37 a 5.39 a příslušných definic.

2. Je-li f měřitelná a E_f množina z definice měřitelnosti f, potom stačí položit $E_g := E \cap E_f$, kde $E \in \mathcal{M}$ je taková, že $\mu(E^c) = 0$ a $f(x) = g(x)$ pro všechna $x \in E$. Potom je $\mu(E_g^c) = 0$ a pro $U \subset \mathbb{C}$ otevřenou máme

$$g^{-1}(U) \cap E_g = f^{-1}(U) \cap E_f \cap E \in \mathcal{M},$$

protože $f^{-1}(U) \cap E_f \in \mathcal{M}$.

Je-li f navíc integrabilní a $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ funkce f, g dodefinované nulou na E_f^c, E_g^c, potom $\tilde{g} = \tilde{f}$ μ-s.v., a tudíž

$$\int |\tilde{g}| \mathrm{d}\mu = \int |\tilde{f}| \mathrm{d}\mu = \int |f| \mathrm{d}\mu < \infty,$$

neboli $g \in L$.

3. Podle předpokladu existuje množina $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E^c) = 0$ taková, že $(\forall x \in E)(f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x))$. Jsou-li dále $E_{f_n} \in \mathcal{M}$ množiny z definice měřitelnosti funkcí f_n, potom položíme

$$E_f := E \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{f_n}.$$

Z Věty 4.26 plyne, že $\mu(E_f^c) = 0$. Zavedeme-li pomocné funkce

$$\tilde{f}_n(x) := \begin{cases} f_n(x), & x \in E_f, \\ 0, & x \in E_f^c, \end{cases} \qquad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in E_f, \\ 0, & x \in E_f^c, \end{cases}$$

potom $\tilde{f}_n \to \tilde{f}$, a proto podle Důsledku 5.12 je $\tilde{f}$ měřitelná. Protože $f = \tilde{f}$ na E_f, tedy μ-s.v., je f měřitelná podle již dokázaného bodu 2. □

V úvahách, které nás vedly k rozšíření množiny integrabilních funkcí, bychom mohli jít ještě dál a dojít k tomu, že bychom mezi funkcemi, které se liší na množině nulové míry, nemuseli vůbec rozlišovat a mohli bychom je ztotožnit. To je základní myšlenka konstrukce důležitého funkčního prostoru - tzv. *Lebesgueova prostoru* L^1 nebo obecněji prostorů L^p. Konstrukci těchto prostorů odložíme na později.

Nyní si dokážeme třetí fundamentální limitní větu teorie integrálu, tzv. *Lebesgueovu větu*. Předchozí dvě limitní věty, Věta 5.24 o monotónní konvergenci a Fatouovo Lemma 5.31, se týkaly pouze *nezáporných* funkcí. Lebesgueova věta se týká obecných komplexních funkcí a dává nám postačující a velmi obecnou podmínku pro to, abychom mohli v 3. tvrzení Věty 5.42 nahradit měřitelnost integrabilitou. Navíc budeme moci zaměňovat limitu a integrál. Zásadním předpokladem Lebesgueovy věty, který umožní limitní přenos integrability a také záměnu limity a integrálu, je existence tzv. *integrabilní majoranty* posloupnosti měřitelných funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, tj. integrabilní funkce g takové, že $|f_n| \le g$ pro každé n. Tuto informaci v sobě skrývá anglický název věty - *Lebesgue's dominated convergence theorem.*

Věta 5.43 (Lebesgue)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost měřitelných μ-s.v. definovaných funkcí taková, že limita

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existuje pro μ-s.v. $x \in X$. Předpokládejme dále, že

$$(\exists g \in L)(\forall n \in \mathbb{N})(|f_n| \le g \ \mu\text{-s.v.}).$$

Potom je $f \in L$ a platí:

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Podle 3. tvrzení Věty 5.42 je f měřitelná. Podle předpokladů nerovnost $|f_n| \le g$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a μ-s.v., z čehož limitním přechodem vyvodíme, že také $|f| \le g$ μ-s.v. Odtud a z toho, že $g \in L$, vyplývá

$$\int |f| \mathrm{d}\mu \le \int g \mathrm{d}\mu < \infty,$$

a tudíž $f \in L$.

Dále dokážeme tvrzení o záměně limity a integrálu. Uvědomte si, že stačí uvažovat reálné funkce f_n (a tedy i f), protože toto tvrzení lze aplikovat zvlášť na $\operatorname{Re} f_n$ a $\operatorname{Im} f_n$ a dostat tak obecné tvrzení věty pro komplexní f_n.

Předpokládejme tedy, že hodnoty funkcí f_n jsou reálné pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom z předpokladu $|f_n| \leq g$ μ-s.v. plyne, že $g+f_n \geq 0$ a $g-f_n \geq 0$ μ-s.v. Potom aplikací Fatouova Lemma 5.31 na posloupnosti $\{g+f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{g-f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (které podle potřeby dodefinujeme nulou v bodech, ve kterých nejsou nezáporné, což nemá vliv na hodnoty integrálů níže) a dostaneme

$$\int g \mathrm{d}\mu + \int f \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g+f_n)\mathrm{d}\mu = \int g\mathrm{d}\mu + \liminf_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu$$

a

$$\int g \mathrm{d}\mu - \int f \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g-f_n)\mathrm{d}\mu = \int g\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Odtud plyne, že

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \leq \int f \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu,$$

a tedy všechny nerovnosti platí jako rovnosti. To znamená, že limita posloupnosti $\{\int f_n \mathrm{d}\mu\}_{n=1}^{\infty}$ existuje a je rovna $\int f \mathrm{d}\mu$. □

Poznámka: Všimněte si, že předpoklady Věty 5.43 implikují, že $\{f_n\}$ je posloupnost integrabilních funkcí, neboť konečnost integrálu $\int |f_n|\mathrm{d}\mu$ je důsledkem nerovnosti $|f_n| \leq g$ μ-s.v. a toho, že $g \in L$.

Poznámka: Z Lebesgueovy věty snadno odvodíme tvrzení, které je zobecněním Věty 1.19: Nechť μ je konečná míra, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost omezených měřitelných funkcí, která konverguje stejnoměrně k funkci f na X, potom

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Není-li μ konečná na X, tj. $\mu(X) = \infty$, tvrzení neplatí. Důkaz je přenechán čtenáři jako Cvičení 5.8.

Poznámka: Je-li μ Lebesgueova míra m na $\mathbb{R}$, je obvyklé psát např. místo $\int_{(a,b)} f \mathrm{d}m$ symbol

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

stejně jako pro integrál Riemannův. Všimněte si, že v případě Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}$ je

$$\int_{(a,b)} f \mathrm{d}m = \int_{(a,b]} f \mathrm{d}m = \int_{[a,b)} f \mathrm{d}m = \int_{[a,b]} f \mathrm{d}m,$$

protože se jednotlivé intervaly liší jen na množině Lebesgueovy míry 0. Pro obecnou Lebesgueovu–Stieltjesovu míru μ asociovanou s funkcí F platí $\int_{(a,b)} f \mathrm{d}\mu = \int_{(a,b]} f \mathrm{d}\mu$, jen pokud je F spojitá v bodě b, viz Cvičení 4.7, a podobně pro druhý krajní bod.

Příklad 5.44: Spočítáme limitu

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x.$$

Použijeme Lebesgueovu větu na posloupnost funkcí

$$f_n(x) := \frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)},$$

které jsou měřitelné na $(0,\infty)$, neboť jsou zde spojité. Protože

$$\left|\frac{\sin y}{y}\right| \le 1$$

pro všechna $y \in (0,\infty)$, dostaneme

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{1+x^2} =: g(x)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (0,\infty)$. Funkce g je integrabilní majoranta posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, tj. $g \in L((0,\infty), m)$, protože

$$\int_0^\infty g(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

Zde použitý Lebesgueův integrál má stejnou hodnotu jako odpovídající integrál Riemannův, což si ukážeme později (viz podkapitola 5.4). Dále

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

pro každé $x \in (0,\infty)$. Proto podle Lebesgueovy věty můžeme zaměnit limitu a integrál a dostaneme tak výsledek

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Dále si ukážeme několik užitečných aplikací Lebesgueovy věty.

Věta 5.45: Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost μ-s.v. definovaných měřitelných funkcí taková, že

$$\sum_{n=1}^\infty \int |f_n|\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Potom funkční řada $\sum_{n=1}^\infty f_n$ konverguje μ-s.v. k funkci z L a platí:

$$\int \sum_{n=1}^\infty f_n\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int f_n\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Položíme-li $g := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$, potom je g μ-s.v. definovaná funkce s hodnotami v $[0, \infty]$. Z Věty 5.26 plyne, že

$$\int g \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Tedy $g \in L$. Speciálně Lemma 5.33 implikuje, že g je konečná μ-skoro všude. Jinými slovy řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutně konverguje pro μ-s.v. $x \in X$ a v těchto bodech x tedy také konverguje. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ a μ-skoro všude platí

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f_j \right| \leq g.$$

Tudíž z Lebesgueovy Věty 5.43 aplikované na posloupnost částečných součtů $\sum_{j=1}^{n} f_j$ dostaneme, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L$ a

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

□

Další tvrzení ukazuje, že funkce z prostoru L lze v jistém smyslu libovolně přesně aproximovat jednoduchými integrabilními funkcemi.

Věta 5.46: Nechť $f \in L$. Potom platí:

1. Pro každé $\epsilon > 0$ existuje jednoduchá integrabilní funkce $\phi = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}$ taková, že

$$\int |\phi - f| \mathrm{d}\mu < \epsilon.$$

2. Je-li μ Lebesgue–Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$, potom lze množiny E_j z definice ϕ volit jako konečná sjednocení otevřených intervalů.

3. Je-li μ Lebesgue–Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$, potom ke každému $\epsilon > 0$ existuje spojitá funkce g, která je konstantně nulová mimo kompaktní interval a platí

$$\int |f - g| \mathrm{d}\mu < \epsilon.$$

Důkaz. 1. Nechť $f \in L$. Z Věty 5.15 vyplývá, že existuje posloupnost jednoduchých integrabilních funkcí $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a μ-s.v. je $|\phi_n| \leq |f|$ a $\phi_n \to f$. Funkce $2|f| \in L$ je integrabilní majoranta posloupnosti $\{|\phi_n - f|\}_{n=1}^{\infty}$, neboť

$$|\phi_n - f| \leq |\phi_n| + |f| \leq 2|f|$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a μ-s.v. Proto můžeme aplikovat Lebesgueovu Větu 5.43, ze které vyplývá, že

$$\lim_{n \to \infty} \int |\phi_n - f| \mathrm{d}\mu = 0.$$

Tedy k danému $\epsilon > 0$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ dostatečně velké tak, že pro $\phi := \phi_{n_0}$ platí

$$\int |\phi_{n_0} - f| \mathrm{d}\mu < \epsilon,$$

což jsme chtěli dokázat.

2. Předpokládejme, že μ je Lebesgueova–Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak velké, aby pro $\phi := \phi_{n_0}$ platilo

$$\int |\phi - f| \mathrm{d}\mu < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dále uvažujme reprezentaci ϕ ve tvaru $\phi = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}$, kde $a_1, \ldots, a_m$ jsou navzájem různá **nenulová** čísla a $E_1, \ldots, E_m$ jsou po dvou disjunktní měřitelné množiny. Naším úmyslem je aplikovat Větu 4.49 na množiny E_j.

Všimněte si, že pro dvě množiny $E, F \in \mathcal{M}$ platí

$$\mu(E \Delta F) = \int |\chi_E - \chi_F| \mathrm{d}\mu,$$

neboť $|\chi_E - \chi_F| = \chi_{E\Delta F}$, kde $E \Delta F = E \setminus F \cup F \setminus E$ je symetrická diference množin E a F. Dále ověříme, že $\mu(E_j) < \infty$ pro každé $j \in \hat{m}$. Protože $|\phi| = \sum_{j=1}^{m} |a_j| \chi_{E_j}$, máme

$$\int_{E_j} |\phi| \mathrm{d}\mu = |a_j| \mu(E_j),$$

a proto

$$\mu(E_j) = \frac{1}{|a_j|} \int_{E_j} |\phi| \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{|a_j|} \int |f| \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Nyní můžeme aplikovat Větu 4.49 na množinu E_j, podle které existuje množina A_j, která je konečným sjednocením otevřených intervalů, tak, že platí

$$\mu(A_j \Delta E_j) < \frac{\epsilon}{2m|a_j|}$$

pro každé $j \in \hat{m}$. Hledanou jednoduchou funkci nyní můžeme zavést vztahem

$$\tilde{\phi} := \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}.$$

Pro ni totiž máme

$$\int |\tilde{\phi} - \phi| \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} |a_j| \mu\left(A_j \Delta E_j\right) < \frac{\epsilon}{2}$$

a celkem tedy

$$\int |\tilde{\phi} - f| \mathrm{d}\mu \leq \int |\tilde{\phi} - \phi| \mathrm{d}\mu + \int |\phi - f| \mathrm{d}\mu < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

3. Z tvrzení 2. vyplývá existence jednoduché funkce $\phi = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{I_j}$, kde $I_1, \ldots, I_m$ jsou otevřené intervaly, takové, že

$$\int |f - \phi| \mathrm{d}\mu < \frac{\epsilon}{2}.$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $I_1, \ldots, I_m$ jsou po dvou disjunktní a $c_j \neq 0$ pro každé $j \in \hat{m}$.

Idea důkazu je pro fixní $j \in \hat{m}$ aproximovat funkci χ_{I_j} spojitou funkcí g_j, která bude konstantně nulová vně intervalu obsahujícího I_j a $\int |\chi_j - g_j| \mathrm{d}\mu$ bude malý. Je-li $I_j = (a_j, b_j)$, potom můžeme volit g_j např. tak, že g_j má hodnotu 0 na $(-\infty, a_j] \cup [b_j + \delta, \infty)$, hodnotu 1 na $[a_j + \delta, b_j]$ a je lineární na $[a_j, a_j + \delta]$ a $[b_j, b_j + \delta]$ pro $\delta > 0$ malé. Potom je

$$\int |\chi_{I_j} - g_j| \mathrm{d}\mu \leq \mu((a_j, a_j + \delta]) + \mu((b_j, b_j + \delta]) = F(a_j + \delta) - F(a_j) + F(b_j + \delta) - F(b_j),$$

kde F je neklesající zprava spojitá funkce asociovaná s Lebesgueovou–Stieltjesovou mírou μ. Protože je F zprava spojitá, lze volbou dostatečně malého $\delta > 0$ udělat rozdíly $F(a_j+\delta)-F(a_j)$ a $F(b_j + \delta) - F(b_j)$ libovolně malé. Zvolme tedy $\delta > 0$ tak, aby

$$(\forall j \in \hat{m}) \left(F(a_j + \delta) - F(a_j) < \frac{\epsilon}{4m|c_j|} \quad \wedge \quad F(b_j + \delta) - F(b_j) < \frac{\epsilon}{4m|c_j|} \right).$$

Potom hledanou spojitou funkcí g pro tvrzení věty je $g := \sum_{j=1}^{m} c_j g_j$, neboť

$$\begin{aligned} \int |f - g| \mathrm{d}\mu \leq \int |f - \phi| \mathrm{d}\mu + \int |\phi - g| \mathrm{d}\mu < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{j=1}^{m} |c_j| \int |\chi_{I_j} - g_j| \mathrm{d}\mu \\ < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{j=1}^{m} |c_j| \left(\frac{\epsilon}{4m|c_j|} + \frac{\epsilon}{4m|c_j|} \right) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Poznámka: Později zavedeme metrický prostor $L^1(\mu)$ s metrikou definovanou integrálem $\int |f - g| \mathrm{d}\mu$ pro $f, g \in L^1(\mu)$. Poznamenejme již nyní, že Věta 5.46 říká, že prostor jednoduchých funkcí je hustý v $L^1(\mu)$. Je-li navíc μ Lebesgueova–Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$, je také prostor $C_c(\mathbb{R})$ spojitých funkcí s kompaktním nosičem (tzn. nulových vně kompaktního intervalu) hustý v $L^1(\mu)$; viz také Cvičení 5.9.

Jako poslední aplikaci Lebesgueovy věty si v této části odvodíme dvě užitečná tvrzení týkající se záměny limity/derivace a integrálu pro funkce závislé na reálném parametru.

Věta 5.47 (O limitě)**:** Nechť $-\infty < a < b < \infty$, $t_0 \in (a, b)$ a $f : X \times (a, b) \to \mathbb{C}$. Předpokládejme dále, že

i. $(\forall t \in (a, b))(f(\cdot, t)$ je měřitelná$)$,

ii. $(\mu\text{-s.v. } x \in X)(\lim_{t \to t_0} f(x, t) =: h(x))$,

iii. $(\exists g \in L)(\mu\text{-s.v. } x \in X)(\forall t \in (a,b))(|f(x,t)| \leq g(x))$.

Potom je $h \in L$ a platí:

$$\lim_{t \to t_0} \int f(x,t) \mathrm{d}\mu(x) = \int h(x) \mathrm{d}\mu(x).$$

Speciálně je-li $h(x) = f(x,t_0)$, tj. $f(x,\cdot)$ je spojitá v t_0 pro μ-s.v. $x \in X$, potom také funkce $F(t) := \int f(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$ je spojitá v bodě t_0.

Důkaz. Zvolme libovolně posloupnost $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a,b)$ tak, že $t_n \to t_0$ a označme

$$f_n(x) := f(x,t_n).$$

Z předpokladů i.-iii. plyne, že $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí, $f_n \to h$ μ-s.v. a existuje $g \in L$ taková, že $|f_n(x)| \leq g(x)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a μ-s.v. $x \in X$. Můžeme tedy aplikovat Lebesgueovu Větu 5.43, z níž plyne, že $h \in L$ a

$$\lim_{n \to \infty} \int f(x,t_n) \mathrm{d}\mu(x) = \int h \mathrm{d}\mu.$$

Tvrzení je nyní důsledkem Heineho Věty 2.75. □

Poznámka: Není nezbytné, aby f z Věty 5.47 byla definována v bodě t_0, jak čtenář snadno domyslí z důkazu. Uvedená formulace věty je zvolena pro jednoduchost. Dále technický krok použitý v důkazu, kdy místo limity $t \to t_0$ přecházíme k posloupnosti $t_n \to t_0$ a využíváme Heineho věty je nezbytný, protože Lebesgueova věta se týká pouze funkčních posloupností.

Věta 5.48 (O derivaci)**:** Nechť $-\infty < a < b < \infty$ a $f : X \times (a,b) \to \mathbb{C}$. Předpokládejme dále, že

i. $(\forall t \in (a,b))(f(\cdot,t)$ je integrabilní$)$,

ii. $(\mu\text{-s.v. } x \in X)(f(x,\cdot)$ je diferencovatelná na $(a,b))$,

iii.
$$(\exists g \in L)(\mu\text{-s.v. } x \in X)(\forall t \in (a,b)) \left(\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| \leq g(x) \right).$$

Potom je funkce $F(t) := \int f(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$ diferencovatelná na (a,b), $\partial_t f(\cdot,t) \in L$ a platí:

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \mathrm{d}\mu(x)$$

pro každé $t \in (a,b)$.

Důkaz. Zvolme libovolně $t_0 \in (a,b)$, posloupnost $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a,b) \setminus \{t_0\}$ takovou, že $t_n \to t_0$ a definujme

$$h_n(x) := \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}.$$

Podle předpokladu i. jsou funkce h_n měřitelné a podle předpokladu ii. existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$$

pro μ-s.v. $x \in X$. Dále z Věty o přírůstku a předpokladu iii. plyne, že pro μ-s.v. x a všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|h_n(x)| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_n)\right| \leq g(x),$$

kde $\xi_n \in (a, b)$.

