4 Teorie míry

4.1 Úvod

Jedním z velkých problémů geometrie bylo najít vhodnou matematickou definici pro *obsah* nebo *objem* nějaké oblasti v rovině nebo prostoru. Ideálně bychom rádi našli nějakou funkci, která by podmnožině $\mathbb{R}^n$ přiřadila nezápornou hodnotu (nebo ∞) a měla „rozumné“ vlastnosti, které by byly v souladu s tím, jak intuitivně chápeme pojem *obsah* či *objem*. To znamená, že bychom např. požadovali, aby sjednocení dvou disjunktních množin mělo objem rovný součtu objemů jednotlivých množin. Dále bychom očekávali, že posunutím množiny nezměníme její objem a podobně rotováním nebo zrcadlením. Nakonec by hledaný *zobecněný objem* měl přiřadit základním množinám jako je obdélník, kvádr, atd. hodnoty, jaké bychom čekali, tzn. součin délek stran.

Formalizujeme-li si tyto základní požadavky, pak vhodným kandidátem pro zobecněný objem by byla množinová funkce $\mu : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$, která má následující vlastnosti:

i) Je-li $E_1, E_2, \ldots$ konečná či nekonečná posloupnost po dvou disjunktních množin, potom

$$\mu(E_1 \cup E_2 \cup \ldots) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \ldots .$$

ii) Jsou-li množiny E a F tzv. *kongruentní* $E \simeq F$, tj. E lze transformovat na F posunutím, otočením a zrcadlením, potom $\mu(E) = \mu(F)$.

iii) Pro objem jednotkové n-krychle máme

$$\mu\left([0, 1)^n\right) = 1.$$

Bohužel žádná množinová funkce μ, která by měla všechny vlastnosti (i)-(iii), **neexistuje**, viz Věta 4.1. Zde se už dotýkáme základů matematiky nastavených v teorii množin, konkrétně důkaz avizované neexistence používá tzv. *axiom výběru*. V celém kurzu reálné analýzy neustále (mlčky) přijímáme tzv. ZF axiomatiku teorie množin, což je sada velmi abstraktních axiomů, které ukotvují práci s množinami a zbavují teorii množin různých paradoxů. Zkratka ZF odkazuje na matematiky Zermela a Franenkela, kteří axiomatiku teorie množin sestavili. Často ovšem s touto základní sadou nevystačíme a přidáváme ještě jeden speciální axiom - axiom výběru. Mluvíme pak o ZFC axiomatice teorie množin (C = „axiom of Choice“). **Axiom výběru** postuluje:

Nechť $\mathcal{I} \neq \emptyset$ je (indexová) množina libovolné mohutnosti a $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ neprázdné a po dvou disjuktní množiny, tzn. $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$, pokud $\alpha \neq \beta$. Potom existuje množina C tak, že pro každé $\alpha \in \mathcal{I}$ je $X_\alpha \cap C$ jednobodová množina.

Tedy množina C *vybírá* z každé množiny X_α jeden prvek. Může se to zdát překvapivé, ale tato vlastnost výběru není automatická, je nezávislá na ZF axiomatice a musí se speciálně postulovat. Přijmutím axiomu výběru se matematika stává mnohem zajímavější.

Věta 4.1: Funkce $\mu : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ mající vlastnosti (i)-(iii) neexistuje.

Důkaz. Důkaz provedeme jen pro případ $n = 1$. Ideu důkazu lze použít i pro obecný případ $n \in \mathbb{N}$.

Nejprve definujeme relaci $\sim$ na $[0,1)$. Dva prvky $x, y \in [0,1)$ jsou v relaci $x \sim y$, právě když $x - y \in \mathbb{Q}$. Snadno se ověří, že relace $\sim$ je ekvivalence na $[0,1)$. Potom se interval $[0,1)$ rozkládá na disjunktní sjednocení tříd ekvivalence $[x] := \{y \in [0,1) \mid y \sim x\}$. Z každé z těchto tříd vybereme libovolně jednoho reprezentanta a množinu s těmito reprezentanty označíme N. Zde používáme axiom výběru!

Označme $R := \mathbb{Q} \cap [0,1)$. Pro každé $r \in R$ definujeme množinu

$$N_r := \{x + r \mid x \in N \cap [0, 1-r)\} \cup \{x + r - 1 \mid x \in N \cap [1-r, 1)\}.$$

Množina N_r není nic jiného než množina N s prvky posunutými o racionální r, ovšem pokud při posunutí přetečeme z $[0,1)$ za bod 1, vrátíme se zleva od 0 zpátky do $[0,1)$ (můžete si představit, že koncové body intervalu $[0,1)$ spojíme v kružnici a body posouváme po kružnici).

Zřejmě $N_r \subset [0,1)$. Dále tvrdíme, že

$$(\forall x \in [0,1))(\exists_1 r \in R)(x \in N_r).$$

Tento výrok si zaslouží krátký důkaz:

a) *Existence*: Nechť $x \in [0,1)$. Potom $[x] \cap N = \{y\}$ pro nějaké $y \in [0,1)$ (reprezentant). Protože $x \sim y$, je $x - y \in \mathbb{Q}$. Položíme-li

$$r := \begin{cases} x - y, & x \geq y, \\ 1 + x - y, & x < y, \end{cases}$$

potom je $x \in N_r$ z definice množiny N_r.

1. *Jednoznačnost:* Nechť $x \in N_r \cap N_s$ pro nějaká $r, s \in R$, $r \neq s$. Lze uvažovat 4 situace. Pokud např. je x z první množiny ze sjednocení definující N_r, a stejně tak N_s, potom $x - r \in N$ i $x - s \in N$. Samozřejmě také $x - r \in [x]$ i $x - s \in [x]$, a tudíž $x - r = x - s$, neboť množina je $[x] \cap N$ je jednobodová. Z poslední rovnosti ovšem plyne, že $r = s$, což je spor. Ke stejnému závěru dojdeme, budeme-li uvažovat situaci $x - r + 1 \in N$ a $x - s + 1 \in N$.
   Situace $x - r \in N$ a $x - s + 1 \in N$, nebo $x - s + 1 \in N$ a $x - r \in N$, také nenastávají, neboť např. z první vyvodíme, že $-r = 1 - s$, což není možné pro $r, s \in [0,1)$.

Dostali jsme tedy rozklad

$$[0,1) = \bigcup_{r \in R} N_r, \tag{34}$$

kde množiny N_r, $r \in R$, jsou po dvou disjunktní a je jich spočetně mnoho, protože R je spočetná množina. Předpokládejme, že existuje μ splňující (i)-(iii). Použijeme-li vlastnosti (i) a (ii), dostaneme

$$\begin{aligned} \mu(N) &= \mu(N \cap [0, 1-r)) + \mu(N \cap [1-r, 1)) \\ &= \mu\left(\{x + r \mid x \in N \cap [0, 1-r)\}\right) + \mu\left(\{x + r - 1 \mid x \in N \cap [1-r, 1)\}\right) = \mu(N_r) \end{aligned}$$

pro všechna $r \in R$. Potom ovšem podle (34) a vlastností (i) a (iii) je

$$1 = \mu([0,1)) = \sum_{r \in R} \mu(N_r) = \sum_{r \in R} \mu(N) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } \mu(N) = 0, \\ \infty, & \text{pokud } \mu(N) > 0, \end{cases}$$

což je spor. □

Mohli bychom namítnout, že vlastnost (i) pro spočetná sjednocení je příliš silná a zeslabit (i) tak, že bychom uvažovali pouze konečné posloupnosti množin. To by ovšem nebylo rozumné. Jednak je to právě tato spočetná aditivita μ, co umožňuje limitní přechody v teorii míry, které jsou zásadní v aplikacích. Navíc pro dimenze $n \geq 3$ neexistuje ani μ splňující tuto slabší vlastnost (i) spolu s (ii) a (iii), jak vyplývá z následující pozoruhodné věty, kterou dokázali Banach a Tarski v roce 1924. Důkaz opět využívá axiom výběru.