Můžeme tedy aplikovat Lebesgueovu větu na posloupnost $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ a dostaneme, že $\partial_t f(\cdot, t_0) \in L$ a existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n\to\infty} \int h_n(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)\mathrm{d}\mu(x).$$

Jelikož byla posloupnost $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ volena libovolně, vyplývá z Heineho věty, že existuje limita

$$\lim_{t\to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)\mathrm{d}\mu(x).$$

To znamená, že je F diferencovatelná v bodě t_0 a pro její derivaci $F'(t_0)$ platí tvrzení věty. $\square$

Poznámka: Předpoklad i. ve Větě 5.48 je možné zeslabit a předpokládat měřitelnost $f(\cdot, t)$ pro všechna $t \in (a, b)$ a integrabilitu $f(\cdot, t_0)$ pro jedno nějaké $t_0 \in (a, b)$. Potom totiž dostaneme pro lib. $t \in (a, b)$ s pomocí Věty o přírůstku a předpokladu iii. odhad

$$|f(x, t)| \leq |f(x, t_0)| + g(x)|t - t_0|$$

platný pro μ-s.v. $x \in X$, z čehož plyne, že $f(\cdot, t) \in L$.

Poznámka: Poznamenejme, že interval (a, b), který vystupuje ve Větách 5.48 a 5.47, zejména v předpokladech iii. s integrabilní majorantou g, může být obsažen ve větší otevřené množině I (např. $I = \mathbb{R}$), na níž je funkce $f(x, \cdot)$ definována. Pokud předpoklady Vět 5.48 a 5.47 platí pro všechny $(a, b) \subset I$, kde ovšem majoranta g může záviset na a a b, dostaneme spojitost i diferencovatelnost funkce F na celém I, neboť jsou to lokální vlastnosti.

Příklad 5.49: Spočítáme integrál

$$F(t) := \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(t \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\mathrm{d}x,$$

kde $t \in \mathbb{R}$. Pomocí Věty 5.48 nejprve najdeme derivaci F. Označme $f : (0, \pi/2) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkci

$$f(x, t) := \frac{\operatorname{arctg}(t \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}.$$

Pro každé $t \in \mathbb{R}$ je funkce $f(\cdot, t)$ spojitá na $(0, \pi/2)$, a tudíž měřitelná. Dále pro každé $x \in (0, \pi/2)$ je funkce $f(x, \cdot)$ diferencovatelná na $\mathbb{R}$. Tedy předpoklady i. a ii. Věty 5.48 jsou splněny. Také předpoklad iii. je splněn, protože

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| = \frac{1}{1 + t^2 \operatorname{tg}^2 x} \leq 1$$

pro každé $(x, t) \in (0, \pi/2) \times \mathbb{R}$ a 1 je integrabilní funkce na $(0, \pi/2)$. Tedy podle Věty 5.48 máme

$$F'(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + t^2 \operatorname{tg}^2 x}$$

pro každé $\mathbb{R}$.

Poslední integrál již jednoduše spočítáme (jako Riemannův integrál). Všimněte si, že F je lichá funkce, a proto se stačí se omezit na $t \geq 0$. Po substituci $y = \operatorname{tg} x$ dostaneme

$$F'(t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + t^2 y^2} \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} = \frac{1}{t^2 - 1} \int_0^{\infty} \left(\frac{t^2}{1 + t^2 y^2} - \frac{1}{1 + y^2} \right) \mathrm{d}y,$$

kde pro platnost druhé rovnosti musíme navíc předpokládat, že $t \neq 1$. Odtud dále spočítáme, že

$$F'(t) = \frac{1}{t^2 - 1} \left[t \operatorname{arctg}(ty) - \operatorname{arctg} y \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{t+1}$$

pro $t \geq 0$, $t \neq 1$. Případ $t = 1$ bychom mohli počítat přímo, ale jednodušší je si všimnout, že z Věty 5.47 plyne, že F' je spojitá v bodě $t = 1$. Předpoklad iii. platí díky jednoduchému odhadu

$$\frac{1}{1 + t^2 y^2} \frac{1}{1 + y^2} \leq 1$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a $y \in (0, \infty)$. Také předpoklady i. a ii. jsou splněny (ověřte). Celkem tedy máme rovnost

$$F'(t) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{t+1}$$

pro všechna $t \geq 0$. Integrací dostaneme $F(t)$ až na aditivní konstantu $C \in \mathbb{R}$:

$$F(t) = \frac{\pi}{2} \ln(1 + t) + C, \quad t \geq 0.$$

Jelikož $F(0) = 0$, vyjde nám $C = 0$. Nakonec stačí F prodloužit jako lichou funkci na $(-\infty, 0)$ a dostaneme závěr:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ln(1 + t) & \text{pro } t \geq 0, \\ -\frac{\pi}{2} \ln(1 - t) & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$

5.4 Vztah Lebesgueova a Riemannova integrálu*

Je-li μ Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$, potom integrál vzhledem k μ vybudovaný v předchozí části se nazývá *Lebesgueův integrál*. Čtenář už zná z prvního ročníku integrál Riemannův, a proto je vhodné se na tomto místě podívat na vztah obou integrálů.

Připomeňme si stručně definici Riemannova integrálu. Dělením kompaktního intervalu $[a, b]$ rozumíme konečnou posloupnost bodů $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ splňující $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$. Nechť f je reálná omezená funkce definovaná na $[a, b]$. Horní a dolní integrální součet f při rozdělení σ jsou čísla

$$S_\sigma(f) := \sum_{i=1}^{m} M_i^{(f)} (x_i - x_{i-1}) \quad \text{a} \quad s_\sigma(f) := \sum_{i=1}^{m} m_i^{(f)} (x_i - x_{i-1}),$$

kde

$$M_i^{(f)} = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{a} \quad m_i^{(f)} = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Potom definujeme horní a dolní integrál vztahy

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x := \inf\{S_\sigma(f) \mid \sigma \text{ je dělení } [a, b]\},$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x := \sup\{s_\sigma(f) \mid \sigma \text{ je dělení } [a, b]\}.$$

Funkci f nazýváme riemannovsky integrabilní, právě když

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

Tuto společnou hodnotu nazýváme Riemannův integrál f na $[a, b]$ a značíme $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Věta 5.50: Buď $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omezená. Je-li f riemannovsky integrabilní na $[a, b]$, je f také (lebesgueovsky) integrabilní na $[a, b]$ a platí:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\mathrm{d}m.$$

Poznámka: Zde ještě striktně rozlišujeme ve značení, abychom odlišili Riemannův a Lebesgueův integrál. Je ale zcela běžné používat značení $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ pro Lebesgueův integrál $\int_{[a,b]} f\mathrm{d}m$.

Důkaz Věty 5.50. Stačí ukázat, že riemannovsky integrabilní funkce f je lebesgueovsky měřitelná, neboť integrabilita f potom plyne ihned z omezenosti f a intervalu $[a, b]$.

Nechť je f riemannovsky integrabilní na $[a, b]$. Pro libovolné dělení $\sigma = \{x_i\}_{i=0}^m$ intervalu $[a, b]$ definujme jednoduché funkce

$$G_\sigma := \sum_{i=1}^{m} M_i^{(f)} \chi_{(x_{i-1}, x_i]} \quad \text{a} \quad g_\sigma := \sum_{i=1}^{m} m_i^{(f)} \chi_{(x_{i-1}, x_i]}.$$

Potom $g_\sigma \le f \le G_\sigma$ na $[a,b]$ a platí

$$S_\sigma(f) = \int G_\sigma \mathrm{d}m \quad \text{a} \quad s_\sigma(f) = \int g_\sigma \mathrm{d}m.$$

Připomeňme dále, že z riemannovské integrability f plyne existence posloupnosti zjemňujících se rozdělení σ_n intervalu $[a,b]$, tj. $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$ pro každé n, jejichž norma $\|\sigma_n\| = \max_i |x_i - x_{i-1}| \to 0$ a pro kterou platí:

$$\lim_{n\to\infty} S_{\sigma_n}(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} s_{\sigma_n}(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Z inkluze $\sigma_n \subset \sigma_{n+1}$ plyne, že $G_{\sigma_n} \ge G_{\sigma_{n+1}}$ a $g_{\sigma_n} \le g_{\sigma_{n+1}}$. Díky této monotonii existují limitní funkce $G := \lim_{n\to\infty} G_{\sigma_n}$ a $g := \lim_{n\to\infty} g_{\sigma_n}$, které jsou konečné, protože

$$|G_{\sigma_n}| \le (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| < \infty \quad \text{a} \quad |g_{\sigma_n}| \le (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| < \infty$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z Lebesgueovy Věty 5.43 plyne, že g a G jsou lebesgueovsky měřitelné a

$$\int G\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int G_{\sigma_n}\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} S_{\sigma_n}(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

a podobně

$$\int g\mathrm{d}m = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Odtud plyne, že $\int (G-g)\mathrm{d}m = 0$ a protože $G \ge g$, je $G = g$ s.v. podle Věty 5.39. Vezmeme-li do úvahy také nerovnosti $g \le f \le G$, zjistíme, že $f = G$ s.v. Tudíž f je měřitelná a platí

$$\int f\mathrm{d}m = \int G\mathrm{d}m = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

$\square$

Z Věty 5.50 plyne, že Lebesgueova teorie integrálu v sobě zahrnuje teorii Riemannova (vlastního) integrálu. Podobně také funkce s absolutně konvergentním zobecněným Riemannanovým integrálem jsou lebesgueovsky integrabilní a oba integrály se shodují.

Věta 5.51: Nechť f má absolutně konvergentní Riemannův integrál na kompaktním intervalu $[a,b]$, potom je f (lebesgueovsky) integrabilní na $[a,b]$ a platí:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\mathrm{d}m.$$

Důkaz. Stačí předpokládat, že b je jediný kritický bod funkce f na $[a,b]$. Nejprve ukážeme, že f je lebesgueovsky měřitelná na $[a,b]$. Podle předpokladu je f riemannovsky integrabilní na $[a, b-1/n]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a proto podle Vět 5.50 a 5.5 máme

$$E_{\alpha,n} := \left\{ x \in \left[a, b-\frac{1}{n}\right] \;\middle|\; f(x) > \alpha \right\} \equiv f^{-1}((\alpha,\infty)) \cap \left[a, b-\frac{1}{n}\right] \in \mathcal{L}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Protože

$$E_\alpha := \{x \in [a,b] \mid f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\alpha,n} \cup F,$$

kde $F = \emptyset$, nebo $F = \{b\}$, v každém případě $F \in \mathcal{L}$, je také $E_\alpha \in \mathcal{L}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Z Věty 5.5 plyne, že f je lebesgueovsky měřitelná na $[a,b]$ a totéž platí o $|f|$.

Aplikujeme-li Větu 5.24 o monotónní konvergenci spolu s Větou 5.50, dostaneme

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_a^{b-1/n} |f(x)|\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b-1/n]} |f|\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int \chi_{[a,b-1/n]}|f|\mathrm{d}m \\ &= \int_{[a,b]} |f|\mathrm{d}m,\end{aligned}$$

a tudíž $f \in L([a,b])$. Nyní můžeme v rovnosti

$$\int_a^{b-1/n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b-1/n]} f\mathrm{d}m,$$

která je opět důsledkem Věty 5.50, poslat $n \to \infty$ a z Lebesgueovy Věty 5.43 dostaneme tvrzení o rovnosti integrálů. $\square$

Poznámka: Modifikací důkazu můžeme Větu 5.51 dokázat také pro funkce mající absolutně konvergentní Riemannův integrál na neomezených intervalech.

Tedy Lebesgueova teorie integrálu zahrnuje také funkce s absolutně konvergentním zobecněným Riemannovým integrálem. Na druhou stranu funkce s neabsolutně konvergentním Riemannovým integrálem už lebesguevsky integrabilní být nemusí, viz Příklad 5.52. V takovém případě je nějaké dodatečné rozšíření Lebesgueova integrálu nevyhnutelné. Někteří autoři zavádějí zobecněný Lebesgueův integrál na $\mathbb{R}$ pomocí limity podobně jako zobecněný Riemannův integrál, ale my se tímto zobecněním zde zabývat nebudeme.

Příklad 5.52: Uvažujme funkci

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{(n-1,n]}.$$

Potom

$$f^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \chi_{(2n-1,2n]} \quad \text{a} \quad f^- = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \chi_{(2n-2,2n-1]},$$

a proto

$$\int f^+\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty \quad \text{a} \quad \int f^-\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \infty.$$

Tudíž $f \notin L([0,\infty), \mathrm{d}m)$. Na druhou stranu f má neabsolutně konvergentní Riemannův integrál na $[0,\infty)$, neboť

$$\lim_{c\to\infty} \int_0^c f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

Příklad 5.53: Klasický příklad ilustrující tutéž skutečnost jako Příklad 5.52 je tzv. *Dirichletův integrál*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \tag{55}$$

jehož výpočet už není tak triviální. Upozorněme, že jde o zobecněný Riemannův integrál, který je definován příslušnou limitou, a nikoli Lebesgův integrál, protože funkce $\sin(x)/x$ není lebesgueovsky integrabilní na $(0, \infty)$. To ověříme níže. Obvyklý výpočet Dirichletova integrálu je založen na tzv. reziduové větě z komplexní analýzy, kterou zde nemůžeme aplikovat. Výpočet, který si ukážeme, využívá již nabytých znalostí o Fourierových řadách.

1. Označme

$$g(x) := \frac{\sin x}{x}$$

pro $x > 0$. Nejprve ověříme, že $g \notin L((0, \infty), \mathrm{d}m)$. Jelikož

$$g^+(x) = \frac{\sin x}{x} \left(\chi_{(0,\pi/2)} + \sum_{j=2}^\infty \chi_{((2j-1)\pi/2,(2j+1)\pi/2)} \right),$$

můžeme odhadovat

$$\int g^+ \mathrm{d}m \geq \sum_{j=2}^\infty \frac{1}{(2j-1)\pi/2} \int_{(2j-1)\pi/2}^{(2j+1)\pi/2} \sin(x) \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi} \sum_{j=2}^\infty \frac{1}{2j-1} = \infty.$$

Podobně se ukáže, že také

$$\int g^- \mathrm{d}m = \infty.$$

Odtud plyne, že g není integrabilní na $(0, \infty)$.

2. Dále dokážeme (55). Konvergence zobecněného Riemannova integrálu v (55) plyne z Dirichletova kritéria.

Uvažujme funkci

$$f(x) := \frac{\sin(x/2)}{x}$$

na intervalu $[-\pi, \pi]$ dodefinovanou spojitě v bodě $x = 0$, tj. $f(0) = 1/2$. Podle Věty 1.64 konverguje Fourierova řada funkce f na $(-\pi, \pi)$ k funkci f v každém bodě intervalu $[-\pi, \pi]$, speciálně v bodě $x = 0$. Dále aplikací Věty 1.58 dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = f(0) &= \lim_{n\to\infty} F_n(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} \mathrm{d}t \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)t)}{t} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

V posledním integrálu provedeme substituci $x = (n + 1/2)t$ a po drobné úpravě máme

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \int_{-(n+1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = 2 \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x,$$

z čehož plyne rovnost (55).

Ukážeme si ještě jednu zajímavou větu, která je Lebesgueovou charakterizací riemannovské intebrability. Rozhodnout, zda je daná omezená funkce na kompaktním intervalu riemannovsky integrabilní, nemusí být jednoduchý úkol. Následující věta může tento problém značně zjednodušit.

Věta 5.54 (Lebesgueovo kritérium riemannovské integrability)**:** Omezená funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrabilní, právě když

$$m\left(\{x \in [a, b] \mid f \text{ není spojitá v } x\}\right) = 0.$$

Důkaz. Než se pustíme do samotného důkazu, uvedeme definici oscilace f na množině a v bodě a její základní vlastnosti. Je-li $A \subset [a, b]$, potom číslo

$$\omega_f(A) := \sup_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} f(x) = \sup_{x,y\in A} |f(x) - f(y)|$$

nazýváme *oscilace f na A*. Všimněte si, že $\omega_f(A) \leq \omega_f(B)$, pokud $A \subset B$. Je-li $x \in [a, b]$, nazýváme číslo

$$\omega_f(x) := \inf_{\delta>0} \omega_f(B_x(\delta) \cap [a, b]) = \inf_{\delta\to 0+} \omega_f(B_x(\delta) \cap [a, b])$$

oscilace f v bodě x. Následující vlastnosti oscilace funkce použijeme dále. Jejich ověření je přenecháno čtenáři jako Cvičení 5.10.

- Funkce f je spojitá v bodě x, právě když $\omega_f(x) = 0$.
- Pro každé $\alpha > 0$ je množina $\{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) < \alpha\}$ otevřená v $[a, b]$.
- Pro každé $\alpha > 0$ je množina $\{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) \geq \alpha\}$ uzavřená v $[a, b]$.

1. Implikace ($\Rightarrow$): Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrabilní. Označme

$$N(\alpha) := \{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) \geq \alpha\},$$

kde $\alpha > 0$. Protože

$$\{x \in [a, b] \mid f \text{ není spojitá v } x\} = \{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} N\left(\frac{1}{n}\right),$$

stačí dokázat, že $m(N(\alpha)) = 0$ pro libovolné $\alpha > 0$.

Zvolme pevně $\alpha > 0$ a $\epsilon > 0$. Z riemannovské integrability f na $[a, b]$ plyne, že existuje dělení $\sigma = \{x_i\}_{i=0}^m$ intervalu $[a, b]$ takové, že

$$S_\sigma(f) - s_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{m} \omega_f\left([x_{i-1}, x_i]\right)(x_i - x_{i-1}) < \alpha\epsilon.$$

Označme $F := \{i \in \hat{m} \mid (x_{i-1}, x_i) \cap N(\alpha) \neq \emptyset\}$. Pro každý index $i \in F$ je $\omega_f\left([x_{i-1}, x_i]\right) \geq \alpha$, a tudíž

$$\alpha \sum_{i \in F} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{m} \omega_f\left([x_{i-1}, x_i]\right)(x_i - x_{i-1}) < \alpha\epsilon.$$

Odtud plyne, že

$$\sum_{i \in F} m\left((x_i, x_{i-1})\right) = \sum_{i \in F} (x_i - x_{i-1}) < \epsilon.$$

Intervaly $\{(x_i, x_{i-1}) \mid i \in F\}$ pokrývají množinu $N(\alpha)$ s možnou výjimkou bodů $\{x_0, \dots, x_m\}$, což je ale množina Lebesgueovy míry nula.

Celkem tedy jsme k libovolnému $\epsilon > 0$ našli množinu $E_\epsilon \in \mathcal{L}$ takovou, že $N(\alpha) \subset E_\epsilon$ a $m(E_\epsilon) < \epsilon$. Položme

$$E := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{1/n}.$$

Potom $N(\alpha) \subset E$ a $m(E) = 0$ a z úplnosti míry m plyne, že $N(\alpha)$ je měřitelná a $m(N(\alpha)) = 0$.

2. Implikace $(\Leftarrow)$: Podle předpokladu je $m(\{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > 0\}) = 0$. Zvolme $\epsilon > 0$. Potom $N(\epsilon) \subset \{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > 0\}$, a proto $m(N(\epsilon)) = 0$. Množina $N(\epsilon)$ je uzavřená a omezená, tedy kompaktní. Podle 2. tvrzení Lemma 4.46 lze množinu $N(\epsilon)$ pokrýt spočetně mnoha otevřenými intervaly, jejichž celková Lebesgueova míra je menší než ϵ. Díky kompaktnosti $N(\epsilon)$, existuje konečný počet těchto otevřených intervalů pokrývajících $N(\epsilon)$. Označme je $U_1, \dots U_k$ a jejich uzávěry $I_1, \dots, I_k$. Tedy

$$N(\epsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{k} m(U_i) = \sum_{i=1}^{k} m(I_i) < \epsilon.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že intervaly $I_1, \dots, I_k$ jsou po dvou disjunktní, jinak bychom každé dva intervaly s neprázdným průnikem spojili do jednoho intervalu.

Množina $K := [a, b] \setminus \cup_{i=1}^{k} U_i$ je konečné sjednocení po dvou disjunktních uzavřených intervalů a pro každé $x \in K$ je $\omega_f(x) < \epsilon$. Označme si tyto intervaly $J_1, \dots, J_l$. O těchto intervalech můžeme předpokládat, že $\omega_f(J_j) < \epsilon$ pro každé $j \in \hat{l}$. Pokud by tomu tak nebylo, lze rozdělit J_j na konečně mnoho uzavřených podintervalů tak, že oscilace f na každém dělícím intervalu už bude menší než ϵ. Ukažme si, že to lze skutečně provést. Nechť $J \subset [a, b]$ je uzavřený interval takový, že $(\forall x \in J)(\omega_f(x) < \epsilon)$. Z definice $\omega_f(x)$ vyvodíme, že

$$(\forall x \in J)(\exists \delta_x > 0)(\omega_f(\overline{B_x(\delta_x)} \cap [a, b]) < \epsilon).$$

Systém otevřených intervalů $\{B_x(\delta_x)\}_{x \in J}$ je otevřené pokrytí kompaktu J, a proto z nich lze vybrat konečně mnoho intervalů, které stále pokrývají J. Jejich různé koncové body obsažené v J můžeme uspořádat a označit $t_1, \dots t_{r-1} \in J$. Označíme-li ještě t_0 a t_r koncové body J, dostáváme dělení J, pro jehož dílčí intervaly platí

$$(\forall s \in \hat{r})(\omega_f([t_{s-1}, t_s]) < \epsilon),$$

neboť pro každé $s \in \hat{r}$ existuje nějaké $x \in J$ tak, že $[t_{s-1}, t_s] \subset \overline{B_x(\delta_x)}$.

Celkem tedy máme intervaly $I_1, \dots, I_k, J_1, \dots, J_l$, které představují dělení σ intervalu $[a, b]$ a platí pro ně, že

$$\sum_{i=1}^{k} m(I_i) < \epsilon \quad \text{a} \quad (\forall j \in \hat{l})(\omega_f(J_j) < \epsilon).$$

Dílčí body dělení σ si označme $x_0, \dots, x_m$. Potom máme

$$\begin{aligned} S_\sigma(f) - s_\sigma(f) &= \sum_{i=1}^{m} \omega_f\left([x_{i-1}, x_i]\right)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k} \omega_f\left(I_i\right) m(I_i) + \sum_{j=1}^{l} \omega_f\left(J_j\right) m(J_j) \\ &\le \sum_{i=1}^{k} 2\|f\|_\infty m(I_i) + \sum_{j=1}^{l} \epsilon m(J_j) < 2\|f\|_\infty \epsilon + \epsilon(b-a), \end{aligned}$$

kde $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Poslední výraz lze udělat libovolně malý vhodnou volbou ϵ, z čehož plyne, že f je riemannovsky integrabilní na $[a, b]$. $\square$

Příklad 5.55: Riemannova funkce (nebo též Thomaeova) je definována vztahem

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{je-li } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & \text{je-li } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ a } p, q \text{ nesoudělná.} \end{cases}$$

Ověříme, že f je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a není spojitá na $\mathbb{Q}$.

Funkce f není spojitá na $\mathbb{Q}$: Buď $r \in \mathbb{Q}$. Zvolme posloupnost iracionálních čísel r_n konvergujících k r, např. $r_n := r + \sqrt{2}/n$. Potom je $f(r_n) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $f(r) > 0$. Tudíž $f(r_n)$ nekonverguje k $f(r)$, a proto f není spojitá v r.

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Buď $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a $\epsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $1/n_0 < \epsilon$. Jelikož je v intervalu $(a-1, a+1)$ pouze konečně mnoho racionálních čísel, jejichž jmenovatel je menší než n_0 (rozmyslete), najdeme $\delta > 0$ dostatečně malé tak, aby interval $(a - \delta, a + \delta)$ neobsahoval žádné racionální číslo se jmenovatelem menším než n_0. Potom pro každé $x \in (a - \delta, a + \delta)$ je

$$|f(x) - f(a)| = |f(x)| < \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Tudíž f je spojitá v bodě a.

Protože $m(\mathbb{Q}) = 0$, plyne z Věty 5.54, že f je riemannovsky integrabilní na libovolném kompaktním intervalu $[a, b]$. Navíc podle Věty 5.50 se Riemannův integrál f na $[a, b]$ shoduje s Lebesgueovým, z čehož vyvodíme, že

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = 0,$$

neboť $f = 0$ s.v.

Ukažme si ještě příklad riemannovsky integrabilní funkce, která je nespojitá na množině mohutnosti kontinua.

Příklad 5.56: Uvažujme charakteristickou funkci χ_C Cantorovy množiny C z Příkladu 4.51. Jelikož je C totálně nesouvislá, viz Cvičení 4.10, existuje k libovolnému bodu $c \in C$ posloupnost $x_n \in [0, 1] \setminus C$ tak, že $x_n \to c$. Tzn., že $\chi_C(x_n) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, kdežto $\chi_C(c) = 1$. Proto χ_C není spojitá na C. Naopak z toho, že C je kompaktní, a tudíž $[0, 1]\setminus C$ je otevřená, vyvodíme, že χ_C je spojitá funkce na $[0, 1] \setminus C$.

Jak víme z Příkladu 4.51, $m(C) = 0$, a proto je podle Věty 5.54 χ_C riemannovsky integrabilní funkce na $[0, 1]$. Navíc podle Věty 5.50 dostaneme okamžitě hodnotu Riemannova integrálu

$$\int_0^1 \chi_C(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Lebesgueova teorie nabízí dvě zásadní výhody oproti Riemannově teorii. Za prvé máme k dispozici mocné limitní věty jako je Věta o monotónní konvergenci a Lebesgueova věta. Tyto věty jsou zásadním argumentem v mnoha dalších výsledcích a nelze je dokázat pro Riemannův integrál.

Za druhé Lebesgueův integrál umožňuje integrovat mnohem větší třídu funkcí. Např. Dirichletova funkce $\chi_{\mathbb{Q}}$ není riemannovsky integrabilní na žádném intervalu $[a, b]$, neboť není nikde spojitá. Z hlediska Lebesgueovy teorie je $\chi_{\mathbb{Q}} = 0$ s.v., tudíž je integrabilní a $\int \chi_{\mathbb{Q}}\mathrm{d}m = 0$. Samozřejmě tuto větší obecnost zřídka využijeme při výpočtu konkrétních integrálů, protože integrály klasické analýzy typicky integrují riemannovsky integrabilní funkce. Avšak zcela zásadní důsledek větší množiny lebesgueovsky integrabilních funkcí je, že mnoho metrických prostorů, jejichž metrika je definována pomocí Lebesgueova integrálu, jako např. prostory L^p, jsou **úplné** metrické prostory (viz Věta 5.87). To má fundamentální důsledky jak v teorii funkčních prostorů, tak v mnoha aplikacích, které využívají těchto metrických prostorů.

5.5 Součin měr a Fubiniho–Tonelliho věta

Uvažujme dva prostory s mírou $(X, \mathcal{M}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{N}, \nu)$. Jak už víme z minulé kapitoly, systém množin $\mathcal{M}\times\mathcal{N} = \{A\times B \mid A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}\}$, které bychom mohli nazývat *měřitelné obdélníky*, není σ-algebra na $X \times Y$. Proto jsme zavedli $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ jako σ-algebru generovanou $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$, tj. minimální σ-algebru obsahující měřitelné obdélníky. Naším cílem bude zavést na $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ míru $\mu \otimes \nu$ splňující

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \tag{56}$$

pro každé $A \in \mathcal{M}$ a $B \in \mathcal{N}$. Ze zřejmých důvodů se $\mu \otimes \nu$ nazývá *součinem měr* μ a ν nebo též *součinovou (produktovou) mírou.*

Idea definice součinové míry staví opět na obecné Carathéodoryho konstrukci míry z pramíry na algebře. Tuto konstrukci provedeme v následujících odstavcích. Po celu dobu předpokládáme, že jsou dány dva prostory s mírou $(X, \mathcal{M}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{N}, \nu)$.

Lemma 5.57: Systém $\mathcal{A}$ konečných sjednocení po dvou disjunktních měřitelných obdélníků je algebra na $X \times Y$.

Důkaz. Podle Lemma 4.16 stačí ukázat, že měřitelné obdélníky $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ tvoří elementární systém.

Zřejmě $\emptyset = \emptyset \times \emptyset$, a proto $\emptyset \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$. Zbylé dvě vlastnosti z definice elementárního systému vyplývají z následujících rovností:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

a

$$(A \times B)^c = (X \times B^c) \cup (A^c \times B),$$

které platí pro libovolné $A, C \subset X$ a $B, D \subset Y$ a které se ověří přímo z definice kartézského součinu množin. □

Na algebře $\mathcal{A}$ konečných sjednocení po dvou disjunktních měřitelných obdélníků definujeme zobrazení $\pi : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ vztahem

$$\pi(E) := \sum_{j=i}^{n} \mu(A_i)\nu(B_i),$$

kde $E = \cup_{i=1}^{n} A_i \times B_i \in \mathcal{A}$. Připomeňme, že i zde používáme konvenci $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Lemma 5.58: Definice π je korektní, tj. hodnota $\pi(E)$ nezávisí na reprezentaci množiny $E \in \mathcal{A}$. Dále π je pramíra na algebře $\mathcal{A}$.

Důkaz. Ověříme nejprve korektnost definice π. K tomu účelu předpokládejme, že měřitelný obdélník $A \times B$ je sjednocením po dvou disjunktních měřitelných obdélníků $A_k \times B_k$, jejichž počet může být konečný i spočetně nekonečný. Druhá možnost se nám bude hodit dále, a proto rozsah pro index k nebudeme specifikovat. Tedy

$$A \times B = \bigcup_k A_k \times B_k.$$

Potom pro libovolné $x \in X$ a $y \in Y$ máme

$$\chi_A(x)\chi_B(y) = \chi_{A\times B}(x, y) = \sum_k \chi_{A_k\times B_k}(x, y) = \sum_k \chi_{A_k}(x)\chi_{B_k}(y).$$

Zintegrujeme-li tuto rovnost vzhledem k μ a použijeme Větu 5.26, dostaneme rovnost

$$\mu(A)\chi_B(y) = \sum_k \mu(A_k)\chi_{B_k}(y)$$

pro každé $y \in Y$. Zintegrujeme ještě jednou tentokrát vzhledem k ν a vyvodíme rovnost

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_k \mu(A_k)\nu(B_k). \tag{57}$$

Pro ověření toho, že hodnota $\pi(E)$ nezávisí na reprezentaci $E \in \mathcal{A}$, předpokládejme, že

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i = \bigcup_{j=1}^{m} C_j \times D_j$$

kde $\{A_i \times B_i\}_{i=1}^n$ a $\{C_j \times D_j\}_{j=1}^m$ jsou po dvou disjunktní měřitelné obdélníky. Potom pro každé $i \in \hat{n}$ je

$$A_i \times B_i = A_i \times B_i \cap E = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap C_j) \times (B_i \cap D_j)$$

a množiny $\{(A_i \cap C_j) \times (B_i \cap D_j)\}_{j=1}^m$ jsou po dvou disjunktní. Podobně

$$C_j \times D_j = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap C_j) \times (B_i \cap D_j)$$

pro každé $j \in \hat{m}$. Odtud a z pozorování (57) vyvodíme, že

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i)\nu(B_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu\left(A_i \cap C_j\right) \nu\left(B_i \cap D_j\right) = \sum_{j=1}^m \mu(C_j)\nu(D_j),$$

což jsme chtěli ukázat.

Zbývá ověřit, že π je pramíra na $\mathcal{A}$. Zřejmě $\pi(\emptyset) = \mu(\emptyset)\nu(\emptyset) = 0$, a proto stačí dokázat σ-aditivitu π. Uvažujme tedy posloupnost $\{A_k \times B_k\}_{k=1}^\infty$ po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}$ takovou, že $\cup_{k=1}^\infty A_k \times B_k \in \mathcal{A}$. Vzhledem k aditivní definici π stačí předpokládat, že $\cup_{k=1}^\infty A_k \times B_k \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ (rozmyslete), tj. $\cup_{k=1}^\infty A_k \times B_k = A \times B$ pro nějaká $A \in \mathcal{M}$ a $B \in \mathcal{N}$. Jelikož $A_k \times B_k \in \mathcal{A}$, lze množinu vyjádřit

$$A_k \times B_k = \bigcup_{i=1}^{n_k} A_i^{(k)} \times B_i^{(k)},$$

kde $\{A_i^{(k)} \times B_i^{(k)}\}_{i=1}^{n_k}$ jsou po dvou disjunktní měřitelné obdélníky. Potom je množina $A \times B$ spočetným sjednocením po dvou disjunktních měřitelných obdélníků

$$A \times B = \bigcup_{k=1}^\infty \bigcup_{i=1}^{n_k} A_i^{(k)} \times B_i^{(k)},$$

a proto můžeme aplikovat rovnost (57). Použijeme-li také definici π, dostaneme

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=1}^{n_k} \mu(A_i^{(k)})\nu(B_i^{(k)}) = \sum_{k=1}^\infty \pi(A_k \times B_k),$$

což jsme chtěli ověřit. $\square$

Nyní již je všechno připraveno na aplikaci Carathéodoryho metody kontrukce míry z pramíry π na algebře $\mathcal{A}$. Samozřejmě algebra $\mathcal{A}$ generuje σ-algebru $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Tedy podle Lemma 4.37 určuje π vnější míru π^* na $X \times Y$, jejíž zúžení na $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ je podle Věty 4.38 míra, kterou jsme chtěli zkonstruovat.

Definice 5.59 (Součin měr)**:** Nechť π^* je vnější míra na $X \times Y$ určená pramírou π na algebře $\mathcal{A}$ definovaných výše. Míru

$$\mu \otimes \nu := \pi^* \restriction \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$$

nazýváme *součinem měr* μ a ν.

Jsou-li míry μ a ν σ-konečné, tj. existují $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, kde $\mu(A_i) < \infty$ pro každé $i \in \mathbb{N}$ tak, že $X = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ a podobně $\{B_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}$, kde $\nu(B_j) < \infty$ pro každé $j \in \mathbb{N}$ tak, že $Y = \cup_{j=1}^{\infty} B_j$. Potom $X \times Y = \cup_{i,j=1}^{\infty} A_i \times B_j$ a $\mu \otimes \nu(A_i \times B_j) = \mu(A_i)\nu(B_j) < \infty$ pro všechna $i, j \in \mathbb{N}$. Tudíž π je σ-konečná pramíra, a tedy i míra $\nu \otimes \mu$ je σ-konečná. Navíc podle podle Věty 4.38 je $\nu \otimes \mu$ jediná míra na $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ splňující (56).

Naším cílem je najít vztah mezi integrací vzhledem k součinové míře $\mu \otimes \nu$ a integrací vzhledem k mírám μ a ν. Pro tyto výsledky bude předpoklad σ-konečnosti měr μ a ν nezbytný.

Poznámka: Pro jednoduchost zde uvažujeme jen dva prostory s mírou, ovšem stejnou konstrukcí se zavede součin libovolného konečného počtu měr. Konkrétně jsou-li $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, $\ldots$, $(X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n)$ dané prostory s mírou, potom systém $\mathcal{A}$ konečných sjednocení množin tvaru $A_1 \times \cdots \times A_n$, kde $A_i \in \mathcal{M}_i$, $i \in \hat{n}$, je algebra a analogickým postupem zkonstruujeme součinovou míru $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ na σ-algebře $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n$ splňující

$$\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n \left(A_1 \times \cdots \times A_n\right) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i),$$

kde $A_i \in \mathcal{M}_i$, $i \in \hat{n}$. Navíc jsou-li μ_i σ-konečné míry pro všechna $i \in \hat{n}$, je míra $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ na $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n$ určena jednoznačně vlastností výše. Také očekávatelná asociativita $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3) = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3$ platí. Detaily přenecháme čtenáři.

Uvažujme stále dva prostory s mírou $(X, \mathcal{M}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{N}, \nu)$. Pro budoucí potřeby zavedeme následující terminologii.

Definice 5.60 (Řez množiny)**:** Nechť $E \subset X \times Y$, $x \in X$ a $y \in Y$. Množiny

$$E_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in E\} \quad \text{a} \quad E^y := \{x \in X \mid (x, y) \in E\}$$

nazýváme *x-řez* a *y-řez množiny* E.

Lemma 5.61: Je-li $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, potom $(\forall x \in X)(E_x \in \mathcal{N})$ a $(\forall y \in Y)(E^y \in \mathcal{M})$.

Důkaz. Pro potřeby důkazu uvažujme systém

$$\mathcal{R} := \{E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \mid (\forall x \in X)(E_x \in \mathcal{N}) \text{ a } (\forall y \in Y)(E^y \in \mathcal{M})\}.$$

Systém $\mathcal{R}$ obsahuje měřitelné obdélníky, tj. $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$, neboť např.

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B, & \text{je-li } x \in A, \\ \emptyset, & \text{je-li } x \notin A. \end{cases}$$

Dále pro libovolnou množinu $E \subset X \times Y$ a posloupnost $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X \times Y$ platí rovnosti

$$\left(E^c\right)_x = \left(E_x\right)^c \quad \text{a} \quad \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(E_n\right)_x$$

a podobně pro y-řezy (ověřte). Odtud plyne, že $\mathcal{R}$ je σ-algebra. Potom podle Lemma 4.7 je $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{R}$, což implikuje tvrzení.

□

K odvození hlavního výsledku budeme ještě potřebovat jeden pomocný výsledek týkající se tzv. *monotónních tříd*.

Definice 5.62 (Monotónní třída)**:** Neprázdný systém množin $\mathcal{C} \subset 2^X$ nazýváme *monotónní třída* na X, právě když platí:

1. Je-li $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}$ a $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$, pak $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{C}$.
2. Je-li $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}$ a $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$, pak $\cap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{C}$.

Zřejmě každá σ-algebra je monotónní třída. Také se jednoduše ověří, že průnik monotónních tříd je monotónní třída, a proto můžeme definovat monotónní třídu generovanou systémem množin jako nejmenší monotónní třídu, která systém obsahuje podobně, jako jsme to udělali v případě σ-algeber.

Definice 5.63 (Monotónní třída generovaná systémem množin)**:** Nechť $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset 2^X$. Minimální monotónní třídu obsahující $\mathcal{E}$, tj. systém

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{C} \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{C} \ \wedge \ \mathcal{C} \text{ je monotónní třída}\},$$

nazýváme *monotónní třída generovaná systémem* $\mathcal{E}$.