Věta 4.2 (Banach–Tarski)**:** Nechť $n \geq 3$ a $U, V \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené a omezené množiny. Potom existuje $k \in \mathbb{N}$ a množiny $E_1, \ldots, E_k, F_1, \ldots, F_k \subset \mathbb{R}^n$ tak, že

1. $E_1, \ldots, E_k$ jsou po dvou disjunktní a $\bigcup_{i=1}^k E_i = U$;
2. $F_1, \ldots, F_k$ jsou po dvou disjunktní a $\bigcup_{i=1}^k F_i = V$;
3. $(\forall i \in \hat{k})(E_i$ a F_i jsou kongruentní$)$.

Tedy je možné vzít kouli velikosti hrášku, rozkrájet ji na konečně mnoho dílů, ty posunout, otočit, příp. převrátit tak, že jejich složením vznikne např. koule velikosti Slunce. Samozřejmě je nemožné si toto „krájení“ geometricky představit a množiny E_i a F_i budou *velmi bizarní*. V každém případě Banachova–Tarského věta vylučuje existenci jakéhokoliv zobrazení $\mu : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$, kde $n \geq 3$, které by přiřadilo alespoň jedné omezené množině kladné konečné číslo a splňovalo vlastnost (i) pro konečné posloupnosti a vlastnost (ii).

Problém spočívá v tom, že se pokoušíme najít množinovou funkci μ definovanou na **všech** podmnožinách $\mathbb{R}^n$. Pokud se ale smíříme s tím, že nebudeme umět měřit některé množiny a definujeme μ jen na nějakém dostatečně bohatém systému podmnožin $\mathbb{R}^n$, potom již bude možné najít vhodného kandidáta na zobecněný objem (míru), tedy μ, jež bude mít všechny kýžené vlastnosti. Omezením se na tyto tzv. měřitelné množiny nepřijdeme o moc, neboť v podstatě všechny množiny, které v praxi chceme umět měřit, budou zahrnuty.

Je mimořádně výhodné, a navíc si to nevyžádá příliš práce navíc, vybudovat teorii míry a integrálu obecně a neomezovat se pouze na $\mathbb{R}^n$. Vlastnosti (ii) a (iii) jsou přímo svázány s euklidovskou geometrií prostoru $\mathbb{R}^n$. Je to pouze vlastnost (i), tzv. *σ-aditivita*, která je stěžejní pro obecnou definici *míry* μ. Míra nemusí mít pouze význam objemu, ale objevuje se v mnoha rozličných aplikacích. Např. ve fyzice může míra μ reprezentovat rozložení hmoty nebo náboje. Další aplikace jsou např. v teorii pravděpodobnosti, kde $\mu(E)$ reprezentuje pravděpodobnost nějakého jevu E. Začneme proto budovat obecnou teorii míry na abstraktních množinových systémech - tzv. *σ-algebrách*.

4.2 σ-algebra

V celé této části bude X označovat *neprázdnou abstraktní množinu.*

Definice 4.3 (Algebra)**:** Neprázdný systém množin $\mathcal{A} \subset 2^X$ nazveme *algebra*, právě když platí:

1. $E \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; E^c \equiv X \setminus E \in \mathcal{A}$,
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\,(E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{A})$.

Definice 4.4 (σ-algebra)**:** Neprázdný systém množin $\mathcal{A} \subset 2^X$ nazveme *σ-algebra*, právě když

1. $E \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; E^c \in \mathcal{A}$,
2. $\{E_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \bigcup_{i=1}^\infty E_i \in \mathcal{A}$.

Tedy algebra je neprázdný systém množin uzavřený na doplňky a konečná sjednocení, kdežto σ-algebra je uzavřená na doplňky a spočetná sjednocení. Všimněte si, že algebra $\mathcal{A}$ je uzavřená i na konečné průniky, neboť platí

$$\bigcap_{i=1}^n E_i = \left(\bigcup_{i=1}^n E_i^c\right)^c.$$

Podobně to platí pro σ-algebru a spočetné průniky. Dále algebra $\mathcal{A}$ obsahuje množiny $\emptyset, X$, neboť pro $E \in \mathcal{A}$ máme $\emptyset = E \cap E^c \in \mathcal{A}$ a $X = E \cup E^c \in \mathcal{A}$. Každá σ-algebra $\mathcal{A}$ je také algebra, neboť uzavřenost na konečná sjednocení dostaneme tak, že k daným množinám $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}$ dodefinujeme $E_i := \emptyset \in \mathcal{A}$ pro $i > n$ a použijeme uzavřenost $\mathcal{A}$ na spočetná sjednocení. Všimněte si také, že v algebře $\mathcal{A}$ platí implikace: $E, F \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; F \setminus E \in \mathcal{A}$, neboť $F \setminus E = F \cap E^c$.

Poznamenejme ještě, že pokud je algebra $\mathcal{A}$ navíc uzavřená na spočetná sjednocení posloupností *po dvou disjunktních* množin, potom je $\mathcal{A}$ σ-algebra. Skutečně je-li $\{E_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{A}$, položíme

$$F_n := E_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right) = E_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right)^c \in \mathcal{A},$$

a pak je $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost po dvou disjunktních množin, tj. $\forall i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ je $F_i \cap F_j = \emptyset$, a

$$\bigcup_{n=1}^\infty E_n = \bigcup_{n=1}^\infty F_n \in \mathcal{A}.$$

Tento „trik“, kdy nahradíme posloupnost množin $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ posloupností po dvou disjunktních množin $\{F_n\}_{n=1}^\infty$, je dobré si zapamatovat, protože ho ještě několikrát použijeme.

Příklad 4.5: Systémy $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X\}$ a $\mathcal{A}_2 = 2^X$ jsou σ-algebry. Je-li X nespočetná množina, potom také

$$\mathcal{A}_3 = \{E \subset X \mid E \text{ je nejvýše spočetná nebo } E^c \text{ je nejvýše spočetná}\}$$

je σ-algebra (ověřte).

Jelikož libovolný průnik σ-algeber je opět σ-algebra (ověřte) a potenční množina 2^Xje σ-algebra, můžeme definovat nejmenší σ-algebru obsahující pevně zvolené množiny následovně.

Definice 4.6 (σ-algebra generovaná systémem množin)**:** Nechť $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset 2^X$. Minimální σ-algebru obsahující $\mathcal{E}$, tj. systém

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \ \wedge \ \mathcal{A} \text{ je } \sigma\text{-algebra}\},$$

nazýváme *σ-algebra generovaná systémem $\mathcal{E}$.*

Následující jednoduché pozorování budeme často používat.