Lemma 5.64 (O monotónních třídách)**:** Nechť $\mathcal{A}$ je algebra. Potom σ-algebra generovaná $\mathcal{A}$ a monotónní třída generovaná $\mathcal{A}$ jsou totožné systémy, tj.

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}(\mathcal{A}).$$

Důkaz. Pro stručnost budeme v důkazu psát $\mathcal{C} := \mathcal{C}(\mathcal{A})$ a $\mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Jelikož je $\mathcal{M}$ také monotónní třída, která obsahuje $\mathcal{A}$, je $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$. Opačnou inkluzi $\mathcal{C} \supset \mathcal{M}$ dokážeme, ukážeme-li, že $\mathcal{C}$ je σ-algebra.

Definujme si pro každé $E \in \mathcal{C}$ pomocný systém

$$\mathcal{C}_E := \{F \in \mathcal{C} \mid E \setminus F \in \mathcal{C} \ \wedge \ F \setminus E \in \mathcal{C} \ \wedge \ E \cap F \in \mathcal{C}\}.$$

Zřejmě $\emptyset, E \in \mathcal{C}_E$ a $F \in \mathcal{C}_E \ \Leftrightarrow \ E \in \mathcal{C}_F$. Dále je jednoduché ověřit, že $\mathcal{C}_E$ je monotónní třída (proveďte).

Je-li $E \in \mathcal{A}$, potom $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_E$, protože je $\mathcal{A}$ algebra. Odtud dále plyne, že $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_E$ pro každé $E \in \mathcal{A}$, protože je $\mathcal{C}$ nejmenší monotónní třída obsahující $\mathcal{A}$. Tedy

$$(\forall F \in \mathcal{C})(\forall E \in \mathcal{A})(F \in \mathcal{C}_E),$$

což je ekvivalentní tvrzení

$$(\forall F \in \mathcal{C})(\forall E \in \mathcal{A})(E \in \mathcal{C}_F),$$

neboli $(\forall F \in \mathcal{C})(\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_F)$ a odtud dále plyne

$$(\forall F \in \mathcal{C})(\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_F), \tag{58}$$

protože je $\mathcal{C}$ nejmenší monotónní třída obsahující $\mathcal{A}$.

Z inkluze (58) vyplývá, že $(\forall E, F \in \mathcal{C})(E \setminus F \in \mathcal{C} \ \wedge E \cap F \in \mathcal{C})$. Tedy $\mathcal{C}$ je uzavřený na konečné průniky a položíme-li $E := X \in \mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, zjistíme, že $\mathcal{C}$ je uzavřený také na doplňky. Odtud plyne, že $\mathcal{C}$ je uzavřený i na konečná sjednocení, a tedy $\mathcal{C}$ je algebra.

Nakonec je-li $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}$, potom

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(F_n := \bigcup_{j=1}^{n} E_j \in \mathcal{C} \right).$$

Protože $F_n \subset F_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, dostáváme $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{C}$, neboť $\mathcal{C}$ je monotónní třída. Tím jsme ověřili, že $\mathcal{C}$ je σ-algebra. □

Nyní máme vše připraveno pro to, abychom dokázali vztah pro součinovou míru $\mu \otimes \nu$ pomocí integrace vzhledem k jednotlivým mírám μ a ν, což bude hlavní ingredience pro důkaz Fubiniho–Tonelliho věty.

Věta 5.65: Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ jsou prostory se σ-konečnými mírami μ a ν. Potom pro každé $E \subset \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ je funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ resp. $y \mapsto \mu(E^y)$ $\mathcal{M}$-měřitelná resp. $\mathcal{N}$-měřitelná a platí:

$$\mu \otimes \nu(E) = \int \nu(E_x) \mathrm{d}\mu(x) = \int \mu(E^y) \mathrm{d}\nu(y).$$

Důkaz. 1) Tvrzení nejprve dokážeme pro případ, že míry μ a ν jsou konečné. Označme $\mathcal{C}$ systém množin $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, pro které platí tvrzení věty. V několika krocích dokážeme inkluzi $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{C}$, čímž bude věta dokázána.

a) Nejprve ukážeme, že $\mathcal{M} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{C}$. Buď $E = A \times B$ měřitelný obdélník z $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$. Potom

$$\nu(E_x) = \chi_A(x)\nu(B) \quad \text{a} \quad \mu(E^y) = \mu(A)\chi_B(y)$$

pro všechna $x \in X$ a $y \in Y$. Tudíž jsou funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ a $y \mapsto \mu(E^y)$ měřitelné a také platí rovnosti

$$\mu \otimes \nu(E) = \mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B),$$

$$\int \nu(E_x) \mathrm{d}\mu(x) = \nu(B) \int \chi_A(x) \mathrm{d}\mu(x) = \mu(A)\nu(B)$$

a

$$\int \nu(E^y) \mathrm{d}\nu(y) = \mu(A) \int \chi_B(y) \mathrm{d}\nu(y) = \mu(A)\nu(B).$$

Z toho plyne, že $E = A \times B \in \mathcal{C}$.

b) Snadno rozšíříme předchozí část a ukážeme, že $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, kde $\mathcal{A}$ je algebra konečných sjednocení po dvou disjunktních měřitelných obdélníků z $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$. Skutečně pokud $E = \cup_{j=1}^{m} E_j$, kde $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ jsou po dvou disjunktní, potom $E_x = \cup_{j=1}^m (E_j)_x$ a $E^y = \cup_{j=1}^m (E_j)^y$, a tudíž s využitím bodu a) zjistíme, že funkce

$$x \mapsto \nu(E_x) = \sum_{j=1}^m \nu((E_j)_x) \quad \text{a} \quad y \mapsto \mu(E^y) = \sum_{j=1}^m \mu((E_j)^y)$$

jsou měřitelné,

$$\int \nu(E_x) \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{j=1}^m \int \nu((E_j)_x) \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{j=1}^m \mu \otimes \nu(E_j) = \mu \otimes \nu(E)$$

a podobně pro druhý integrál. Tedy $E \in \mathcal{C}$.

c) Dále ukážeme, že $\mathcal{C}$ je monotónní třída. Potom už s využitím Lemma 5.64 dostaneme kýženou inkluzi, neboť $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \mathcal{C}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) \subset \mathcal{C}$.

i) Nechť $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}$, $E_n \subset E_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $E := \cup_{j=1}^\infty E_j$. Potom pro každé $x \in X$ platí:

$$(E_n)_x \in \mathcal{N}, \quad (E_n)_x \subset (E_{n+1})_x \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N} \text{ a } E_x = \bigcup_{j=1}^\infty (E_j)_x \,,$$

kde jsme použili 1. tvrzení Lemma 5.61. Definujme funkce $f_n : X \to [0, \infty]$ vztahem

$$f_n(x) := \nu\left((E_n)_x\right). \tag{59}$$

Jelikož $E_n \in \mathcal{C}$, je f_n $\mathcal{M}$-měřitelná, dále $f_n \leq f_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a díky spojitosti míry ν zdola, viz Věta 4.24, máme

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \nu(E_x) =: f(x)$$

pro každé $x \in X$. Nyní podle Věty 5.24 o monotónní konvergenci je f $\mathcal{M}$-měřitelná funkce a platí:

$$\begin{aligned}\int_X \nu(E_x) \mathrm{d}\mu(x) &= \int_X f(x) \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x) \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n \to \infty} \int_X \nu\left((E_n)_x\right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \lim_{n \to \infty} \mu \otimes \nu(E_n) = \mu \otimes \nu(E),\end{aligned}$$

kde poslední rovnost platí díky spojitosti míry $\mu \otimes \nu$ zdola. Analogicky se ukáže, že také funkce $y \mapsto \mu(E^y)$ je $\mathcal{N}$-měřitelná a platí rovnost

$$\int_Y \mu(E^y) \mathrm{d}\nu(y) = \mu \otimes \nu(E).$$

Tudíž $\mathcal{C}$ splňuje první vlastnost z definice monotónní třídy.

ii) Podobně ověříme i druhou vlastnost. Nechť $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}$, $E_n \supset E_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $E := \cap_{j=1}^\infty E_j$. Potom opět s využitím Lemma 5.61 máme

$$(E_n)_x \in \mathcal{N}, \quad (E_n)_x \supset (E_{n+1})_x \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N} \text{ a } E_x = \bigcap_{j=1}^\infty (E_j)_x$$

pro každé $x \in X$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou funkce f_n definované vztahem (59) $\mathcal{M}$-měřitelné, $f_n \geq f_{n+1}$ a pro každé $x \in X$ existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \nu(E_x) =: f(x),$$

což plyne ze spojitosti míry ν shora, neboť z předpokladu konečnosti míry ν máme $\nu(E_x) \leq \nu(Y) < \infty$. Dále $(\forall n \in \mathbb{N})(|f_n| = f_n \leq f_1)$ a $f_1 \in L(\mathcal{M}, \mu)$, protože

$$\int_X f_1(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \nu(E_x)\mathrm{d}\mu(x) \leq \nu(Y) \int_X 1\mathrm{d}\mu(x) = \mu(X)\nu(Y) < \infty$$

díky předpokladu konečnosti měr μ a ν. Můžeme tedy na posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ aplikovat Lebesgueovu Větu 5.43, ze které plyne $\mathcal{M}$-měřitelnost f (dokonce integrabilita) a také rovnost

$$\int_X \nu(E_x)\mathrm{d}\mu(x) = \mu \otimes \nu(E).$$

podobně jako v části i). Zbytek tvrzení se odvodí analogicky.

2) Předpokládejme nyní, že μ a ν jsou σ-konečné míry. Potom existují $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ a $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}$, tak že $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ a $Y = \cup_{n=1}^{\infty} Y_n$ a $\mu(X_n) < \infty$ a $\nu(Y_n) < \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Navíc množiny X_n a Y_n lze volit tak, že $X_n \subset X_{n+1}$ a $Y_n \subset Y_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ (rozmyslete).

Nechť $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ pevné je zúžení μ na X_n konečná míra, a proto můžeme aplikovat závěry části 1), ze kterých plyne, že funkce

$$f_n(x) := \mu\left((E \cap X_n \times Y_n)_x\right) = \chi_{X_n}(x)\mu\left(E_x \cap Y_n\right)$$

je $\mathcal{M}$-měřitelná a platí

$$\int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu(x) = \mu \otimes \nu\left(E \cap X_n \times Y_n\right).$$

Jelikož pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n \leq f_{n+1}$, protože $X_n \times Y_n \subset X_{n+1} \times Y_{n+1}$, můžeme ještě jednou aplikovat Větu 5.24 o monotónní konvergenci spolu se spojitostí měr zdola, z čehož vyvodíme, že funkce

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mu(E_x)$$

je $\mathcal{M}$-měřitelná a

$$\begin{aligned}\int_X \mu(E_x)\mathrm{d}\mu(x) &= \int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \mu \otimes \nu\left(E \cap X_n \times Y_n\right) \\ &= \mu \otimes \nu(E).\end{aligned}$$

Měřitelnost druhé funkce a také druhou rovnost z tvrzení ověříme analogicky. □

Konečně se dostáváme k větě, která je spojením dvou tvrzení - *Tonelliho a Fubiniho*. Tyto věty říkají, za jakých předpokladů lze integrál z funkce f na $X \times Y$ vzhledem k součinové míře $\mu \otimes \nu$ počítat tak, že integrujeme f nejprve v první proměnné vzhledem k μ a poté v druhé proměnné vzhledem k ν nebo naopak. Tonelliho předpoklad vyžaduje měřitelnost a nezápornost f, tedy $f \in \mathscr{L}_+(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$, kdežto Fubiniho předpoklad je integrabilita f, tedy $f \in L(\mu \otimes \nu)$. Mimo její teoretický význam, je Fubiniho–Tonelliho věta praktický nástroj pro výpočet vícerozměrných integrálů. Speciálně věta dává postačující podmínky pro záměnu pořadí integrace funkce více proměnných.

Věta 5.66 (Fubini–Tonelli)**:** Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ jsou prostory se σ-konečnými mírami μ a ν.

1. (Tonelli) Je-li $f \in \mathscr{L}_+(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$, potom

$$(\forall x \in X)(f(x, \cdot) \in \mathscr{L}_+(Y, \mathcal{N})), \qquad (\forall y \in Y)(f(\cdot, y) \in \mathscr{L}_+(X, \mathcal{M})),$$

$$\int f(\cdot, y) \mathrm{d}\nu(y) \in \mathscr{L}_+(X, \mathcal{M}), \qquad \int f(x, \cdot) \mathrm{d}\mu(x) \in \mathscr{L}_+(Y, \mathcal{N})$$

a platí:

$$\int f \, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y). \tag{60}$$

2. (Fubini) Je-li $f \in L(\mu \otimes \nu)$, potom

$$(\mu\text{-s.v. } x \in X)(f(x, \cdot) \in L(\nu)), \qquad (\nu\text{-s.v. } y \in Y)(f(\cdot, y) \in L(\mu)),$$

$$\int f(\cdot, y) \mathrm{d}\nu(y) \in L(\mu), \qquad \int f(x, \cdot) \mathrm{d}\mu(x) \in L(\nu)$$

a opět platí (60).

Důkaz. 1. Označme $f_x := f(x, \cdot)$ a $f^y := f(\cdot, y)$. Jelikož pro libovolnou množinu $B \subset \overline{\mathbb{R}}$, $x \in X$ a $y \in Y$ platí

$$\left(f^{-1}(B)\right)_x = (f_x)^{-1}(B) \quad \text{a} \quad \left(f^{-1}(B)\right)^y = (f^y)^{-1}(B),$$

ověříme s pomocí Lemma 5.61 implikaci:

$$f \text{ je } \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}\text{-měřitelná } \Rightarrow (\forall x \in X)(\forall y \in Y)(f_x \text{ je } \mathcal{N}\text{-měřitelná a } f^y \text{ je } \mathcal{M}\text{-měřitelná}).$$

Tedy předpoklad $f \in \mathscr{L}_+(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ implikuje, že $f_x \in \mathscr{L}_+(Y, \mathcal{N})$ a $f^y \in \mathscr{L}_+(X, \mathcal{M})$ pro každé $x \in X$ a $y \in Y$, což je první tvrzení Tonelliho věty.

Všimněte si, že pro $E \subset X \times Y$, $x \in X$ a $y \in Y$ platí:

$$(\chi_E)_x = \chi_{E_x} \quad \text{a} \quad (\chi_E)^y = \chi_{E^y},$$

kde jsme opět použili značení $(\chi_E)_x(y) = \chi_E(x,y)$ a $(\chi_E)^y(x) = \chi_E(x,y)$. Z tohoto pozorování přímo ověříme, že je-li speciálně $f = \chi_E$, kde $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, je zbývající část Tonelliho věty schodná s tvrzením Věty 5.65. Díky linearitě integrálu rozšíříme snadno platnost tvrzení Tonelliho věty také pro případ, že f je měřitelná nezáporná jednoduchá funkce.

Předpokládejme nyní obecnou funkci $f \in \mathscr{L}_+(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$. Buď $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ neklesající posloupnost jednoduchých funkcí z $\mathscr{L}_+(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$, $\phi_n \to f$ z Věty 5.15. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme

$$g_n := \int_Y \phi_n(\cdot, y) \mathrm{d}\nu(y).$$

Potom $g_n \in \mathscr{L}_+(X, \mathcal{M})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a z Věty o monotónní konvergenci aplikované na posloupnost $\{\phi_n(x, \cdot)\}_{n=1}^\infty$ dostaneme, že

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_Y \phi_n(x,y)\mathrm{d}\nu(y) = \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y).$$

pro každé $x \in X$. Aplikujeme-li nyní Větu o monotónní konvergenci na neklesající posloupnost funkcí $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ a dále také na $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$, vyvodíme, že $g \in \mathscr{L}_+(X, \mathcal{M})$ a

$$\begin{aligned}\int_X g(x)\mathrm{d}\mu(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X \left(\int_Y \phi_n(x,y)\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} \phi_n \,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu),\end{aligned}$$

neboli

$$\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x).$$

Zcela analogicky, pokud bychom namísto g_n uvažovali funkce

$$h_n := \int_X \phi_n(x, \cdot)\mathrm{d}\mu(x),$$

odvodili bychom, že

$$h := \lim_{n\to\infty} h_n = \int_X f(x,\cdot)\mathrm{d}\mu(x) \in \mathscr{L}_+(Y, \mathcal{N})$$

a rovnost

$$\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y).$$

2. Nechť $f \in L(\mu\otimes\nu)$ a navíc předpokládejme, že $f \geq 0$. Potom je $f \in \mathscr{L}_+(X\times Y, \mathcal{M}\otimes\mathcal{N})$ a $\int f \mathrm{d}(\mu\otimes\nu) < \infty$. Potom z již dokázané Tonelliho věty víme, že nezáporné měřitelné funkce $g := \int f(\cdot, y)\mathrm{d}\nu(y)$ a $h := \int f(x,\cdot)\mathrm{d}\mu(x)$ splňují

$$\int_X g(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y h(y)\mathrm{d}\nu(y) = \int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) < \infty,$$

z čehož plyne $g \in L(\mu)$ a $h \in L(\nu)$, a proto podle Lemma 5.33 je $g < \infty$ μ-s.v. a $h < \infty$ ν-s.v. Odtud a z definice funkcí g a h plyne, že $f(x, \cdot) \in L(\nu)$ pro μ-s.v. $x \in X$ a $f(\cdot, y) \in L(\mu)$ pro ν-s.v. $y \in Y$.

Nyní pro obecnou funkci $f \in L(\mu \otimes \nu)$ stačí aplikovat poslední pozorování a již dokázanou Tonelliho větu jednotlivě na kladné a záporné části funkcí $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ a získáme tvrzení Fubiniho věty (rozmyslete). □

Poznámka: Závorky objevující se v rovnici (60) často vynecháváme a píšeme např.

$$\int \left(\int f(x,y) \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int \int f(x,y) \mathrm{d}\nu(y) \mathrm{d}\mu(x) = \int \int f \,\mathrm{d}\nu \mathrm{d}\mu.$$

Pořadí integrace je jasné i z tohoto stručnějšího značení.

Poznámka: Předpoklad σ-konečnosti měr μ a ν v Tonelliho-Fubiniho větě je nezbytný, viz Cvičení 5.11. Taktéž předpoklad $f \in \mathscr{L}_+(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ je v Tonelliho větě nezbytný a podobně předpoklad $f \in L(\mu \otimes \nu)$ pro Fubiniho větu, jak ilustruje Příklad 5.67 níže. Dokonce se dá ukázat, že oba integrály $\int \int f \mathrm{d}\mu \mathrm{d}\nu$ a $\int \int f \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\mu$ mohou existovat i pro neměřitelnou funkci f, avšak v takovém případě nemusí mít stejnou hodnotu, viz např. [10, Sec. 2.5, Exer. 47].

Poznámka: Obě věty, Tonelliho a Fubiniho, se často používají společně. Obvyklá je např. situace, že máme měřitelnou funkci f a chceme zaměnit pořadí integrace ve „dvojném integrálu“ $\int \int f \mathrm{d}\mu \mathrm{d}\nu$. Abychom dokázali integrabilitu f, ukážeme konečnost integrálu $\int |f| \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)$, který spočítáme/odhadneme postupným integrováním jako $\int \int |f| \mathrm{d}\mu \mathrm{d}\nu$ nebo $\int \int |f| \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\mu$, což umožňuje Tonelliho věta. Potom Fubiniho věta už garantuje záměnu pořadí integrace $\int \int f \mathrm{d}\mu \mathrm{d}\nu = \int \int f \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\mu$.

Příklad 5.67: Uvažujme $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = 2^{\mathbb{N}}$ a $\mu = \nu$ počítací míry. Definujme funkci $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vztahem

$$f(m,n) = \begin{cases} 1, & m = n, \\ -1, & m = n+1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom pro $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\int_{\mathbb{N}} f(m,n) \mathrm{d}\mu(m) = \sum_{m=1}^{\infty} f(m,n) = f(n,n) + f(n+1,n) = 1 - 1 = 0,$$

Pro $m \in \mathbb{N}$ je

$$\int_{\mathbb{N}} f(m,n) \mathrm{d}\mu(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(m,n) = \begin{cases} f(1,1) = 1, & \text{je-li } m = 1, \\ f(m,m-1) + f(m,m) = -1 + 1 = 0, & \text{je-li } m \geq 2. \end{cases}$$

Odtud vidíme, že

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(m,n) \mathrm{d}\mu(m) \mathrm{d}\mu(n) = \int_{\mathbb{N}} 0 \,\mathrm{d}\mu(n) = 0,$$

kdežto
$$\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\mathrm{d}\mu(n)\mathrm{d}\mu(m) = \int_{\mathbb{N}} \chi_{\{1\}}(m)\,\mathrm{d}\mu(m) = 1.$$
Tedy
$$\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\mathrm{d}\mu(m)\mathrm{d}\mu(n) \neq \int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\mathrm{d}\mu(n)\mathrm{d}\mu(m),$$
neboli rovnost z Fubiniho věty neplatí.

Není totiž splněn předpoklad Fubiniho věty, neboť $f \notin L(\mu\otimes\mu)$, jak ukážeme dále. Snadno určíme pozitivní a negativní část f:
$$f^+(m,n) = \begin{cases} 1, & m = n,\\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \qquad f^-(m,n) = \begin{cases} 1, & m = n+1,\\ 0, & \text{jinak}. \end{cases}$$
Odtud
$$\int f^{\pm}\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} f^{\pm}(m,n) = \infty,$$
a proto $f \notin L(\mu\otimes\mu)$.

I v případě, že jsou obě míry μ a ν úplné, není součinová míra $\mu\otimes\nu$ téměř nikdy úplná. Skutečně pokud existuje $\emptyset \neq A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$ a $\mathcal{N} \neq 2^Y$ (např. jsou-li $\mu = \nu = m$ Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$), potom pro libovolnou $B \in 2^Y\setminus\mathcal{N}$ je $A\times B \notin \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$, jinak bychom dostali spor s Lemma 5.61, neboť pro $x \in A$ je $(A\times B)_x = B$. Avšak $A\times B \subset A\times Y$ a $\mu\otimes\nu(A\times Y) = \mu(A)\nu(Y) = 0$, a proto $\mu\otimes\nu$ není úplná.

Chceme-li pracovat s úplnou mírou, přirozeně se nabízí míru $\mu\otimes\nu$ zúplnit. Tonelliho–Fubiniho věta platí i pro případ zúplněné součinové míry.

Věta 5.68 (Fubini–Tonelli pro úplné míry)**:** Nechť $(X,\mathcal{M},\mu)$ a $(Y,\mathcal{N},\nu)$ jsou prostory s úplnými σ-konečnými mírami μ a ν. Označme $(X\times Y,\mathcal{R},\rho)$ zúplnění prostoru $(X\times Y,\mathcal{M}\otimes\mathcal{N},\mu\otimes\nu)$, tj. $\mathcal{R} := \overline{\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}}$ a $\rho := \overline{\mu\otimes\nu}$.

1. (Tonelli) Je-li $f \in \mathscr{L}_+(X\times Y,\mathcal{R})$, potom
$$(\mu\text{-s.v. } x\in X)(f(x,\cdot)\in\mathscr{L}_+(Y,\mathcal{N})), \qquad (\nu\text{-s.v. } y\in Y)(f(\cdot,y)\in\mathscr{L}_+(X,\mathcal{M})),$$
$$\int f(\cdot,y)\mathrm{d}\nu(y) \in \mathscr{L}_+(X,\mathcal{M}), \qquad \int f(x,\cdot)\mathrm{d}\mu(x) \in \mathscr{L}_+(Y,\mathcal{N})$$
a platí:
$$\int f\,\mathrm{d}\rho = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y). \tag{61}$$

2. (Fubini) Je-li $f \in L(\rho)$, potom
$$(\mu\text{-s.v. } x\in X)(f(x,\cdot)\in L(\nu)), \qquad (\nu\text{-s.v. } y\in Y)(f(\cdot,y)\in L(\mu)),$$
$$\int f(\cdot,y)\mathrm{d}\nu(y) \in L(\mu), \qquad \int f(x,\cdot)\mathrm{d}\mu(x) \in L(\nu)$$
a opět platí (61).

Důkaz. Nejprve si důkaz redukujeme na ρ-s.v. nulové funkce. Předpokládejme, že f je $\mathcal{R}$-měřitelná funkce. Podle Věty 5.17 existuje $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$-měřitelná funkce g taková, že $g = f$ ρ-s.v. Definujme $h := f - g$. Potom h je $\mathcal{R}$-měřitelná a $h = 0$ ρ-s.v. Protože (standardní) Fubiniho–Tonelliho Věta 5.66 je aplikovatelná na g, stačí dokázat tvrzení pro ρ-s.v. nulovou funkci h namísto f.

V další části důkazu použijeme následující pozorování.

Lemma 5.69: Nechť $E \in \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ a $\mu\otimes\nu(E) = 0$. Potom

$$(\mu\text{-s.v. } x \in X)(\nu(E_x) = 0) \quad \text{a} \quad (\nu\text{-s.v. } y \in Y)(\mu(E^y) = 0).$$

Důkaz Lemma 5.69. Aplikací Tonelliho věty na charakteristickou funkci χ_E dostaneme

$$\int_X \nu(E_x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \int_Y \underbrace{\chi_{E_x}(y)}_{=\chi_E(x,y)} \mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}\mu(x) = \mu\otimes\nu(E) = 0,$$

a proto je $\nu(E_x) = 0$ pro μ-s.v. $x \in X$, viz Věta 5.28. Podobně dokážeme i druhé tvrzení. □

Protože je $h = 0$ ρ-s.v. a ρ je zúplnění $\mu\otimes\nu$, existuje $E \in \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$, $\mu\otimes\nu(E) = 0$ a

$$\{(x,y) \in X\times Y \mid h(x,y) \neq 0\} \subset E.$$

Vezmeme-li v poslední inkluzi x-řezy, dostaneme

$$\{y \in Y \mid h(x,y) \neq 0\} \subset E_x.$$

Podle Lemma 5.69 je $\nu(E_x) = 0$ pro μ-s.v. $x \in X$, a proto pro tato x je

$$\nu\left(\{y \in Y \mid h(x,y) \neq 0\}\right) = 0$$

díky úplnosti ν. To znamená, že pro μ-s.v. $x \in X$ je funkce $h(x,\cdot)$ ν-nulová. Analogicky se ukáže, že pro ν-s.v. $y \in Y$ je funkce $h(\cdot,y)$ μ-nulová.

Podle Věty 5.16 jsou funkce $h(x,\cdot)$ a $h(\cdot,y)$ měřitelné pro μ-s.v. $x \in X$ a ν-s.v. $y \in Y$ a vzhledem k jejich nulovosti s.v. také integrabilní pro μ-s.v. $x \in X$ a ν-s.v. $y \in Y$. Odtud dále plyne, že

$$\int_X h(x,y)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y h(x,y)\mathrm{d}\nu(x) = 0$$

pro μ-s.v. $x \in X$ a ν-s.v. $y \in Y$, z čehož již plynou všechna tvrzení dokazované věty pro ρ-nulovou funkci h, neboť $\int h\mathrm{d}\rho = 0$. □

Pomocí Fubiniho Věty můžeme spočítat Dirichletův integrál z Příkladu 5.53 bez použití výsledků z komplexní analýzy i teorie Fourierových řad.

Příklad 5.70: Vyjdeme z rovnosti

$$\int_0^n e^{-yx}\mathrm{d}y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}e^{-nx},$$

která platí pro každé $x > 0$ a $n \in \mathbb{N}$. Vynásobíme ji $\sin x$ a integrujeme od 0 do n. Potom

$$\int_0^n \int_0^n e^{-yx} \sin x \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^n \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x - \int_0^n e^{-nx}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x. \tag{62}$$

Jelikož je $|e^{-xy}\sin x| \leq 1$, $\forall x, y \in (0, n)$, je integrand vlevo v (62) integrabilní funkce, tj. v $L((0,n)^2, m\otimes m)$, můžeme podle Fubiniho věty prohodit pořadí integrace. Vnitřní integrál spočítáme jako Riemannův např. dvojnásobnou aplikací per partes (detaily přenechány čtenáři) a vyjde nám:

$$\int_0^n e^{-yx}\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{1+y^2} - \frac{e^{-ny}\cos n}{1+y^2} - \frac{ye^{-ny}\sin n}{1+y^2}$$

pro každé $y > 0$ a $n \in \mathbb{N}$. Zintegrujeme-li poslední výraz v proměnné y od 0 do n, zjistíme, že se levá strana (62) rovná

$$\operatorname{arctg} n - \cos(n)\int_0^n \frac{e^{-ny}}{1+y^2}\mathrm{d}y - \sin(n)\int_0^n \frac{ye^{-ny}}{1+y^2}\mathrm{d}y.$$

Aplikací Lebesguoevy věty ukážeme, že

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{e^{-ny}}{1+y^2}\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \chi_{(0,n)}(y)\frac{e^{-ny}}{1+y^2}\mathrm{d}y = 0$$

a podobně

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{ye^{-ny}}{1+y^2}\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \chi_{(0,n)}(y)\frac{ye^{-ny}}{1+y^2}\mathrm{d}y = 0,$$

neboť z odhadů

$$\frac{e^{-ny}}{1+y^2} \leq e^{-y} \quad \text{a} \quad \frac{ye^{-ny}}{1+y^2} \leq ye^{-y},$$

které platí pro každé $y > 0$ a $n \in \mathbb{N}$, dostaneme integrabilní majoranty z $L((0,\infty), m)$. Vidíme tedy, že

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\int_0^n e^{-yx}\sin x\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2}.$$

Podívejme se na limitu výrazu na pravé straně (62) pro $n \to \infty$. Aplikujeme-li opět Lebesgueovu větu, zjistíme, že druhý člen má také nulovou limitu, neboť

$$\left|\chi_{(0,n)}(x)e^{-nx}\frac{\sin x}{x}\right| \leq e^{-x}$$

pro všechna $x > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ a my můžeme zaměnit limitu a integrál. Odtud celkem po limitním přechodu $n \to \infty$ v rovnosti (62) dostáváme, že

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

což jsme chtěli ukázat.

5.6 Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^n$ a Věta o substituci

Nyní když už máme zavedenou Lebesgueovu míru m na $\mathbb{R}$ a víme, co je součinová míra, můžeme definovat *Lebesgueovu míru na* $\mathbb{R}^n$. Zavedeme ji přirozeně jako součin n Lebesguevých měr m na $\mathbb{R}$, který navíc zúplníme.

Definice 5.71 (Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^n$)**:** Míru m^n definovanou na σ-algebře $\mathcal{L}^n$ podmnožin $\mathbb{R}^n$, která vznikne zúplněním míry $m \otimes \cdots \otimes m$ na $\mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}$, tedy

$$\mathcal{L}^n := \overline{\mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}} \quad \text{a} \quad m^n := \overline{m \otimes \cdots \otimes m},$$

nazýváme *Lebesgueovou mírou na* $\mathbb{R}^n$ a množiny z $\mathcal{L}^n$ *Lebesgueovsky měřitelné* podmnožiny $\mathbb{R}^n$.

Nemůže-li dojít k pochybnostem, budeme vynechávat horní index n a psát jen m místo m^n. Také místo $\int f \mathrm{d}m$ budeme často psát $\int f(x)\mathrm{d}x$ (i pro $n > 1$). Integrál vzhledem k Lebesgueově míře se nazývá *Lebesgueův*.

Poznámka: Všimněte si, že

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \subset \mathcal{L}^n,$$

dokonce $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \subset \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}$, neboť $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ podle Důsledku 4.14 a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}$.

Připomeňme, že množiny tvaru $E = \times_{j=1}^n E_j$, kde $E_j \in \mathcal{L}$, nazýváme měřitelné obdélníky. Speciálně jsou-li E_j intervaly pro všechna $j \in \hat{n}$, nazýváme E n-interval. Tedy n-intervaly jsou měřitelné obdélníky, ale ne naopak (ačkoliv to geometricky docela neodpovídá). Nejprve si ukážeme, že vlastnosti, které jsme již dříve dokázali pro Lebesgueovy–Stieltjesovy míry na $\mathbb{R}$, platí také pro Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}^n$.

Věta 5.72:

1. Pro každé $E \in \mathcal{L}^n$ platí:

   $$m(E) = \inf\{m(U) \mid E \subset U \ \wedge \ U \text{ otevřená}\} = \sup\{m(K) \mid K \subset E \ \wedge \ K \text{ kompaktní}\}.$$

2. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

   a) $E \in \mathcal{L}^n$,
   b) $E = H \cup N$, kde $H \subset \mathbb{R}^n$ je F_σ-množina a $N \in \mathcal{L}^n$, $m(N) = 0$.
   c) $E = V \setminus \tilde{N}$, kde $V \subset \mathbb{R}^n$ je G_δ-množina a $\tilde{N} \in \mathcal{L}^n$, $m(\tilde{N}) = 0$.

3. Je-li $E \in \mathcal{L}^n$, $m(E) < \infty$, potom

   $$(\forall \epsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\exists R_1, \ldots, R_k \ n\text{-intervaly}) \left(m\left(E \Delta \bigcup_{j=1}^{k} R_j \right) < \epsilon \right).$$

Důkaz. 1. Nechť $E \in \mathcal{L}^n$. Dokážeme nejprve vnější regularitu m^n. Zvolme $\epsilon \in (0, 1)$. Z definice součinové míry jako zúžení příslušné vnější míry, viz (37), plyne, že existuje posloupnost měřitelných obdélníků $T_j = T_1^{(j)} \times \cdots \times T_n^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, taková, že $E \subset \cup_{j=1}^\infty T_j$ a

$$\sum_{j=1}^{\infty} m^n(T_j) \leq m^n(E) + \epsilon.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $m^n(T_j) < \infty$ pro každé $j \in \mathbb{N}$, jinak bychom místo $\{T_j\}_{j=1}^{\infty}$ vzali např. spočetný systém $\{T_j \cap (-l,l)^n \mid j,l \in \mathbb{N}\}$.

Pro každé $j \in \mathbb{N}$ můžeme aplikovat Větu 4.47 na množiny $T_1^{(j)}, \dots, T_n^{(j)} \in \mathcal{L}$, z níž plyne existence otevřených množin $U_1^{(j)}, \dots, U_n^{(j)} \subset \mathbb{R}$ tak, že

$$(\forall i \in \hat{n}) \left(m\left(U_i^{(j)}\right) \leq m\left(T_i^{(j)}\right) + \epsilon 2^{-j} \delta_j \right),$$

kde $\delta_j > 0$ volíme dostatečně malé tak, aby

$$\delta_j \left(1 + \max_{i \in \hat{n}} m\left(T_i^{(j)}\right)\right)^n < 1.$$

Důvod pro tuto speciální volbu se vyjasní dále. Podstatné je jen to, že výraz, kterým násobíme δ_j, je nějaké konečné číslo, což je zde zaručeno, protože $m^n(T_j) = m(T_1^{(j)}) \dots m(T_n^{(j)}) < \infty$.

Pro každé $j \in \mathbb{N}$ položme $U_j := U_1^{(j)} \times \dots \times U_n^{(j)}$. Potom $U_j \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $U_j \supset T_j$ a platí:

$$\begin{aligned} m^n(U_j) &= \prod_{i=1}^n m\left(U_i^{(j)}\right) \leq \prod_{i=1}^n \left[m\left(T_i^{(j)}\right) + \epsilon 2^{-j} \delta_j \right] \\ &= \prod_{i=1}^n m\left(T_i^{(j)}\right) + \epsilon 2^{-j} \delta_j \sum_{l=0}^{n-1} \underbrace{\left(\epsilon 2^{-j} \delta_j\right)^{n-l-1}}_{\leq 1} \underbrace{\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq n} m\left(T_{i_1}^{(j)}\right) \dots m\left(T_{i_l}^{(j)}\right)}_{\leq \binom{n}{l} \left[\max_{i \in \hat{n}} m\left(T_i^{(j)}\right)\right]^l}. \end{aligned}$$

Tedy

$$m^n(U_j) \leq m^n(T_j) + \epsilon 2^{-j} \delta_j \left(1 + \max_{i \in \hat{n}} m\left(T_i^{(j)}\right)\right)^n < m^n(T_j) + \epsilon 2^{-j}$$

pro každé $j \in \mathbb{N}$. Nyní stačí položit $U := \cup_{j=1}^{\infty} U_j$. Potom je U otevřená, $U \supset E$ a platí:

$$m^n(U) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^n(U_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^n(T_j) + \epsilon \leq m^n(E) + 2\epsilon,$$

z čehož už vyplývá jedna nerovnost pro vnější regularitu míry m^n. Druhá nerovnost je zřejmá.

Pro důkaz vnitřní regularity m^n již stačí jen mírně modifikovat postup v důkazu Věty 4.47, neboť ten staví na již dokázané vnější regularitě a obecných vlastnostech míry (Cvičení 5.12).

2. S již dokázanou regularitou m^n stačí jen mírně modifikovat postup důkazu Věty 4.48. Modifikace spočívá v tom, že polouzavřené intervaly $(j, j+1]$, $j \in \mathbb{N}$, nahradíme n-intervaly $\times_{i=1}^n (j_i, j_i + 1]$, $j_1, \dots j_n \in \mathbb{N}$. Detaily jsou přenechány čtenáři jako Cvičení 5.12.

3. Podobně jako v předchozím případě stačí mírně modifikovat postup z důkazu Věty 4.49. Uvědomte si, že pro $x \in \mathbb{R}^n$ je systém otevřených n-intervalů $\{\times_{i=1}^n (x_i - r_i, x_i + r_i) \mid r_1, \dots, r_n > 0\}$ lokální bází v x obvyklé topologie $\mathbb{R}^n$, a proto každou otevřenou množinu lze napsat jako sjednocení množin tohoto systému. Zbytek důkazu je analogie a je přenechán čtenáři jako Cvičení 5.12. $\square$

Tvrzení 2. Věty 5.72, které vyjadřuje, že lebesgueovsky měřitelné množiny lze aproximovat „pěknými“ množinami, má následující okamžitý důsledek.

Důsledek 5.73: Množina $E \in \mathcal{L}^n$, právě když

$$(\exists H, V \subset \mathbb{R}^n)(H \text{ je } F_\sigma\text{-množina}, V \text{ je } G_\delta\text{-množina})(H \subset E \subset V \ \wedge\ m(V \setminus H) = 0).$$

Důkaz. Implikace ($\Rightarrow$): Nechť $E \in \mathcal{L}^n$. Potom množiny H a V z 2. tvrzení Věty 5.72 jsou množinami z dokazovaného výroku, neboť $V \setminus H = N \cup \tilde{N}$, a tudíž $m(V \setminus H) = 0$.