Lemma 4.7: Nechť $\emptyset \neq \mathcal{E}, \mathcal{F} \subset 2^X$. Je-li $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$, potom $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$.

Důkaz. Protože $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$, je $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ jednou ze σ-algeber $\mathcal{A}$ v průniku

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \ \wedge \ \mathcal{A} \text{ je } \sigma\text{-algebra}\}.$$

Odtud plyne $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$. □

Důležitým příkladem je σ-algebra generovaná otevřenými množinami.

Definice 4.8 (Borelovská σ-algebra, borelovské množiny)**:** Buď (X, τ) topologický prostor, σ-algebra $\mathcal{B}_X := \mathcal{M}(\tau)$ generovaná topologií τ se nazývá *borelovská σ-algebra* na X. Prvky $\mathcal{B}_X$ se nazývají *borelovské množiny.*

Poznámka: Borelovská σ-algebra $\mathcal{B}_X$ závisí na zvolené topologii na X, i když to explicitně nevyznačujeme. Systém množin $\mathcal{B}_X$ je velmi bohatý. Kromě všech otevřených a uzavřených množin obsahuje $\mathcal{B}_X$ např. spočetné průniky otevřených množin, tj. G_δ množiny; spočetná sjednocení uzavřených množin, tj. F_σ množiny; spočetná sjednocení G_δ množin, tj. $G_{\delta\sigma}$ množiny; atd.

Zejména borelovské podmnožiny $\mathbb{R}$ budou pro nás později velmi důležité. Borelovskou σ-algebru lze generovat systémy různých typů intervalů.

Věta 4.9: Pro každé $i \in \hat{8}$ platí:

$$\mathcal{B}_\mathbb{R} = \mathcal{M}(\mathcal{E}_i),$$

kde

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &:= \{(a,b) \mid a < b\}, & \mathcal{E}_2 &:= \{[a,b] \mid a < b\}, \\ \mathcal{E}_3 &:= \{(a,b] \mid a < b\}, & \mathcal{E}_4 &:= \{[a,b) \mid a < b\}, \\ \mathcal{E}_5 &:= \{(a,\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}, & \mathcal{E}_6 &:= \{(-\infty,a) \mid a \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{E}_7 &:= \{[a,\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}, & \mathcal{E}_8 &:= \{(-\infty,a] \mid a \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Důkaz. Intervaly ze systémů $\mathcal{E}_i$, $i \neq 3, 4$ jsou otevřené nebo uzavřené množiny. Intervaly z $\mathcal{E}_3$ a $\mathcal{E}_4$ jsou G_δ množiny, neboť např.

$$(a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, b + \frac{1}{n}\right).$$

Proto je $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ pro každé $i \in \hat{8}$ a z Lemma 4.7 dostáváme inkluzi $\mathcal{M}(\mathcal{E}_i) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ pro každé $i \in \hat{8}$.

Ukážeme opačné inkluze. Protože každá otevřená množina je spočetným sjednocením intervalů z $\mathcal{E}_1$, viz Cvičení 2.50, jsou otevřené množiny obsaženy v $\mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$. Použijeme-li opět Lemma 4.7, dostáváme inkluzi $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$.

Nyní stačí k ověření inkluzí $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_i)$ pro $i \geq 2$ ukázat, že otevřené intervaly (a, b) jsou obsaženy v množinách $\mathcal{M}(\mathcal{E}_i)$ pro každé $i \geq 2$ a aplikovat opět Lemma 4.7. Např. pro $i = 2$ máme

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_2).$$

Nebo pro $i = 6$ máme

$$(a, b) = (-\infty, b) \cap ((-\infty, a])^c = (-\infty, b) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, a + \frac{1}{n}\right)\right)^c \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_6).$$

Ověření ostatních případů je přenecháno čtenáři jako Cvičení 4.1. $\square$

Pro pozdější potřeby si musíme zavést tzv. *produktovou σ-algebru*. Zavedeme si ji pouze pro produkt konečně mnoha σ-algeber, ačkoliv v případě spočetně mnoha σ-algeber by definice i následující tvrzení zůstaly v platnosti v podstatě beze změn. V případě nespočetně mnoha σ-algeber by se už muselo postupovat trochu jinak.

Definice 4.10 (Produktová σ-algebra)**:** Buďte $n \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ σ-algebry na $X_1, \dots, X_n$. Potom σ-algebra

$$\otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i \equiv \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n := \mathcal{M}\left(\{E_1 \times \cdots \times E_n \mid E_i \in \mathcal{A}_i, i \in \hat{n}\}\right)$$

se nazývá *produktová σ-algebra* na $X_1 \times \cdots \times X_n$.

Lemma 4.11: Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ jsou σ-algebry na $X_1, \dots, X_n$. Potom

$$\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{M}\left(\{X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times E_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n \mid E_i \in \mathcal{A}_i, i \in \hat{n}\}\right).$$

Důkaz. Inkluze $\supset$: Stačí si všimnout, že pro libovolné $i \in \hat{n}$ a $F_i \in \mathcal{A}_i$ je

$$X_1 \times \cdots \times F_i \times \cdots \times X_n \in \{E_1 \times \cdots \times E_n \mid E_i \in \mathcal{A}_i, i \in \hat{n}\} \subset \otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$$

a aplikovat Lemma 4.7.

Inkluze $\subset$: Jelikož pro množiny $F_1 \in \mathcal{A}_1, \dots, F_n \in \mathcal{A}_n$ máme

$$\begin{aligned} F_1 \times \cdots \times F_n = & \bigcap_{i=1}^n X_1 \times \cdots \times F_i \times \cdots \times X_n \\ & \in \mathcal{M}\left(\{X_1 \times \cdots \times E_i \times \cdots \times X_n \mid E_i \in \mathcal{A}_i, i \in \hat{n}\}\right), \end{aligned}$$

vyplývá i opačná inkluze z Lemma 4.7. $\square$

Lemma 4.12: Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $X_i \in \mathcal{E}_i \subset 2^{X_i}$ pro každé $i \in \hat{n}$. Označme $\mathcal{A}_i := \mathcal{M}(\mathcal{E}_i)$. Potom

$$\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{M}\left(\{E_1 \times \cdots \times E_n \mid E_i \in \mathcal{E}_i, i \in \hat{n}\}\right).$$

Důkaz. Inkluze $\supset$: Stačí uvážit, že pro $E_i \in \mathcal{E}_i$, $i \in \hat{n}$, je

$$E_1 \times \cdots \times E_n \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$$

a aplikovat Lemma 4.7.

Inkluze $\subset$: Nejprve si všimneme, že pro $i \in \hat{n}$ je systém

$$\{E \subset X_i \mid X_1 \times \cdots \times E \times \cdots \times X_n \in \mathcal{M}\left(\{E_1 \times \cdots \times E_n \mid E_i \in \mathcal{E}_i, i \in \hat{n}\}\right)\}$$

σ-algebra obsahující $\mathcal{E}_i$ (zde je třeba předpoklad $X_i \in \mathcal{E}_i$), a tudíž obsahuje také $\mathcal{A}_i = \mathcal{M}(\mathcal{E}_i)$. Tedy pro každé $i \in \hat{n}$ a $F_i \in \mathcal{A}_i$ je

$$X_1 \times \cdots \times F_i \times \cdots \times X_n \in \mathcal{M}\left(\{E_1 \times \cdots \times E_n \mid E_i \in \mathcal{E}_i, i \in \hat{n}\}\right).$$

Potom podle Lemma 4.11 a 4.7 dostaneme

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n &= \mathcal{M}\left(\{X_1 \times \cdots \times F_i \times \cdots \times X_n \mid F_i \in \mathcal{A}_i, i \in \hat{n}\}\right) \\ &\subset \mathcal{M}\left(\{E_1 \times \cdots \times E_n \mid E_i \in \mathcal{E}_i, i \in \hat{n}\}\right).\end{aligned}$$

□

Věta 4.13: Nechť $n \in \mathbb{N}$, $(X_1, \tau_1), \ldots, (X_n, \tau_n)$ topologické prostory a kartézský součin $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ uvažujme s produktovou topologií $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_n$. Potom platí:

1. $\otimes_{i=1}^n \mathcal{B}_{X_i} \subset \mathcal{B}_X$.
2. Jsou-li navíc $(X_1, \tau_1), \ldots, (X_n, \tau_n)$ separabilní metrické prostory, potom $\otimes_{i=1}^n \mathcal{B}_{X_i} = \mathcal{B}_X$.

Důkaz. 1. Nechť $U_i \in \tau_i$ pro všechna $i \in \hat{n}$. Potom $U_1 \times \cdots \times U_n \in \tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_n$, a proto

$$\mathcal{M}(\{U_1 \times \cdots \times U_n \mid U_i \in \tau_i, i \in \hat{n}\}) \subset \mathcal{M}(\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_n) = \mathcal{B}_X.$$

Odtud a podle Lemma 4.12 vyvodíme $\otimes_{i=1}^n \mathcal{B}_{X_i} \subset \mathcal{B}_X$.

2. Předpokládejme, že pro každé $i \in \hat{n}$ je (X_i, τ_i) separabilní metrický prostor a označme C_i spočetnou hustou podmnožinu X_i. Potom je systém koulí se středy v bodech množiny C_i a racionálními poloměry, tj.

$$\{B_x(r) \mid x \in C_i, r \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}\}$$

bází prostoru (X_i, τ_i); ověřte jako Cvičení 4.2. Označme

$$\mathcal{E}_i := \{B_x(r) \mid x \in C_i, r \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}\} \cup \{X_i\}.$$

Tedy každá otevřená množina z X_i je sjednocení množin z $\mathcal{E}_i$ a toto sjednocení je navíc nejvýše spočetné, neboť $\mathcal{E}_i$ je spočetná. Odtud vidíme, že $\tau_i \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_i)$. Dále z Lemma 4.7 plyne $\mathcal{B}_{X_i} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_i)$. Navíc opačná inkluze platí také, protože $\mathcal{E}_i \subset \tau_i$. Nakonec tedy dostáváme

$$\mathcal{B}_{X_i} = \mathcal{M}(\mathcal{E}_i) \tag{35}$$

pro každé $i \in \hat{n}$.

Protože je pro každé $i \in \hat{n}$ systém $\mathcal{E}_i$ báze (X_i, τ_i), je $\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n$ báze $(X, \tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_n)$, viz Cvičení 2.45. Uvážíme-li navíc, že $\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n$ je spočetná, je každá otevřená množina A v X spočetným sjednocením množin z $\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n$, neboli

$$\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_n \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n)$$

Odtud a z Lemma 4.7 plyne

$$\mathcal{B}_X \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n).$$

Nakonec díky vztahu (35) a protože $X_i \in \mathcal{E}_i$ dostaneme aplikací Lemma 4.12 rovnost

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n) = \otimes_{i=1}^n \mathcal{B}_{X_i},$$

a tudíž $\mathcal{B}_X \subset \otimes_{i=1}^n \mathcal{B}_{X_i}$. □

Reálná čísla s obvyklou topologií tvoří separabilní metrický prostor, a proto platí následující okamžitý důsledek

Důsledek 4.14: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \underbrace{\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_{n\text{krát}}.$$

Tuto sekci uzavřeme jedním pomocným tvrzením, které použijeme později.

Definice 4.15 (Elementární systém)**:** Systém množin $\mathcal{E} \subset 2^X$ nazýváme *elementární systém*, právě když platí:

1. $\emptyset \in \mathcal{E}$.
2. Je-li $E, F \in \mathcal{E}$, potom $E \cap F \in \mathcal{E}$.
3. Je-li $E \in \mathcal{E}$, potom je E^c konečným sjednocením po dvou disjunktních množin z $\mathcal{E}$.

Lemma 4.16: Buď $\mathcal{E} \subset 2^X$ elementární sytém. Potom systém množin $\mathcal{A}$, které jsou tvořeny konečnými sjednoceními po dvou disjunktních množin z $\mathcal{E}$, je algebra.

Důkaz. Ověříme uzavřenost $\mathcal{A}$ na komplement a konečná sjednocení.

1. Uzavřenost $\mathcal{A}$ na konečná sjednocení: Je-li $A, B \in \mathcal{A}$, potom $A = \cup_{i=1}^k A_i$ a $B = \cup_{j=1}^l B_j$, kde $\{A_i\}_{i=1}^k, \{B_j\}_{j=1}^l \subset \mathcal{E}$ a

$$A \cup B = A_1 \cup \cdots \cup A_k \cup B_1 \cup \cdots \cup B_l.$$

Proto stačí dokázat implikaci

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E} \ \Rightarrow A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, což provedeme indukcí.

Případ $n = 2$: nechť $A_1, A_2 \in \mathcal{E}$. Podle vlastnosti 3. elementárního systému $\mathcal{E}$ je $A_2^c = \cup_{j=1}^m C_j$, kde $\{C_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{E}$ jsou po dvou disjunktní. Potom

$$A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap A_2^c = A_1 \cap \bigcup_{j=1}^m C_j = \bigcup_{j=1}^m A_1 \cap C_j \in \mathcal{A},$$

neboť množiny $A_1 \cap C_j$, $j \in \hat{m}$, jsou po dvou disjunktní. Z toho dále vyplývá, že

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup A_2 \in \mathcal{A}.$$

Indukční krok $n-1 \mapsto n$: Předpokládejme, že $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$. Dle indukčního předpokladu je $A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \in \mathcal{A}$, a tudíž existují po dvou disjunktní množiny $B_1, \dots, B_{m_n} \in \mathcal{E}$ tak, že

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i = \bigcup_{j=1}^{m_n} B_j.$$

Potom máme

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_n \cup \bigcup_{j=1}^{m_n} B_j = A_n \cup \bigcup_{j=1}^{m_n} (B_j \setminus A_n)\,.$$

Jelikož množiny $B_j \setminus A_n \in \mathcal{A}$ dle předchozího kroku a jsou opět po dvou disjunktní, lze poslední výraz napsat jako konečné sjednocení po dvou disjunktních množin z $\mathcal{E}$, tedy patří do $\mathcal{A}$.