Implikace ($\Leftarrow$): Předpokládejme, že platí výrok z tvrzení a položme $\tilde{N} := V \setminus E$. Potom $E = V \setminus \tilde{N}$. Jelikož $\tilde{N} \subset V \setminus H$ a $m(V \setminus H) = 0$ plyne z úplnosti Lebesgueovy míry, že $\tilde{N} \in \mathcal{L}^n$ a $m(\tilde{N}) = 0$. Podle Věty 5.72 je $E \in \mathcal{L}^n$. $\square$

Věta 5.74: Nechť $f \in L(m)$. Potom ke každému $\epsilon > 0$ existuje jednoduchá funkce $\phi = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{R_j}$, kde množiny $R_1, \dots, R_m$ jsou n-intervaly, tak, že $\int |f - \phi| \mathrm{d}m < \epsilon$.

Důkaz. Postup je zcela analogický důkazu Věty 5.46. Funkci f nejprve aproximujeme jednoduchou funkcí podle Věty 5.15 a tu poté dále aproximujeme jednoduchou funkcí kýženého tvaru $\phi = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{R_j}$, kde množiny $R_1, \dots, R_m$ jsou n-intervaly, což umožňuje 3. tvrzení Věty 5.72. $\square$

Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^n$ je hledaný „zobecněný objem“, jehož nalezení byla motivace v úvodu kapitoly o teorii míry (i když samozřejmě neměří objem všech podmnožin $\mathbb{R}^n$). Zřejmě m^n přiřazuje n-intervalům jejich objem v původním smyslu, neboť z definice součinové míry máme např.

$$m^n([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^n m([a_i, b_i]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Dále jsme požadovali, aby hledaný objem byl translačně invariantní a také invariantní vůči rotaci a zrcadlení množiny (vzhledem k nějaké nadrovině). V další části si ukážeme, že Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^n$ má i tyto vlastnosti.

Věta 5.75: Lebesgueova míra je translačně invariantní. Přesněji je-li $a \in \mathbb{R}^n$ a $\tau_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ posunutí definované vztahem $\tau_a(x) = x + a$, potom platí:

1. Pokud $E \in \mathcal{L}^n$, pak $\tau_a(E) \in \mathcal{L}^n$ a $m(\tau_a(E)) = m(E)$.
2. Pokud je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ lebesgueovsky měřitelná, je také $f \circ \tau_a$ lebesgueovsky měřitelná a je-li navíc buď $f \geq 0$, nebo $f \in L(m)$, potom

$$\int (f \circ \tau_a) \mathrm{d}m = \int f \mathrm{d}m.$$

Důkaz. 1. Protože je τ_a spojité zobrazení a $\tau_a^{-1} = \tau_{-a}$, vyplývá z Důsledku 5.3, že

$$E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \quad \Leftrightarrow \quad \tau_a(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

Označme $m_a := m(\tau_a(\cdot))$. Jednoduše ověříme, že m_a je σ-konečná míra na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Z translační invariance Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}$, viz Věta 4.50, plyne, že $m_a(E) = m(E)$ pro každý obdélník $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \cdots \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Protože m, jakožto míra na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, je určená jednoznačně svým působením na obdélníky z $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \cdots \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, což plyne z 3. tvrzení Věty 4.38, rozšíříme rovnost

$$m_a(E) = m(E) \tag{63}$$

na všechny množiny z $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

Abychom rozšířili 1. tvrzení na lebesgueovsky měřitelné množiny, stačí ověřit implikaci

$$N \in \mathcal{L}^n,\ m(N) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_a(N) \in \mathcal{L}^n,\ m(\tau_a(N)) = 0. \tag{64}$$

Skutečně je-li $E \in \mathcal{L}^n$, existují podle Věty 5.72 F_σ-množina H a $N \in \mathcal{L}^n$, $m(N) = 0$, tak, že $E = H \cup N$. Potom $\tau_a(H)$ je F_σ-množina a platí-li implikace (64), také $\tau_a(N) \in \mathcal{L}^n$, $m(\tau_a(N)) = 0$. A protože $\tau_a(E) = \tau_a(H) \cup \tau_a(N)$, je $\tau_a(E) \in \mathcal{L}^n$ opět podle Věty 5.72. Navíc

$$m(\tau_a(E)) = m(\tau_a(H)) = m_a(H) = m(H) = m(E),$$

kde jsme použili (63).

Zbývá tedy dokázat implikaci (64). Všimněte si, že je-li $N \in \mathcal{L}^n$ a $m(N) = 0$, potom vnější regularita m zaručuje existenci množiny $F \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ (dokonce G_δ) takové, že $F \supset N$ a $m(F) = 0$. Skutečně podle 1. tvrzení Věty 5.72 existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ otevřená množina $U_n \supset N$ taková, že $m(U_n) < 1/n$. Nyní stačí položit $F := \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Tedy $\tau_a(N) \subset \tau_a(F)$ a $m(\tau_a(F)) = m(F) = 0$ podle (63). Z úplnosti m plyne, že $\tau_a(N) \in \mathcal{L}^n$ a také $m(\tau_a(N)) = 0$, což jsme chtěli dokázat.

2. Je-li f lebesgueovsky měřitelná a $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$, potom $f^{-1}(B) \in \mathcal{L}^n$, a proto podle Věty 5.72 je $f^{-1}(B) = H \cup N$, kde $H \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ a $N \in \mathcal{L}^n$, $m(N) = 0$. Potom podle 1. tvrzení máme $\tau_a^{-1}(H) \in \mathcal{L}^n$ a $\tau_a^{-1}(N) \in \mathcal{L}^n$, a proto

$$(f \circ \tau_a)^{-1}(B) = \tau_a^{-1}\left(f^{-1}(B)\right) = \tau_a^{-1}(H) \cup \tau_a^{-1}(N) \in \mathcal{L}^n.$$

Tedy $f \circ \tau_a$ je lebesgueovsky měřitelná.

Je-li $f = \chi_E$ pro $E \in \mathcal{L}^n$, platí rovnost $\int (f \circ \tau_a) \mathrm{d}m = \int f \mathrm{d}m$, právě když $m(\tau_{-a}(E)) = m(E)$, což platí podle 1. tvrzení. Potom rovnost $\int (f \circ \tau_a) \mathrm{d}m = \int f \mathrm{d}m$ platí také pro každou jednoduchou měřitelnou funkci f z linearity integrálu. Rovnost dále rozšíříme na funkce $f \in \mathscr{L}_+$ aplikací Vět 5.15 a 5.24. Nakonec pro funkce $f \in L(m)$ stačí použít předchozí výsledek na kladnou a zápornou část funkcí $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$. □

Poznámka: Dá se dokonce ukázat, že translačně invariantní míra μ definovaná na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ už musí být Lebesgueova až na multiplikativní konstantu. Přesněji je-li $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ translačně invariantní míra taková, že $\mu(K) < \infty$ pro každou $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní, potom existuje $c \geq 0$ taková, že $\mu(E) = cm(E)$ pro všechna $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Pokud bychom navíc požadovali, aby $\mu([0,1]^n) = 1$, potom už $\mu = m$ na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Důkaz tohoto tvrzení najde čtenář v [22, Věta 2.20].

Abychom dokázali, že je Lebesgueova míra také invariantní vůči rotaci a zrcadlení, podíváme se obecněji na chování Lebesgueova integrálu, je-li argument funkce ztransformován lineárním regulárním zobrazením $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Jako obvykle ztotožníme zobrazení $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

s jeho maticí ${}^{\mathcal{E}}T$ vzhledem ke standardní bázi $\mathcal{E}$ prostoru $\mathbb{R}^n$ a ve značení nebudeme rozlišovat $T \equiv {}^{\mathcal{E}}T$.

Připomeňme si některá fakta z lineární algebry. Elementární kroky Gaussovy eliminační metody jsou následující tři:

1. Prohození i-tého a j-tého řádku matice.
2. Vynásobení i-tého řádku matice konstantou $c \neq 0$.
3. Přičtení j-tého řádku matice k i-tému.

Tyto 3 úpravy lze realizovat vynásobením zleva regulárními maticemi $T_1, T_2, T_3 \in \mathbb{R}^{n,n}$, které odpovídají zobrazením:

1. $T_1(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n), \quad (i \neq j).$
2. $T_2(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, cx_i, \ldots, x_n), \quad (c \neq 0),$
3. $T_3(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_n), \quad (i \neq j).$

Zřejmě $\det T_1 = -1$, $\det T_2 = c$ a $\det T_3 = 1$. Jelikož každou regulární matici lze převést konečně mnoha kroky Gaussovy eliminační metody na jednotkovou matici, je každá regulární matice produkt konečně mnoha matic typu 1, 2 a 3.

Věta 5.76: Nechť $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ je regulární.

1. Je-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ lebesgueovsky měřitelná, potom $f \circ T$ je také lebesgueovsky měřitelná a je-li navíc buď $f \geq 0$, nebo $f \in L(m)$, potom platí:
$$\int f(x)\mathrm{d}x = |\det T| \int f \circ T(x)\mathrm{d}x. \tag{65}$$
2. Je-li $E \in \mathcal{L}^n$, pak $T(E) \in \mathcal{L}^n$ a $m(T(E)) = |\det T| m(E)$.

Důkaz. Důkaz provedeme ve dvou krocích. Nejprve dokážeme 1. tvrzení pro borelovsky měřitelné funkce. Poté provedeme rozšíření získaného výsledku i na lebesgueovsky měřitelné funkce a v rámci této technické pasáže dokážeme také 2. tvrzení.

1) **Tvrzení 1. pro borelovsky měřitelnou funkci f:** Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ je borelovsky měřitelná. Potom je také $f \circ T$ borelovsky měřitelná, protože je T spojité zobrazení.

1a) Ověření rovnosti (65) pro $n = 1$: Je-li speciálně $n = 1$, potom T je operátor násobení konstantou $c \neq 0$ a rovnost (65) má tvar
$$\int f(x)\mathrm{d}x = |c| \int f(cx)\mathrm{d}x. \tag{66}$$

Pro $E \in \mathcal{L}$ a $f = \chi_E$ identita (66) vyplývá z Věty 4.50. Z linearity integrálu dostaneme rovnost (66) také pro libovolnou měřitelnou jednoduchou funkci. Poté rozšíříme (66) na lib. borelovsky měřitelné $f \geq 0$ aplikací Vět 5.15 a 5.24. Nakonec pro funkce $f \in L(m)$ stačí použít předchozí výsledek na $(\operatorname{Re} f)^\pm$ a $(\operatorname{Im} f)^\pm$ a využít identity $f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + \mathrm{i}(\operatorname{Im} f)^+ - \mathrm{i}(\operatorname{Im} f)^-$. Rovnost (66) tedy speciálně platí pro lib. borelovsky měřitelnou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, která je buď nezáporná, nebo integrabilní.

1b) Ověření rovnosti (65) pro obecné $n \in \mathbb{N}$: Nejprve si všimněte, že platí-li vzorec pro dvě regulární zobrazení T a S, platí i pro složení $T \circ S$, neboť v takovém případě máme

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x &= |\det T| \int f \circ T(x)\mathrm{d}x = |\det T||\det S| \int (f \circ T) \circ S(x)\mathrm{d}x \\ &= |\det(T \circ S)| \int f \circ (T \circ S)(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Proto stačí ověřit rovnost (65) pro speciální zobrazení T_1, T_2 a T_3 realizující elementární kroky Gaussovy eliminační metody (viz definice před větou), neboť každé regulární zobrazení je složením konečně mnoha těchto elementárních zobrazení.

Předpokládejme, že f je borelovsky měřitelná funkce splňující buď $f \geq 0$, nebo $f \in L(m)$. Je-li $T = T_1$, můžeme aplikovat Toneliho–Fubiniho Větu 5.66 a v i-tém a j-tém dílčím (jednorozměrném) integrálu přejmenovat proměnnou x_i na x_j a naopak. Tak dokážeme (65) pro $T = T_1$.

Je-li $T = T_2$, potom opět s vyuitím Toneliho–Fubiniho věty a aplikací rovnosti (66) v i-tém dílčím integrálu dostaneme

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x &= \int \cdots \int \cdots \int f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_i \ldots \mathrm{d}x_n \\ &= |c| \int \cdots \int \cdots \int f(x_1, \ldots, cx_i, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_i \ldots \mathrm{d}x_n \\ &= |\det T_2| \int f \circ T_2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

V případě $T = T_3$ se postupuje analogicky jen místo (66) aplikujeme v i-tém dílčím integrálu již známý (jednorozměrný) vztah

$$\int f(x + a)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Tím je vzorec (65) dokázán pro případ borelovsky měřitelné funkce f.

2) **Rozšíření 1. tvrzení na lebesgueovsky měřitelné funkce a 2. tvrzení:** Nejprve dokážeme 2. tvrzení. Protože jsou T i T^{-1} spojitá zobrazení zachovává T borelovské množiny, tj.

$$E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \quad \Leftrightarrow \quad T(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

Proto můžeme definovat míru $m_T : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ vztahem $m_T(E) = m(T(E))$ pro $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Položíme-li v již dokázané rovnosti (65) $f = \chi_E$ pro $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ (a vezmeme-li T^{-1} místo T), dostaneme

$$m_T(E) = |\det T| m(E)$$

pro všechna $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Nyní stačí analogicky jako v důkazu Věty 5.75 ověřit implikaci

$$N \in \mathcal{L}^n,\ m(N) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(N) \in \mathcal{L}^n,\ m(T(N)) = 0,$$

(proveďte), čímž dokončíme důkaz 2. tvrzení.

Dále můžeme ověřit implikaci:

$$f \text{ lebesgueovsky měřitelná} \quad \Rightarrow \quad f \circ T \text{ lebesgueovsky měřitelná}$$

analogicky jako v důkazu 2. tvrzení Věty 5.75 (proveďte). Tím je dokázána implikace z 1. tvrzení.

Zbývá rozšířit vzorec (65) na lebesgueovsky měřitelné funkce. K tomu stačí postupovat opět analogicky jako v důkazu 2. tvrzení Věty 5.75, neboť pro $f = \chi_E$, kde $E \in \mathcal{L}^n$, plyne rovnost (65) z již dokázaného 2. tvrzení. Dále z linearity rozšíříme (65) na měřitelné jednoduché funkce a pomocí Vět 5.15 a 5.24 na nezáporné měřitelné funkce . Nakonec pro $f \in L(m)$ stačí aplikovat dokázaný výsledek na kladnou a zápornou část funkcí $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$. □

Připomeňme, že jak rotace, tak zrcadlení jsou realizovány ortogonální maticí R, tj. $R^T R = I$, neboť obě transformace jsou lineární zobrazení, která zachovávají délky vektorů z $\mathbb{R}^n$, viz Cvičení 5.13.

Důsledek 5.77: Lebesgueova míra je invariantní vůči ortogonální transformaci. Speciálně Lebesgueova míra je invariantní vůči rotaci a zrcadlení.

Důkaz. Stačí si uvědomit, že z rovnosti $R^T R = I$ plyne $|\det R| = 1$ a aplikovat Větu 5.76. □

Tuto část zakončíme větou o substituci v Lebesgueově integrálu. Pro její důkaz budeme potřebovat jedno pomocné tvrzení. K tomuto účelu si označme množinu speciálních n-intervalů

$$\mathcal{Q}_k := \left\{ \left[\frac{a_1}{2^k}, \frac{a_1}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right] \times \cdots \times \left[\frac{a_n}{2^k}, \frac{a_n}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right] \,\middle|\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \right\},$$

kde $k \in \mathbb{N}_0$. Všimněte si, že n-intervaly z $\mathcal{Q}_k$ jsou n-krychle se stranou délky 2^{-k} a vrcholy v bodech mřížky $(2^{-k}\mathbb{Z})^n$. Libovolné dvě různé krychle z $\mathcal{Q}_k$ mají disjunktní vnitřky. Krychle systému $\mathcal{Q}_{k+1}$ vzniknou z krychlí systému $\mathcal{Q}_k$ „půlením stran“. Označme ještě

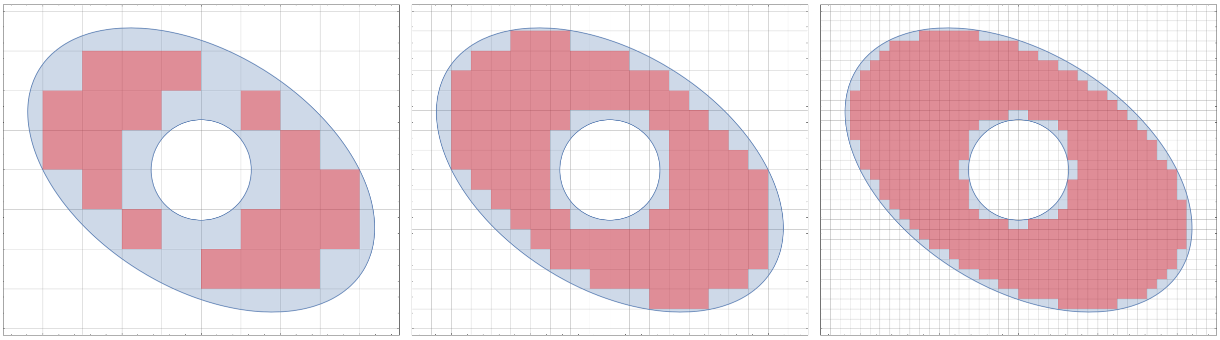
$$A_k(E) := \bigcup \{Q \in \mathcal{Q}_k \mid Q \subset E\}$$

sjednocení krychlí z $\mathcal{Q}_k$, které jsou obsaženy v $E \subset \mathbb{R}^n$, viz Obrázek 15.

Lemma 5.78: Je-li $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, potom

$$U = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k(U).$$

Navíc každá otevřená množina v $\mathbb{R}^n$ je sjednocením spočetně mnoha uzavřených n-intervalů s disjunktními vnitřky.



Obrázek 15: Ilustrace množin $A_2(E)$, $A_3(E)$ a $A_4(E)$ (červeně) pro množinu E (modře).

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat jen inkluzi $U \subset \cup_{k=0}^{\infty} A_k(U)$ pro $U \neq \emptyset$. Buď $x \in U$. Pro lib. $k \in \mathbb{N}$ existuje $Q \in \mathcal{Q}_k$ obsahující x, protože krychle z $\mathcal{Q}_k$ pokrývají $\mathbb{R}^n$. Všimněte si, že je-li také $y \in Q$, potom $|x_i - y_i| \leq 2^{-k}$ pro každé $i \in \hat{n}$, a proto

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{2^k}.$$

Z otevřenosti U plyne, že existuje $\delta > 0$ tak, že $B_x(\delta) \subset U$. Vezmeme-li nyní $k \in \mathbb{N}$ dost velké tak, aby

$$\frac{\sqrt{n}}{2^k} < \delta,$$

najdeme krychli $Q \in \mathcal{Q}_k$ takovou, že $x \in Q \subset B_x(\delta) \subset U$. Tudíž $x \in A_k(U)$.

Pro důkaz druhého tvrzení si stačí uvědomit, že

$$U = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k(U) = A_0(U) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k(U) \setminus A_{k-1}(U).$$

Množina $A_0(U)$ je nejvýše spočetné sjednocení krychlí z $\mathcal{Q}_0$ a pro $k \in \mathbb{N}$ je uzávěr množiny $A_k(U) \setminus A_{k-1}(U)$ také nejvýše spočetné sjednocení krychlí z $\mathcal{Q}_k$, které jsou stále obsaženy v U. Všechny tyto krychle mají disjunktní vnitřky a jejich sjednocení je rovno U. $\square$

Nyní můžeme dokázat Větu o substituci v Lebesgueově integrálu, která má zásadní význam pro aplikace. Připomeňme, že zobrazení $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, nazýváme *difeomorfismus*, je-li $\phi : \Omega \to \phi(\Omega)$ bijekce, $\phi \in C^1(\Omega)$ a $\phi^{-1} \in C^1(\phi(\Omega))$. Připomeňme také, že je-li $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ prosté zobrazení třídy C^1 na Ω takové, že Jacobiho matice $D\phi(x)$ je regulární pro každé $x \in \Omega$, potom je ϕ difeomorfismus, jak plyne z Věty 3.54 o inverzní funkci. Navíc platí $D\phi^{-1}(y) = (D\phi(\phi^{-1}(y)))^{-1}$ pro všechna $y \in \phi(\Omega)$.