2. Uzavřenost $\mathcal{A}$ na komplement: Buď $A \in \mathcal{A}$. Potom $A = \cup_{i=1}^n A_i$, kde $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ a pro každé $i \in \hat{n}$ máme

$$A_i^c = \bigcup_{j=1}^{k_i} B_j^i,$$

kde $B_1^i, \dots B_{k_i}^i \in \mathcal{E}$ jsou po dvou disjunktní. Odtud můžeme A^c vyjádřit jako

$$A^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c = \bigcap_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{k_i} B_j^i = \bigcup \left\{ B_{j_1}^1 \cap \dots \cap B_{j_n}^n \mid 1 \le j_i \le k_i, i \in \hat{n} \right\} \in \mathcal{A}.$$

V poslední rovnosti jsme použili (několikanásobně) de Morganův zákon $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Je třeba si také uvědomit, že množiny $B_{j_1}^1 \cap \dots \cap B_{j_n}^n$ a $B_{j_1'}^1 \cap \dots \cap B_{j_n'}^n$ jsou disjunktní, kdykoliv je $j_i \neq j_i'$ alespoň pro jedno $i \in \hat{n}$. $\square$

4.3 Míra

Definice 4.17 (Míra, měřitelný prostor, prostor s mírou, měřitelná množina)**:** Nechť $\mathcal{A} \subset 2^X$ je σ-algebra na X. Množinovou funkci $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ splňující

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. je-li $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ posloupnost po dvou disjunktních množin, potom

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \qquad \text{(tzv. } \sigma\textit{-aditivita } \mu\text{)},$$

nazýváme *míra* na X (nebo na $(X, \mathcal{A})$). Uspořádanou dvojici $(X, \mathcal{A})$ nazýváme *měřitelný prostor*, uspořádanou trojici $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor s mírou* a množiny σ-algebry $\mathcal{A}$ *měřitelné množiny*.

Poznámka: Uvědomte si, že míra μ je i konečně aditivní, tj. pro lib. $n \in \mathbb{N}$ a $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní platí:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j),$$

neboť stačí položit $E_j := \emptyset$ pro $j > n$ a použít vlastnosti 1. a 2. z definice míry.

Definice 4.18 (Konečná míra, σ-konečná míra)**:** Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Míra μ se nazývá *konečná*, právě když $\mu(X) < \infty$. Míra μ se nazývá *σ-konečná*, právě když existuje $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ tak, že $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = X$ a $\mu(E_n) < \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka: Je-li μ konečná míra, potom $(\forall E \in \mathcal{A})(\mu(E) < \infty)$, neboť $\mu(E) + \mu(E^c) = \mu(X) < \infty$, z čehož plyne $\mu(E) \leq \mu(X) < \infty$. Naštěstí většina měr, se kterými pracujeme v aplikacích, jsou alespoň σ-konečné. Míry, které nejsou σ-konečné, mají řadu patologických vlastností.

Uveďme si několik příkladů měr.

Příklad 4.19 (Diracova míra)**:** Nechť $X \neq \emptyset$ a $\mathcal{A} = 2^X$ a $x_0 \in X$. Pro každé $E \subset X$ definujme

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x_0 \in E, \\ 0, & \text{pokud } x_0 \notin E. \end{cases}$$

Snadno se ověří, že δ_{x_0} je míra na X a nazývá se *Diracova (delta) míra* v bodě x_0.

Příklad 4.20: Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ a $\{a_n\}_{n=1}^{N} \subset [0, \infty)$, kde $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Potom μ definovaná pro každé $E \subset X$ vztahem

$$\mu(E) := \sum_{n=1}^{N} a_n \delta_{x_n}(E)$$

je σ-konečná míra (ověřte). Míra μ je konečná, právě když $\sum_{n=1}^{N} a_n < \infty$.

Příklad 4.21 (Počítací míra)**:** Nechť $X \neq \emptyset$ a $\mathcal{A} = 2^X$. Pro $E \subset X$ definujme $\mu(E) := |E|$, tj. $\mu(E)$ je počet prvků množiny E. Potom μ je míra na X a nazývá se *počítací míra*. Míra μ je konečná, právě když je X konečná a μ je σ-konečná, právě když je X nejvýše spočetná.

Příklad 4.22: Nechť X je nespočetná a

$$\mathcal{A} = \{E \subset X \mid E \text{ je nejvýše spočetná nebo } E^c \text{ je nejvýše spočetná}\}.$$

Množinová funkce μ definovaná na $\mathcal{A}$ vztahem

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{pokud je } E \text{ nejvýše spočetná,} \\ 1, & \text{pokud je } E^c \text{ nejvýše spočetná,} \end{cases}$$

je míra na X (ověřte).

Příklad 4.23: Nechť X je nekonečná množina a $\mathcal{A} = 2^X$ Množinová funkce μ definovaná na $\mathcal{A}$ vztahem

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{pokud je } E \text{ konečná,} \\ \infty, & \text{pokud je } E \text{ nekonečná,} \end{cases}$$

není míra na X, neboť μ není σ-aditivní (je pouze konečně aditivní).

Základní vlastnosti měr shrneme v následujícím tvrzení.

Věta 4.24: Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Potom platí:

1. **Monotonie**: Je-li $E, F \in \mathcal{A}$ a $E \subset F$, potom $\mu(E) \leq \mu(F)$.

2. **Subaditivita**: Je-li $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$, potom

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n).$$

3. **Spojitost zdola**: Je-li $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ a $E_n \subset E_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, potom

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

4. **Spojitost shora**: Je-li $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$, $E_n \supset E_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\mu(E_1) < \infty$, potom

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^\infty E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Důkaz. 1. Je-li $E, F \in \mathcal{A}$ a $E \subset F$, potom je $F = E \cup (F \setminus E)$, kde množiny E a $F \setminus E$ jsou disjunktní. Přihlédneme-li ještě k tomu, že $F \setminus E \in \mathcal{A}$, dostaneme $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E)$.

2. Nechť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$. Položme $F_1 := E_1$ a

$$F_k := E_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \right)$$

pro $k \geq 2$. Potom jsou množiny z $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ po dvou disjunktní a $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. Navíc podle již dokázaného tvrzení 1. je $\mu(F_n) \leq \mu(E_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Odtud a ze σ-aditivity μ dostane

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

3. Nechť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ a $E_n \subset E_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Položme $E_0 := \emptyset$. Potom

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \setminus E_{n-1}) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \setminus E_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} (E_k \setminus E_{k-1}) \right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(E_n\right). \end{aligned}$$

4. Nechť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, $E_n \supset E_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\mu(E_1) < \infty$. Položme $F_n := E_1 \setminus E_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom $F_n \subset F_{n+1}$ a $\mu(E_1) = \mu(E_n) + \mu(F_n)$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Dále si všimneme, že E_1 lze rozložit na sjednocení dvou disjunktních množin

$$E_1 = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right).$$

Odtud a s využitím již dokázaného tvrzení 3. dostaneme

$$\begin{aligned} \mu(E_1) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) + \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) + \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right) \\ &= \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) + \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right). \end{aligned}$$

V posledním výrazu se nevyskytuje rozdíl nekonečen, protože je $\mu(E_n) \leq \mu(E_1) < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Navíc můžeme odečíst $\mu(E_1)$ od obou stran rovnice a dostaneme tvrzení věty. $\square$

Poznámka: Předpoklad $\mu(E_1) < \infty$ v 4. tvrzení lze nahradit předpokladem $\mu(E_n) < \infty$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, ale nelze ho zcela vypustit. Např., je-li μ počítací míra na $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ a $E_n = \{n, n+1, \dots\}$, potom $\cap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$, ale $\mu(E_n) = \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Definice 4.25 (Množina nulové míry): Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Řekneme, že $E \in \mathcal{A}$ je *množina nulové míry* nebo také *μ-nulová množina*, právě když $\mu(E) = 0$.