Věta 5.79 (O substituci)**:** Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus.

1. Je-li f lebesgueovsky měřitelná na $\phi(\Omega)$, potom je $f \circ \phi$ lebesgueovsky měřitelná na Ω a pokud navíc $f \geq 0$ nebo $f \in L(\phi(\Omega), m)$, potom platí:

$$\int_{\phi(\Omega)} f(x) \mathrm{d}x = \int_{\Omega} f \circ \phi(x) |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x.$$

2. Je-li $E \subset \Omega$ a $E \in \mathcal{L}^n$, potom $\phi(E) \in \mathcal{L}^n$ a $m(\phi(E)) = \int_E |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x$.

Důkaz. Dokážeme pouze 1. tvrzení pro borelovské měřitelnou funkci f a $\Omega \neq \emptyset$. Rozšíření tvrzení na lebesgueovsky měřitelné funkce i důkaz 2. tvrzení se provede standardní procedurou jako v důkazech Vět 5.75 a 5.76. Detaily jsou přenechány čtenáři.

Důkaz provedeme v několika krocích. V důkazu budeme na $\mathbb{R}^n$ uvažovat maximovou normu $\|x\|_\infty = \max_{j \in \hat{n}} |x_j|$, protože potom uzavřená n-krychle Q splývá s uzavřenou r-koulí $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_\infty \leq r\}$ pro nějaká $r \geq 0$ a $a \in \mathbb{R}^n$ (střed krychle). Všimněte si, že $m(Q) = (2r)^n$.

a) Uvažujme $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_\infty \leq r\}$ uzavřenou n-krychli obsaženou v Ω. Věta 3.26 o přírůstku platí ve stejném znění, nahradíme-li euklidovskou normu normou $\|\cdot\|_\infty$. K tomu si stačí uvědomit, že Lemma 3.27 platí i pro maximovou normu. Aplikujeme-li tuto Větu o přírůstku na ϕ a konvexní množinu Q, dostaneme

$$\|\phi(x) - \phi(a)\|_\infty \leq \left(\sup_{y \in Q} \|D\phi(y)\|\right) \|x - a\|_\infty \leq \left(\sup_{y \in Q} \|D\phi(y)\|\right) r$$

pro všechna $x \in Q$. Jinými slovy je množina $\phi(Q)$ obsažena v n-krychli, která je produktem intervalů délky $2r \left(\sup_{y \in Q} \|D\phi(y)\|\right)$, a proto

$$m(\phi(Q)) \leq \left[2r \left(\sup_{y \in Q} \|D\phi(y)\|\right)\right]^n = \left(\sup_{y \in Q} \|D\phi(y)\|\right)^n m(Q).$$

Aplikujeme-li tuto nerovnost se zobrazením ϕ nahrazeným $T^{-1} \circ \phi$, kde $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ je regulární, získáme s využitím Věty 5.76 nerovnost

$$m(\phi(Q)) = |\det T| \, m\big(T^{-1} \circ \phi(Q)\big) \leq |\det T| \left(\sup_{y \in Q} \|T^{-1} D\phi(y)\|\right)^n m(Q), \tag{67}$$

která platí pro každou uzavřenou n-krychli $Q \subset \Omega$ a regulární $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

b) Jelikož $\phi \in C^1(\Omega)$, je $D\phi$ spojité na Ω, a proto také na kompaktní množině Q. Podle Cantorovy Věty 2.96 je $D\phi$ spojité na Q stejnoměrně, a proto

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y, z \in Q, \|y - z\|_\infty < \delta) \left(\|D\phi(y) - D\phi(z)\| < \frac{\epsilon}{\sup_{x \in Q} \|(D\phi(x))^{-1}\|}\right).$$

Odtud dále vyvodíme, že

$$\begin{aligned} \left\|(D\phi(z))^{-1} D\phi(y)\right\| &\leq \left\|(D\phi(z))^{-1} (D\phi(y) - D\phi(z))\right\| + \|I\| \\ &\leq \sup_{x \in Q} \|(D\phi(x))^{-1}\| \|D\phi(y) - D\phi(z)\| + 1 < \epsilon + 1 \end{aligned}$$

pro všechna $y, z \in Q$ taková, že $\|y - z\|_\infty < \delta$.

Rozdělme n-krychli Q na podkrychle $Q_1, \dots, Q_N$ s disjunktními vnitřky a stranou menší než δ. Označme si $x_1, \dots, x_N$ středy krychlí $Q_1, \dots, Q_N$. Potom aplikujeme-li nerovnost (67), kde Q nahradíme Q_j a $T = D\phi(x_j)$, dostaneme

$$\begin{aligned} m(\phi(Q)) &\leq \sum_{j=1}^N m(\phi(Q_j)) \leq \sum_{j=1}^N |\det D\phi(x_j)| \left(\sup_{y \in Q_j} \left\| (D\phi(x_j))^{-1} D\phi(y) \right\| \right)^n m(Q_j) \\ &< (1+\epsilon) \sum_{j=1}^N |\det D\phi(x_j)| m(Q_j) \end{aligned} \tag{68}$$

Poslední výraz lze interpretovat jako integrál

$$\sum_{j=1}^N |\det D\phi(x_j)| m(Q_j) = \int_Q \sum_{j=1}^N |\det D\phi(x_j)| \chi_{Q_j}(x) \mathrm{d}x.$$

Protože je funkce $\det D\phi$ spojitá na Q, platí

$$\lim_{\delta \to 0+} \sum_{j=1}^N |\det D\phi(x_j)| \chi_{Q_j}(x) = |\det D\phi(x)|$$

pro každé $x \in Q$ (rozmyslete). Ze spojitosti $\det D\phi$ na kompaktu Q také plyne, že $\det D\phi$ je integrabilní na Q, a proto podle Lebesgueovy věty je

$$\lim_{\delta \to 0+} \sum_{j=1}^N |\det D\phi(x_j)| m(Q_j) = \int_Q |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x.$$

Tudíž pošleme-li v (68) $\epsilon \to 0+$ a $\delta \to 0+$, získáme nerovnost

$$m(\phi(Q)) \leq \int_Q |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x. \tag{69}$$

c) V dalším kroku ukážeme, že nerovnost (69) platí, i když Q nahradíme libovolnou borelovskou podmnožinou Ω. Uvažujme nejprve neprázdnou otevřenou množinu $U \subset \Omega$. Podle Lemma 5.78 je $U = \cup_{j=1}^\infty Q_j$, kde $\{Q_j\}_{j=1}^\infty$ jsou uzavřené n-krychle s disjunktními vnitřky. Společné hranice těchto krychlí jsou kartézským součinem uzavřených intervalů, z nichž jeden je jednobodová množina, a proto mají tyto hranice nulovou (n-dimenzionální) Lebesgueovu míru. Proto máme

$$m(\phi(U)) \leq \sum_{j=1}^\infty m(\phi(Q_j)) \leq \sum_{j=1}^\infty \int_{Q_j} |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x = \int_U |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x,$$

kde jsme využili nerovnost (69).

Označme $W_K := \{x \in \Omega \mid |x| < K \ \wedge \ |\det D\phi(x)| < K\}$, kde $K > 0$. Zvolme pevně $K > 0$ a předpokládejme, že E je borelovská podmnožina W_K. Z vnější regularity m, viz Věta 5.72, plyne existence otevřených množin $U_j \subset W_{K+1}$ takových, že $U_{j+1} \subset U_j$ pro každé $j \in \mathbb{N}$ a $m(E) = m(\cap_{j=1}^{\infty} U_j)$ (rozmyslete). Potom využijeme-li spojitosti míry m zespodu a Lebesgueovy Věty 5.43 (existenci integrabilní majoranty zajišťuje omezení na podmnožiny W_{K+1}), dostaneme

$$
\begin{aligned}
m(\phi(E)) &\leq m\left(\phi\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j\right)\right) = \lim_{j\to\infty} m(\phi(U_j)) = \lim_{j\to\infty} \int_{U_j} |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x \\
&= \int_{\cap_{j=1}^{\infty} U_j} |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x = \int_E |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Poslední rovnost platí, protože $m\left(\cap_{j=1}^{\infty} U_j \setminus E\right) = 0$.

Nakonec je-li $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ libovolná, aplikujeme předchozí argument na množinu $E \cap W_K$ a pošleme $K \to \infty$. Potom ze spojitosti míry m zdola a Věty 5.24 o monotónní konvergenci odvodíme, že nerovnost

$$
m(\phi(E)) \leq \int_E |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x \tag{70}
$$

platí pro každé $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

d) Nechť $f = \sum_{j=1}^{m} a_n \chi_{A_j}$ je nezáporná borelovsky měřitelná jednoduchá funkce na $\phi(\Omega)$. Potom s využitím (70) máme

$$
\int_{\phi(\Omega)} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{m} a_j m(A_j) \leq \sum_{j=1}^{m} a_j \int_{\phi^{-1}(A_j)} |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x = \int_{\Omega} f(\phi(x)) |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x.
$$

Dále aplikací Vět 5.15 a 5.24 dokážeme nerovnost

$$
\int_{\phi(\Omega)} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_{\Omega} f \circ \phi(x) |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x
$$

pro každou nezápornou borelovsky měřitelnou funkci f na $\phi(\Omega)$. Vezmeme-li v poslední nerovnosti funkci $|\det D\phi(\cdot)| f \circ \phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ místo f a zobrazení ϕ^{-1} místo ϕ, dostaneme

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} f \circ \phi(x) |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x &\leq \int_{\phi(\Omega)} (f \circ \phi)(\phi^{-1}(x)) |\det (D\phi)\left(\phi^{-1}(x)\right)| |\det D\phi^{-1}(x)| \mathrm{d}x \\
&= \int_{\phi(\Omega)} f(x)\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

kde jsme použili identitu $D\phi^{-1}(x) = \left((D\phi)(\phi^{-1}(x))\right)^{-1}$, viz Věta 3.54. Celkem jsme tedy dokázali rovnost

$$
\int_{\phi(\Omega)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\Omega} f \circ \phi(x) |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x
$$

pro každou nezápornou borelovsky měřitelnou funkci f na $\phi(\Omega)$. Je-li borelovsky měřitelná $f \in L(\phi(\Omega), m)$, stačí aplikovat získaný výsledek na jednotlivé funkce $(\mathrm{Re}\, f)^{\pm}$, $(\mathrm{Im}\, f)^{\pm}$ a využít rozklad $f = (\mathrm{Re}\, f)^{+} - (\mathrm{Re}\, f)^{-} + \mathrm{i}(\mathrm{Im}\, f)^{+} - \mathrm{i}(\mathrm{Im}\, f)^{-}$. $\square$

Poznámka: Větu o substituci lze dokázat i za mírně slabších předpokladů, viz [22, Věta 7.26].

Příklad 5.80: Pěknou aplikací Věty o substituci a Toneliho–Fubiniho věty je výpočet integrálu

$$I := \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} \mathrm{d}x,$$

kde $a > 0$, který není jednoduché spočítat metodami integrace funkcí jedné proměnné.

Kvadrát I můžeme podle Tonelliho–Fubiniho věty vyjádřit ve tvaru

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} \mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2} \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)} \mathrm{d}m(x,y).$$

V posledním integrálu provedeme substituci pomocí transformace do *polárních souřadnic*:

$$\phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Zobrazení $\phi : (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0] \times \{0\}$ je hladká bijekce. Navíc

$$\det D\phi(r,\varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r > 0,$$

a tudíž je ϕ (hladký) difeomorfismus podle Věty o inverzním zobrazení. Předpoklady Věty 5.79 o substituci jsou tedy splněny. Uvážíme-li ještě, že záporná polopřímka, kterou v oboru hodnot ϕ vyjímáme z roviny $\mathbb{R}^2$, je množina nulové (dvourozměrné) Lebesgueovy míry, dostaneme

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus (-\infty,0]\times\{0\}} e^{-a(x^2+y^2)} \mathrm{d}m(x,y) = \int_{(0,\infty)\times(-\pi,\pi)} e^{-ar^2} r \mathrm{d}m(r,\varphi).$$

Dále opět podle Tonelliho–Fubiniho věty máme

$$I^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} r e^{-ar^2} \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-ar^2} \mathrm{d}r = 2\pi \left[-\frac{1}{2a} e^{-ar^2} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{a},$$

a proto

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

5.7 Lebesgueovy prostory L^p

V celé této části budeme opět předpokládat, že je pevně dán obecný prostor s mírou $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Na lineárním prostoru integrabilních funkcí bychom rádi zavedli normu. Přirozeným kandidátem by byla volba

$$\|f\| := \int |f| \mathrm{d}\mu,$$

ovšem toto zobrazení je pouze seminorma, neboť z rovnosti $\|f\| = 0$ obecně neplyne $f = 0$ na X, ale pouze $f = 0$ μ-**s.v.** na X, viz Věta 5.39.

S tímto drobným nedostatkem se vypořádáme tak, že ztotožníme měřitelné funkce f a g, které se rovnají μ-s.v. Technicky se to provede tak, že lineární prostor měřitelných funkcí, označme ho na chvíli $\mathscr{M}$ (či nějaký jeho podprostor, viz níž) faktorizujeme podle relace „rovnost μ-s.v“. Tím se nám $\mathscr{M}$ rozpadne na množinu $M := \{[f] \mid f \in \mathscr{M}\}$ tříd ekvivalence $[f] := \{g \mid g = f\ \mu\text{-s.v}\}$. Na M zavedeme lineární strukturu přirozeným způsobem: $[f] + [g] := [f + g]$ a $\alpha[f] := [\alpha f]$. Zobrazení $\|\cdot\|$ zavedené na M vztahem $\|[f]\| := \|f\|$ je dobře definované, neboť hodnota integrálu nezávisí na volbě funkce (reprezentanta) z třídy $[f]$. Podstatné je, že nyní platí implikace: $\|[f]\| = 0 \Rightarrow [f] = [0]$ a třída $[0]$ je nulovým prvkem prostoru M.

Konstrukci klasických Lebesgueových prostorů $L^p \equiv L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, které závisí ještě na jednom indexu $p \in [1, \infty]$, provedeme v následujících pěti krocích:

I) Pro měřitelnou funkci $f : X \to \mathbb{C}$ a $p \in [1, \infty]$ definujeme

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}, \quad \text{je-li } p \in [1, \infty),$$

a

$$\|f\|_\infty := \inf\{c > 0 \mid |f(x)| \leq c \text{ pro } \mu\text{-s.v. } x \in X\}$$

je tzv. *esenciální supremum* funkce $|f|$.

II) Definujeme lineární prostor

$$\mathscr{L}^p \equiv \mathscr{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ měřitelná a } \|f\|_p < \infty\}.$$

III) Faktorizujeme $\mathscr{L}^p$ podle relace „rovnost μ-s.v.“ a definujeme tak množinu

$$L^p \equiv L^p(X, \mathcal{M}, \mu) := \{[f] \mid f \in \mathscr{L}^p\}.$$

IV) Na L^p zavedeme operace sčítání a násobení číslem $\alpha \in \mathbb{C}$ vztahy:

$$[f] + [g] := [f + g] \quad \text{a} \quad \alpha[f] := [\alpha f].$$

Dále definujeme zobrazení $\|\cdot\|_p : L^p \to [0, \infty)$ vztahem $\|[f]\|_p := \|f\|_p$. Tato definice je korektní, tj. nezávisí na volbě reprezentanta třídy $[f]$, protože $(\forall g \in [f])(\|g\|_p = \|f\|_p)$.

V) **Konvence:** Pokud není rozlišování mezi prvkem $[f]$ množiny L^p a reprezentantem f v principu věci, tak jej neprovádíme. Píšeme např. „funkce f náleží L^p“, tj. „$f \in L^p$“ a myslíme tím $[f] \in L^p$.

Poznámka: Případ $p = \infty$ je trochu speciální. Všimněte si, že pro $g : X \to [0, \infty)$ měřitelnou platí:

$$(\mu\text{-s.v. } x \in X)(g(x) \leq \|g\|_\infty).$$

Skutečně je-li množina $\{c > 0 \mid (\mu\text{-s.v. } x \in X)(g(x) \leq c)\} = \emptyset$, pak klademe $\|g\|_\infty = \infty$ (z konvence pro infimum). Jinak

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists F_n \in \mathcal{M}, \mu(F_n) = 0)(\forall x \in X \setminus F_n)\left(g(x) \leq \|g\|_\infty + \frac{1}{n}\right).$$

Potom množina $F := \cup_{n=1}^\infty F_n$ je μ-nulová a pro všechna $x \in X \setminus F$ platí $g(x) \leq \|g\|_\infty$.

Měřitelná funkce $f : X \to \mathbb{C}$ taková, že $\|f\|_\infty < \infty$, se nazývá *esenciálně omezená.* Esenciálně omezená funkce nemusí být omezená. K dobrému pochopení definice esenciálního suprema si rozmyslete následující příklad.

Příklad 5.81: Uvažujme $X = \mathbb{R}$, Lebesgueovu míru $\mu = m$ a funkce

$$f(x) = \begin{cases} -3, & x < 0, \\ 5, & x \in \{1, 2, 4\}, \\ 1, & \text{jinak}, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^5, & x \in \mathbb{Q}, \\ \operatorname{arctg} x, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 1/x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Potom $\|f\|_\infty = 3$, $\|g\|_\infty = \pi/2$ a $\|h\|_\infty = \infty$.

Nejprve ukážeme, že zkonstruované prostory L^p jsou lineární prostory s normou $\|\cdot\|_p$ pro každé $p \in [1, \infty]$. Netriviální je ověřit, že $\|\cdot\|_p$ splňuje trojúhelníkovou nerovnost pro $p \in (1, \infty)$. Trojúhelníkovou nerovnost dokážeme pomocí tzv. *Hölderovy nerovnosti*, která je důležitá sama o sobě. Pro její důkaz budeme potřebovat následující pomocnou nerovnost.

Lemma 5.82 (Youngova nerovnost)**:** Nechť $a, b \geq 0$ a $p, q > 1$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom platí:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz. Důkaz stačí provést za předpokladu $ab > 0$, tj. $a > 0$ a $b > 0$, protože pro $ab = 0$ tvrzení zřejmě platí. Vyjdeme z toho, že funkce $f(x) = \ln x$ je konkávní funkce na $(0, \infty)$, neboť $f''(x) = -1/x^2 < 0$. Tudíž pro každé $x, y \in (0, \infty)$ a $\lambda \in (0, 1)$ platí nerovnost

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Položíme-li $\lambda := 1/p$, $x := a^p$ a $y := b^q$, potom $1 - \lambda = 1/q$ a dostaneme

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q,$$

což po úpravě implikuje Youngovu nerovnost. $\square$

Věta 5.83 (Hölderova nerovnost)**:** Nechť $p, q > 1$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a $f, g : X \to \mathbb{C}$ jsou měřitelné funkce. Potom platí:

$$\int |fg| \mathrm{d}\mu \leq \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \left(\int |g|^q \mathrm{d}\mu\right)^{1/q}.$$

Speciálně jsou-li $f \in L^p$ a $g \in L^q$, potom $fg \in L^1$ a platí:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Poslední tvrzení platí (triviálně) i pro limitní pár $p = 1$ a $q = \infty$.