Následující tvrzení, které okamžitě vyplývá ze subaditivity míry, budeme často používat.

Věta 4.26: Spočetné sjednocení množin nulové míry je množina nulové míry.

Definice 4.27 (Terminologie „skoro všude"): Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $A \subset X$. Platí-li nějaké tvrzení o bodech x množiny A až na množinu bodů z množiny nulové míry, říkáme, že toto tvrzení platí *skoro všude* v A (zkracujeme *s.v.*) nebo pro *skoro všechna* $x \in A$. Chceme-li zdůraznit závislost na míře μ, říkáme μ*-skoro všude* v A nebo pro μ*-skoro všechna* $x \in A$.

Příklad 4.28: Na měřitelném prostoru $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ definujme míru μ tak, že $\mu(E)$ udává počet sudých čísel v množině $E \subset \mathbb{N}$. Potom jsou pravdivé výroky „Skoro všechna přirozená čísla jsou sudá." nebo „Pro μ-skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí, že n je sudé.", neboť $\mu(2\mathbb{N} - 1) = 0$ dle definice μ.

Je-li $\mu(E) = 0$ a $F \subset E$, potom z monotonie míry plyne, že $\mu(F) = 0$, ale jedině za předpokladu, že $F \in \mathcal{A}$. Množina F by totiž nemusela být měřitelná, a potom by výraz $\mu(F)$ neměl dobrý smysl. Míry, jejichž definiční obor obsahuje všechny podmnožiny nulových množin, se nazývají *úplné*.

Definice 4.29 (Úplná míra): Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Míra μ se nazývá *úplná*, právě když

$$(\forall F \in \mathcal{A}, \mu(F) = 0)(E \subset F \;\Rightarrow\; E \in \mathcal{A}).$$

Práce s neúplnými mírami může působit nepříjemné potíže. Naštěstí definiční obor každé míry lze rozšířit a dodefinovat míru tak, že dostaneme míru úplnou. Konstrukci zúplnění míry ukazuje následující věta.

Věta 4.30 (O zúplnění míry): Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Označme $\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{A} \mid \mu(N) = 0\}$ a definujme

$$\overline{\mathcal{A}} := \{E \cup F \mid E \in \mathcal{A} \text{ a } F \subset N \text{ pro nějaké } N \in \mathcal{N}\}$$

a množinovou funkci $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ vztahem

$$\overline{\mu}(E \cup F) := \mu(E), \qquad \text{kde } E \in \mathcal{A} \text{ a } F \subset N \text{ pro nějaké } N \in \mathcal{N}.$$

Potom je $\overline{\mathcal{A}}$ σ-algebra a $\overline{\mu}$ dobře definovaná úplná míra na X. Navíc $\overline{\mu}$ je jediná míra na $(X, \overline{\mathcal{A}})$ taková, že $\overline{\mu} \restriction \mathcal{A} = \mu$.

Důkaz. Nejprve ověříme, že $\overline{\mathcal{A}}$ je σ-algebra. Jelikož jsou oba systémy $\mathcal{A}$ i $\mathcal{N}$ uzavřené na spočetná sjednocení, viz Věta 4.26, je také $\overline{\mathcal{A}}$ uzavřená na spočetná sjednocení.

Ukážeme uzavřenost $\overline{\mathcal{A}}$ na doplňky. Nechť $E \cup F \in \overline{\mathcal{A}}$, kde $E \in \mathcal{A}$ a $F \subset N \in \mathcal{N}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $E \cap N = \emptyset$, jinak bychom nahradili F a N množinami $F \setminus E$ a $N \setminus E$. Nyní díky tomu, že $E \cap N = \emptyset$, platí $E \cup F = (E \cup N) \cap (N^c \cup F)$. Potom máme

$$(E \cup F)^c = (E \cup N)^c \cup (N^c \cup F)^c = (E \cup N)^c \cup (N \setminus F).$$

Protože $(E \cup N)^c \in \mathcal{A}$ a $N \setminus F \subset N \in \mathcal{N}$, plyne odtud, že $(E \cup F)^c \in \overline{\mathcal{A}}$.

Dále ověříme, že $\overline{\mu}$ je dobře definovaná na $\overline{\mathcal{A}}$ předpisem $\overline{\mu}(E \cup F) := \mu(E)$, kde $E \in \mathcal{A}$ a $F \subset N \in \mathcal{N}$, tedy že hodnota $\overline{\mu}(E \cup F)$ nezávisí na rozkladu množiny $E \cup F$. Předpokládejme, že $E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$, kde $E_i \in \mathcal{A}$ a $F_i \subset N_i \in \mathcal{N}$ pro $i \in \{1, 2\}$. Protože $E_1 \subset E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2 \subset E_2 \cup N_2$, máme

$$\mu(E_1) \leq \mu(E_2 \cup N_2) \leq \mu(E_2) + \mu(N_2) = \mu(E_2).$$

Analogicky odvodíme i opačnou nerovnost $\mu(E_2) \leq \mu(E_1)$, a tedy $\overline{\mu}(E_1 \cup F_1) = \mu(E_1) = \mu(E_2) = \overline{\mu}(E_2 \cup F_2)$.

Zřejmě $\overline{\mu}(\emptyset) = \overline{\mu}(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Pro ověření σ-aditivity $\overline{\mu}$ uvažujme posloupnost $\{E_n \cup F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{\mathcal{A}}$ po dvou disjunktních množin, kde $E_n \in \mathcal{A}$ a $F_n \subset N_n \in \mathcal{N}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \cup F_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right),$$

kde $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$ a $\cup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{N}$ podle Věty 4.26, dostaneme

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cup F_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_n \cup F_n).$$

Dále ověříme úplnost míry $\overline{\mu}$. Nechť $E \cup F \in \overline{\mathcal{A}}$, kde $E \in \mathcal{A}$ a $F \subset N \in \mathcal{N}$, a $\overline{\mu}(E \cup F) = 0$. Odtud plyne, že $\mu(E) = 0$, neboli $E \in \mathcal{N}$, a proto také $E \cup N \in \mathcal{N}$. Potom pro lib. podmnožinu $A \subset E \cup F$, platí, že $A = \emptyset \cup A$, kde $A \subset E \cup N \in \mathcal{N}$, a tedy $A \in \overline{\mathcal{A}}$.

Nakonec zbývá dokázat tvrzení o jednoznačnosti. Předpokládejme, že ν je míra na $(X, \overline{\mathcal{A}})$ taková, že $(\forall E \in \mathcal{A})(\nu(E) = \mu(E))$. Ukážeme, že $\nu = \overline{\mu}$. Nechť $E \cup F \in \overline{\mathcal{A}}$, kde $E \in \mathcal{A}$ a $F \subset N \in \mathcal{N}$. Potom $0 = \mu(N) = \nu(N)$ a platí

$$\nu(E) \leq \nu(E \cup F) \leq \nu(E \cup N) \leq \nu(E) + \nu(N) = \nu(E),$$

neboli $\nu(E) = \nu(E \cup F)$, a proto

$$\nu(E \cup F) = \nu(E) = \mu(E) = \overline{\mu}(E \cup F).$$

Protože byla $E \cup F \in \overline{\mathcal{A}}$ volena libovolně, dokázali jsme, že $\nu = \overline{\mu}$. □

Definice 4.31 (Zúplnění)**:** Míru $\overline{\mu}$ z Věty 4.30 nazýváme *zúplnění míry* μ a σ-algebru $\overline{\mathcal{A}}$ *zúplněním σ-algebry $\mathcal{A}$.*

4.4 Vnější míra

Cílem této části je vysvětlení tzv. *Carathéodoryho konstrukce*, což je metoda konstrukce míry z tzv. *vnější míry.*

Definice 4.32 (Vnější míra)**:** Množinovou funkci $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ splňující:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$,
2. je-li $A \subset B \subset X$, potom $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,

3. je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$, potom

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n),$$

nazýváme *vnější míra* na X.

Půjdeme ještě o krok zpět a před samotnou Carathéodoryho větou si ukážeme jeden obvyklý způsob zavedení vnější míry. Na začátku procesu je dán nějaký „systém základních množin“ $\mathcal{E} \subset 2^X$ (např. obdélníky v $\mathbb{R}^2$), které umíme „změřit“ danou množinovou funkcí definovanou na $\mathcal{E}$ (např. obsah obdélníku). Potom libovolnou množinu $A \subset X$ aproximujeme „z vnějšku“ pokrytím **spočetně mnoha** množinami z $\mathcal{E}$ (pokryjeme A obdélníky) a definujeme vnější míru jako infimum takových aproximací (spočítáme cosi jako „vnější obsah“ množiny A). Přesnou formulaci a důkaz, že takto dostaneme skutečně vnější míru na X, ukazuje následující věta.

Věta 4.33: Nechť $\mathcal{E} \subset 2^X$ a $\rho : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ jsou takové, že $\emptyset, X \in \mathcal{E}$ a $\rho(\emptyset) = 0$. Potom množinová funkce μ^* definovaná pro každé $A \subset X$ vztahem

$$\mu^*(A) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n) \;\middle|\; \{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{E} \text{ a } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right\} \tag{36}$$

je vnější míra na X.

Poznámka: Definice (36) je v pořádku, neboť množina v infimu je vždy neprázdná, stačí položit $E_n := X$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz Věty 4.33. Zřejmě $\mu^*(\emptyset) = 0$, stačí v (36) položit $E_n := \emptyset$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Také je snadno vidět, že pokud $A \subset B$, potom $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, neboť každé spočetné pokrytí množiny B množinami z $\mathcal{E}$ pokrývá také A.

Stačí tedy ověřit spočetnou subaditivitu μ^*. Nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Zvolme $\epsilon > 0$ libovolné ale pevné. Z definice infima plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $\{E_j^{(n)}\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ tak, že

$$A_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^{(n)} \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \rho\left(E_j^{(n)}\right) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Potom ovšem

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n,j=1}^{\infty} E_j^{(n)}$$

a

$$\sum_{n,j=1}^{\infty} \rho\left(E_j^{(n)}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \epsilon,$$

z čehož plyne

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \epsilon.$$

Jelikož bylo $\epsilon > 0$ voleno libovolně, dostáváme tak kýženou nerovnost

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

□

Vraťme se nyní k původnímu záměru konstrukce míry z dané vnější míry μ^*. Fundamentálním krokem konstrukce je vhodné zúžení vnější míry μ^* na tzv. *μ^*-měřitelné množiny.*

Definice 4.34 (μ^*-měřitelná množina)**:** Nechť μ^* je vnější míra na X. Množina $A \subset X$ se nazývá *μ^*-měřitelná*, právě když

$$(\forall E \subset X) \left(\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \right).$$

Poznámka: Nerovnost $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ je splněna automaticky díky spočetné subaditivitě vnější míry μ^*. Navíc pokud $\mu^*(E) = \infty$, platí druhá nerovnost $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ triviálně. Neboli k tomu, aby množina A byla μ^*-měřitelná je nutné a stačí, aby platilo:

$$(\forall E \subset X, \mu^*(E) < \infty) \left(\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \right).$$

Carathéodoryho vymezení μ^*-měřitelných množin, které staví na historicky starší (nepatrně odlišné) Lebesgueově charakterizaci měřitelných množin, je v teorii míry zcela zásadní. Abychom tuto volbu aspoň z části motivovali, předpokládejme na chvíli, že E je množina základního systému, o kterém jsme mluvili v úvodu k této části a navíc $A \subset E$ (např. obdélník obsahující A). Potom rovnost $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ platí, právě když $\mu^*(A) = \mu^*(E) - \mu^*(E \cap A^c)$. Rozdíl $\mu^*(E) - \mu^*(E \cap A^c)$ bychom mohli interpretovat jako *vnitřní míru* množiny A. Z tohoto pohledu μ^*-měřitelnost A vyjadřuje „rozumné chování“ množiny A, totiž shodu mezi vnitřní a vnější mírou A. Důvod, proč od nadmnožiny základního systému přecházíme k libovolné množině $E \subset X$, je, že zúžením vnější míry μ^* na systém μ^*-měřitelných množin, získáme úplnou míru, jak dokážeme v následující větě.

Věta 4.35 (Carathéodory)**:** Buď μ^* vnější míra na X a $\mathcal{M}^* := \{A \subset X \mid A \text{ je } \mu^*\text{-měřitelná}\}$. Potom $\mathcal{M}^*$ je σ-algebra na X a $\mu := \mu^* \restriction \mathcal{M}^*$ úplná míra na X.

Důkaz. 1) Abychom ověřili, že $\mathcal{M}^*$ je σ-algebra, ukážeme nejdříve, že $\mathcal{M}^*$ je algebra, a poté že je uzavřená na spočetná sjednocení po dvou disjunktních množin. Systém $\mathcal{M}^*$ je neprázdný, neboť $\emptyset \in \mathcal{M}^*$. Dále z definice μ^*-měřitelnosti je jasné, že A je μ^*-měřitelná, právě když A^c je μ^*-měřitelná, a proto je $\mathcal{M}^*$ uzavřený na doplňky.

Ukážeme uzavřenost $\mathcal{M}^*$ na konečná sjednocení. Nechť $A, B \in \mathcal{M}^*$ a $E \subset X$. Potom

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c). \end{aligned}$$

Protože $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$, vyplývá ze subadivity μ^*, že

$$\mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B))$$

a odtud dále

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c)\\ &= \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c).\end{aligned}$$

To znamená, že $A \cup B \in \mathcal{M}^*$ a $\mathcal{M}^*$ je tudíž algebra. Navíc je-li $A \cap B = \emptyset$, máme

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

neboli μ^* je aditivní na algebře $\mathcal{M}^*$.