Důkaz. Označme

$$s := \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \quad \text{a} \quad t := \left(\int |g|^q \mathrm{d}\mu\right)^{1/q}.$$

Je-li $s = 0$, potom je $f = 0$ μ-s.v., z čehož plyne, že $\int |fg|\mathrm{d}\mu = 0$, a tudíž nerovnost platí. Podobně pro $t = 0$. Je-li $s = \infty$ a $t > 0$, potom nerovnost platí triviálně a případ $t = 0$ již byl vyřízen.

Stačí tedy předpokládat, že $0 < s, t < \infty$. Aplikujeme-li Youngovu nerovnost (Lemma 5.82) s

$$a := \frac{|f(x)|}{s} \quad \text{a} \quad b := \frac{|g(x)|}{t},$$

dostaneme pro každé $x \in X$ nerovnost

$$\frac{|f(x)g(x)|}{st} \leq \frac{|f(x)|^p}{ps^p} + \frac{|g(x)|^q}{qt^q}.$$

Odtud máme

$$\frac{1}{st}\int |fg|\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{ps^p}\underbrace{\int |f|^p \mathrm{d}\mu}_{=s^p} + \frac{1}{qt^q}\underbrace{\int |g|^q \mathrm{d}\mu}_{=t^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

neboli

$$\int |fg|\mathrm{d}\mu \leq st,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Nyní již můžeme dokázat i trojúhelníkovou nerovnost pro $\|\cdot\|_p$, která je v tomto případě známá jako *Minkowského nerovnost.*

Věta 5.84 (Minkowského nerovnost)**:** Nechť $p \geq 1$ a $f, g : X \to \mathbb{C}$ jsou měřitelné funkce. Potom platí:

$$\left(\int |f+g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

Důkaz. Případ $p = 1$ plyne okamžitě z vlastností integrálu, neboť

$$\int |f+g|\mathrm{d}\mu \leq \int (|f| + |g|)\mathrm{d}\mu = \int |f|\mathrm{d}\mu + \int |g|\mathrm{d}\mu.$$

Nechť $p > 1$. Protože

$$\int |f+g|^p \mathrm{d}\mu \leq \int (|f| + |g|)^p \,\mathrm{d}\mu,$$

můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $f, g \geq 0$. Dále zřejmě stačí uvažovat jen případy, kdy je pravá strana Minkowského nerovnosti konečná a levá strana kladná, tj.

$$\int f^p \mathrm{d}\mu < \infty, \quad \int g^p \mathrm{d}\mu < \infty \quad \text{a} \quad \int (f+g)^p \mathrm{d}\mu > 0. \tag{71}$$

Aplikujeme-li (dvakrát) Hölderovu nerovnost na pravé straně v rovnosti

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$$

s $q := p/(p-1)$, aby $1/p + 1/q = 1$, odvodíme nerovnost

$$\int (f+g)^p \mathrm{d}\mu \leq \left[\left(\int f^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} + \left(\int g^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \right] \left(\int (f+g)^{\overbrace{q(p-1)}^{=p}} \mathrm{d}\mu \right)^{1/q}.$$

Nyní stačí obě strany vydělit členem $\left(\int (f+g)^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/q}$ a uvážíme-li, že $1 - 1/q = 1/p$, dostaneme Minkowského nerovnost. Toto dělení lze ovšem provést pouze tehdy, pokud je

$$0 < \int (f+g)^p \mathrm{d}\mu < \infty.$$

To je zaručeno předpoklady (71) a tím, že

$$\int (f+g)^p \mathrm{d}\mu \leq 2^{p-1} \left(\int f^p \mathrm{d}\mu + \int g^p \mathrm{d}\mu \right) < \infty,$$

kde jsme využili nerovnosti

$$\left(\frac{a+b}{2} \right)^p \leq \frac{a^p}{2} + \frac{b^p}{2},$$

která platí pro každé $a, b \geq 0$ a vyplývá z konvexnosti funkce $x \mapsto x^p$ na $(0, \infty)$. □

Důsledek 5.85: Pro každé $p \in [1, \infty]$ je $(L^p, \|\cdot\|_p)$ normovaný prostor.

Důkaz. Ověření homogenity $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$ pro každé $f \in L^p$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ je jednoduché přímo z definice $\|\cdot\|_p$. Z konstrukce prostorů L^p je také zaručena platnost implikace: $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ jakožto nulový element (třída) prostoru L^p, tj. $f = 0$ μ-s.v.

Trojúhelníková nerovnost

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

je důsledek Věty 5.84 pro každé $f, g \in L^p$ a $p \in [1, \infty)$. Je-li $p = \infty$, splňují funkce $f, g \in L^\infty$ nerovnosti $|f| \leq \|f\|_\infty$ a $|g| \leq \|g\|_\infty$ μ-s.v. na X, a proto také

$$|f+g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

μ-s.v. na X. Odtud plyne, že $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Celkem tedy vidíme, že L^p je lineární prostor a $\|\cdot\|_p$ je norma na L^p pro každé $p \in [1, \infty]$. □

Příklad 5.86: Jedna netriviální nerovnost, se kterou už jsme se v tomto kurzu setkali, plyne z Minkowského nerovnosti jako speciální případ. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ a položme $X := \hat{n}$, $\mathcal{M} := 2^X$ a μ počítací míru na $\hat{n}$. Potom má Minkowského nerovnost pro $p \geq 1$ tvar

$$\left(\sum_{j=1}^n |f(j) + g(j)|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^n |f(j)|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |g(j)|^p \right)^{1/p}$$

pro každé $f, g : \hat{n} \to \mathbb{C}$, což bychom mohli přepsat do tvaru

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{1/p}$$

pro $x, y \in \mathbb{C}^n$. Dostáváme tedy trojúhelníkovou nerovnost p-norem na $\mathbb{C}^n$.

Podobně vezmeme-li $X := \mathbb{N}$, $\mathcal{M} := 2^{\mathbb{N}}$ a μ počítací míru na $\mathbb{N}$, dostaneme nerovnost

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p\right)^{1/p}$$

pro libovolné komplexní posloupnosti $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ a $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$. Příslušný prostor $L^p(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ má v literatuře standardní značení

$$\ell^p(\mathbb{N}) := \left\{ \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\},$$

je-li $p \in [1, \infty)$ a

$$\ell^{\infty}(\mathbb{N}) := \left\{ \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \;\middle|\; \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < \infty \right\}$$

pro případ $p = \infty$.

Naprosto zásadní vlastností prostorů L^p je, že jsou úplné, což dokážeme v následující větě. Tedy pro každé $p \in [1, \infty]$ je L^p Banachův prostor a speciálně pro $p = 2$ je L^2 dokonce Hilbertův, protože norma $\|\cdot\|_2$ je indikována skalárním součinem

$$(f, g)_2 := \int \overline{f(x)} g(x) \mathrm{d}\mu(x),$$

kde $f, g \in L^2$.

Věta 5.87: Nechť $p \in [1, \infty]$. Potom $(L^p, \|\cdot\|_p)$ je úplný. Navíc je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská posloupnost funkcí z L^p, potom existuje podposloupnost $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $f \in L^p$ tak, že $\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f$ μ-s.v.

Důkaz. 1) Předpokládejme nejprve, že $p \in [1, \infty)$. Důkaz provedeme v několika krocích.

a) Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^p$ je cauchyovská, tzn., že

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0)(\forall m, n \geq n_0)(\|f_n - f_m\|_p < \epsilon).$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ položíme $\epsilon := 2^{-k}$ a najdeme $n_k \in \mathbb{N}$ tak, že

$$(\forall m, n \geq n_k) \left(\|f_n - f_m\|_p < \frac{1}{2^k} \right).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ je rostoucí. Označíme-li si podposloupnost $g_k := f_{n_k}$ pro $k \in \mathbb{N}$, platí

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \left(\|g_k - g_{k+1}\|_p < \frac{1}{2^k} \right). \tag{72}$$

b) Definujme posloupnost funkcí

$$h_k := |g_1| + \sum_{j=2}^{k} |g_j - g_{j-1}|, \quad k \in \mathbb{N},$$

Podle odhadu (72) a trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\|h_k\|_p \le \|g_1\|_p + \sum_{j=2}^{k} \|g_j - g_{j-1}\|_p < \|g_1\|_p + 1$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$. Jelikož $0 \le h_k \le h_{k+1}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, můžeme aplikovat Větu 5.24 o monotónní konvergenci na posloupnost $\{h_k^p\}_{k=1}^{\infty}$, z níž pro limitní funkci $h := \lim_{k\to\infty} h_k$ dostaneme

$$\int h^p \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int h_k^p \mathrm{d}\mu \le (\|g_1\|_p + 1)^p < \infty,$$

neboli h^p je integrabilní.

c) Protože $\int h^p \mathrm{d}\mu < \infty$, je $h^p < \infty$ μ-s.v., a tudíž také $h < \infty$ μ-s.v., viz Lemma 5.33. Zvolme $x \in X$, pro které je $h(x) < \infty$. Potom

$$|g_1(x)| + \sum_{j=2}^{\infty} |g_j(x) - g_{j-1}(x)| = h(x) < \infty.$$

To znamená, že řada

$$g_1(x) + \sum_{j=2}^{\infty} (g_j(x) - g_{j-1}(x))$$

konverguje absolutně, a tudíž je také konvergentní. Označíme si její součet $f(x)$ (máme kandidáta na limitu posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$). Potom

$$f(x) = g_1(x) + \lim_{k\to\infty} \sum_{j=2}^{k} (g_j(x) - g_{j-1}(x)) = \lim_{k\to\infty} g_k(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x), \tag{73}$$

neboli $f_{n_k} \to f$ μ-s.v., čímž bude dokázáno 2. tvrzení věty, až navíc ověříme, že $f \in L^p$.

d) K dokončení důkazu úplnosti L^p, ukážeme, že $\|f - g_k\|_p \to 0$. Potom totiž podle 4. tvrzení Lemma 2.107 je také $\|f - f_n\|_p \to 0$. Z (73) plyne, že $|f - g_k|^p \to 0$ μ-s.v. Dále pro $k \le m$ máme

$$|g_k - g_m| \le \sum_{j=k}^{m-1} |g_j - g_{j+1}|$$

a pošleme-li $m \to \infty$, dostaneme $|g_k - f| \leq h$ μ-s.v. Potom také $|g_k - f|^p \leq h^p$ μ-s.v. a jelikož je h^p integrabilní (majoranta), ospravedlňuje Lebesgueova věta záměnu limity a integrálu v rovnosti

$$\lim_{k\to\infty} \|f - g_k\|_p^p = \lim_{k\to\infty} \int |f - g_k|^p \mathrm{d}\mu = \int 0 \mathrm{d}\mu = 0,$$

což jsme chtěli ukázat. Navíc pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ máme

$$\|f\|_p \leq \|f - g_k\|_p + \|g_k\|_p < \infty,$$

neboť $g_k \in L^p$ a $\|f - g_k\|_p \to 0$. Tedy $f \in L^p$.

2) Důkaz věty pro $p = \infty$ je mnohem jednodušší. Buď $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská posloupnost v $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ označme μ-nulové množiny

$$A_{m,n} := \{x \in X \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

a položme $F := \cup_{m,n=1}^\infty A_{m,n}$. Potom $\mu(F) = 0$. Dále z cauchyovosti $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ vyplývá, že ke každému $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\sup_{x\in F^c} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$$

pro všechna $m, n \geq n_0$. To je ovšem Bolzanova–Cauchyho podmínka pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí f_n na F^c, viz Věta 1.12, a proto existuje funkce f definovaná na F^c tak, že

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in F^c} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Dodefinujme $f(x) := 0$ pro $x \in F$. Potom $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ a esenciální omezenost f plyne z nerovnosti $\|f\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty$, která platí pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. $\square$

5.8 Derivace míry a Radon–Nikodymova věta*

„Nepřednáší se ... snad někdy v budoucnu dopíšu.“

5.9 Cvičení

Cvičení 5.1: Nechť $f : X \to Y$. Ověřte následující vlastnosti vzoru množiny:

$$f^{-1}\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f^{-1}(E_\alpha), \quad f^{-1}\left(\bigcap_\alpha E_\alpha\right) = \bigcap_\alpha f^{-1}(E_\alpha), \quad f^{-1}\left(E^c\right) = \left(f^{-1}(E)\right)^c,$$

kde $E \subset X$ a $\{E_\alpha\}_\alpha \subset X$.

Cvičení 5.2: Dokažte rovnosti:

1. $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{E \subset \overline{\mathbb{R}} \mid E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$,
2. $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \mathcal{M}\left(\{(a, \infty] \mid a \in \mathbb{R}\}\right)$ a $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \mathcal{M}\left(\{[-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}\right)$.

Cvičení 5.3: Ověřte, že pro měřitelné funkce $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ platí:

1. Zvolme pevně $a \in \overline{\mathbb{R}}$, potom funkce $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definovaná vztahem

$$h(x) := \begin{cases} a, & \text{je-li } f(x) = -g(x) = \pm\infty, \\ f(x) + g(x), & \text{jinak,} \end{cases}$$

   je měřitelná.

2. Funkce fg je měřitelná (s konvencí $0 \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot 0 = 0$).

Cvičení 5.4: Předpokládejte platnost Fatouova lemma a pomocí něj dokažte Větu o monotónní konvergenci.

Cvičení 5.5: Dokažte následující variantu Věty o monotónní konvergenci pro nerostoucí posloupnost funkcí: Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{L}_+$, pro každé $\in \mathbb{N}$ je $f_n \geq f_{n+1}$, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ $(= \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n)$ a $\int f_1 \mathrm{d}\mu < \infty$. Potom $f \in \mathscr{L}_+$ a platí

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Najděte příklad, který ukazuje, že tvrzení neplatí, vynecháme-li předpoklad $\int f_1 \mathrm{d}\mu < \infty$.

Cvičení 5.6: Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{L}_+$, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ a $\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu < \infty$. Dokažte, že potom pro každé $E \in \mathcal{M}$ platí:

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu.$$

Dále ukažte na konkrétním příkladu, že tvrzení neplatí, pokud $\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \infty$.

Cvičení 5.7: Nechť $f \in \mathscr{L}_+$ a $\int f \mathrm{d}\mu < \infty$. Dokažte, že

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists E \in \mathcal{M}, \mu(E) < \infty)\left(\int_E f \mathrm{d}\mu > \left(\int f \mathrm{d}\mu\right) - \epsilon\right).$$

Cvičení 5.8: Nechť μ je konečná míra, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost omezených měřitelných funkcí a $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$. Dokažte, že $f \in L$ a platí

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Dále na konkrétním příkladu ukažte, že tvrzení neplatí, pokud $\mu(X) = \infty$.

Cvičení 5.9: Modifikujte postup důkazu 3. tvrzení Věty 5.46 a ukažte, že také prostor $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ hladkých funkcí s kompaktním nosičem je hustý v $L^1(\mu)$, kde μ je Lebesgueova–Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$.

Cvičení 5.10: Dokažte vlastnosti oscilace z důkazu Věty 5.54.

Cvičení* 5.11: Nechť $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, $\mu = m$ je Lebesgueova míra (zúžená na $\mathcal{B}_{[0,1]}$) a ν je počítací míra. Nechť $D = \{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$. Ukažte, že všechny tři integrály

$$\int\int f \mathrm{d}\mu \mathrm{d}\nu, \quad \int\int f \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\mu, \quad \int f \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)$$

mají různou hodnotu.
(Hint: Obtížné je ukázat, že $\int f \mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \infty$. Je třeba použít definici $\mu \otimes \nu$ pomocí vnější míry, viz (37). Uvažujme $\{A_n \times B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}_{[0,1]} \times \mathcal{B}_{[0,1]}$ pokrývající D. Ozn. $M := \{n \in \mathbb{N} \mid \mu(A_n) = 0\}$ a $S := \cup_{n\in M} A_n$. Potom $\mu(S) = 0$, a proto je $[0,1] \setminus S$ nespočetná. Množina $\{(x,x) \mid x \in [0,1] \setminus S\}$ je pokrytá množinami $\{A_n \times B_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus M}$, tj. $(\forall x \in [0,1] \setminus S)(\exists n \in \mathbb{N} \setminus M)((x,x) \in A_n \times B_n)$. Speciálně $[0,1] \setminus S \subset \cup_{n\in\mathbb{N}\setminus M} B_n$, a proto existuje $n_0 \in \mathbb{N} \setminus M$ tak, že B_{n_0} je nekonečná (dokonce nespočetná). Protože navíc $\mu(A_{n_0}) > 0$, je $\mu(A_{n_0})\nu(B_{n_0}) = \infty$.)

Cvičení 5.12: Doplňte detaily v důkazu Věty 5.72.

Cvičení 5.13: Nechť $R \in \mathbb{R}^{n,n}$ je takové, že $\|Rx\| = \|x\|$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$, kde $\|\cdot\|$ je euklidovská norma na $\mathbb{R}^n$. Ukažte, že R je ortogonální matice, tj. $R^T R = I$.

Cvičení 5.14: Prozkoumejte vztah mezi integrály

$$\int_{[0,1]^2} f(x,y) \mathrm{d}m(x,y), \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y, \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x,$$

kde

1. $$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

2. $$f(x,y) = \frac{1}{(1-xy)^a}, \quad a > 0,$$

3. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1/2)^3}, & 0 < y < |x - 1/2|, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Cvičení 5.15: Dokažte, že
$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} \frac{1}{a}$$
pro každé $a > 0$.
(Hint: Integrujte funkci $e^{-axy} \sin(x)$ podle x a y.)

Cvičení 5.16: Dokažte, že
$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin^2 x}{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \ln\left(1 + \frac{4}{a^2}\right)$$
pro každé $a > 0$.
(Hint: Integrujte funkci $e^{-ax} \sin(2xy)$ podle x a y.)

Cvičení 5.17: Dokažte, že
$$\int_{\mathbb{R}} x^{2n} e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \frac{(2n)!}{4^n n!} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{n+1/2}}$$
pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a $a > 0$.
(Hint: Derivujte integrál z Příkladu 5.80 podle a a aplikujte Větu 5.48.)

Cvičení 5.18: Nechť $p \in [1, \infty)$. Ukažte, že z konvergence μ-skoro všude neplyne konvergence v $(L^p, \|\cdot\|_p)$ a ani naopak.
(Hint: Např. pro μ Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}$ zkoumejte posloupnosti $f_n = n^{-1}\chi_{(0,n)}$ a $g_n = \chi_{[j2^{-k},(j+1)2^{-k})}$ pro $n = 2^{k-1} + j$, kde $k \in \mathbb{N}$ a $j \in \{0, 1, \ldots, 2^{k-1} - 1\}$.)

Cvičení 5.19: Dokažte, že z konvergence v prostoru $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ vyplývá konvergence μ-s.v., ale ne naopak.
(Hint: Pro ilustraci neplatné implikace uvažujte např. μ Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}$ a posloupnost $f_n = \chi_{(n,n+1)}$.)

Cvičení 5.20: Dokažte, že pokud $1 \leq p < q \leq \infty$ a $\mu(X) < \infty$, pak je $L^q \subset L^p$.
(Hint: Hölderova nerovnost.)


YOU'VE CHANGED