2) Dále ověříme, že $\mathcal{M}^*$ je uzavřený na spočetná sjednocení posloupnosti po dvou disjunktních množin. Nechť tedy je $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}^*$ posloupnost po dvou disjunktních množin. Označme si

$$B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad \text{a} \quad B := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Potom pro lib. $E \subset X$ a $n \geq 2$ platí

$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}),$$

z čehož indukcí vyplývá, že

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap A_k)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože je $B_n \in \mathcal{M}^*$, dostáváme z poslední rovnice a také z monotonie vnější míry μ^*, že

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap B^c)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pošleme-li $n \to \infty$, vyvodíme odtud a ze spočetné subadivity μ^*, že

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E \cap A_k\right) + \mu^*(E \cap B^c)\\ &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E).\end{aligned}$$

Z toho plyne, že $B \in \mathcal{M}^*$, a tedy $\mathcal{M}^*$ je σ-algebra. Navíc protože všechny nerovnosti v posledním výpočtu platí jako rovnosti, dostáváme speciálně, že

$$\mu^*(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap B^c)$$

pro každé $E \subset X$. Položíme-li $E = B$, vyvodíme rovnost

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu^*(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_k) + \mu^*(B \cap B^c) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

To znamená, že μ^* je σ-aditivní na $\mathcal{M}^*$, a proto je $\mu := \mu^* \restriction \mathcal{M}^*$ míra.

3) K dokončení důkazu zbývá ověřit úplnost míry μ. Předpokládejme, že $A \in \mathcal{M}^*$ taková, že $\mu(A) = 0$. Buď $B \subset A$ Potom je $\mu^*(B) \leq \mu^*(A) = \mu(A) = 0$, tedy $\mu^*(B) = 0$. Dále pro lib. $E \subset X$ vyplývá z vlastností vnější míry μ^*, že

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \leq \mu^*(B) + \mu^*(E \cap B^c) = \mu^*(E \cap B^c) \leq \mu^*(E),$$

z čehož plyne, že $B \in \mathcal{M}^*$. □

První aplikací Carathéodoryho věty bude konstrukce míry z tzv. *pramíry* (premeasure), což je „míra na algebře“. Tuto konstrukci využijeme hned v následující části k definici Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}$.

Definice 4.36 (Pramíra, konečná a σ-konečná pramíra)**:** Nechť $\mathcal{A} \subset 2^X$ je algebra na X. Množinovou funkci $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ splňující

1. $\mu_0(\emptyset) = 0$,
2. je-li $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ posloupnost po dvou disjunktních množin taková, že $\cup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$, potom
$$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu_0(A_n),$$

nazýváme *pramíra* na X. Pojmy *konečná* resp. *σ-konečná* pramíra se definují stejně jako pro míry.

Poznámka: Všimněte si, že pramíra je konečně aditivní, tzn., že pro po dvou disjunktní množiny $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ platí
$$\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu_0(A_j),$$
neboť stačí položit $A_j := \emptyset$ pro $j > n$ a aplikovat vlastnosti 1. a 2. Odtud také plyne, že pro $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ platí $\mu_0(A) \leq \mu_0(B)$, protože $\mu_0(B) = \mu_0(A) + \mu_0(B \setminus A) \geq \mu_0(A)$. Uvědomte si, že $B \setminus A = B \cap A^c \in \mathcal{A}$, jak plyne z vlastností algebry $\mathcal{A}$.

Pramíra μ_0 na algebře $\mathcal{A}$ jistě vyhovuje předpokladům Věty 4.33 (kde $\mathcal{E} = \mathcal{A}$ a $\rho = \mu_0$), a proto je vztahem

$$\mu^*(E) := \inf\left\{\sum_{n=1}^\infty \mu_0(A_n) \,\middle|\, \{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A} \text{ a } E \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n\right\} \tag{37}$$

definována vnější míra na X. Tato vnější míra má navíc následující vlastnosti.

Lemma 4.37: Nechť $\mathcal{A} \subset 2^X$ je algebra, μ_0 pramíra na $\mathcal{A}$ a μ^* vnější míra definovaná vztahem (37). Potom platí:

1. $\mu^* \restriction \mathcal{A} = \mu_0$,

2. $(\forall A \in \mathcal{A})(A \text{ je } \mu^*\text{-měřitelná})$.

Důkaz. 1. Buď $E \in \mathcal{A}$ a $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ taková, že $E \subset \cup_{n=1}^\infty A_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$B_n := E \cap \left(A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right).$$

Potom jsou $B_n \in \mathcal{A}$ z vlastností algebry $\mathcal{A}$ a navíc $B_n \cap B_m = \emptyset$ pro $m \neq n$. Dále je

$$\bigcup_{n=1}^\infty B_n = E \cap \bigcup_{n=1}^\infty A_n = E \in \mathcal{A}.$$

Proto plyne z 2. vlasnosti pramíry, že $\mu_0(E) = \sum_{n=1}^\infty \mu_0(B_n)$. Využijeme-li ještě toho, že $\mu_0(B_n) \leq \mu_0(A_n)$, neboť $B_n \subset A_n$, získáme nerovnost

$$\mu_0(E) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu_0(A_n),$$

ze které plyne $\mu_0(E) \leq \mu^*(E)$.

Opačná nerovnost $\mu^*(E) \leq \mu_0(E)$ platí triviálně, neboť v definici (37) stačí vzít $A_1 := E$ a $A_n := \emptyset$ pro $n \geq 2$. Celkem jsme tedy ukázali, že $(\forall E \in \mathcal{A})(\mu^*(E) = \mu_0(E))$, což je 1. tvrzení.

2. Buďte $A \in \mathcal{A}$ a $E \subset X$. Z vlastností infima vyplývá, že pro libovolné $\epsilon > 0$ existuje posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ taková, že $E \subset \cup_{n=1}^\infty A_n$ a

$$\sum_{n=1}^\infty \mu_0(A_n) \leq \mu^*(E) + \epsilon.$$

Potom z aditivity μ_0 na $\mathcal{A}$ dostaneme

$$\mu^*(E) + \epsilon \geq \sum_{n=1}^\infty \mu_0(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^\infty \mu_0(A_n \cap A^c) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Jelikož je $\epsilon > 0$ libovolné, vyplývá odtud, že $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, neboli A je μ^*-měřitelná. □

Následující věta ukazuje, jak pramíra určuje míru a shrnuje její vlastnosti. Její důkaz využívající Carathéodoryho Věty 4.35 nalezli nezávisle na sobě matematici H. Hahn a A. Kolmogorov, avšak původní objev této věty je připisován M. R. Fréchetovi.

Věta 4.38: Nechť $\mathcal{A} \subset X$ je algebra, μ_0 pramíra na $\mathcal{A}$ a μ^* vnější míra definovaná vztahem (37). Potom platí:

1. Množinová funkce $\mu := \mu^* \restriction \mathcal{M}$, kde $\mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ je σ-algebra generovaná $\mathcal{A}$, je míra na X taková, že $\mu \restriction \mathcal{A} = \mu_0$.

2. Je-li ν další míra na $\mathcal{M}$ taková, že $\nu \restriction \mathcal{A} = \mu_0$, potom $(\forall E \in \mathcal{M})(\nu(E) \leq \mu(E))$. Pokud je navíc $\mu(E) < \infty$, platí dokonce rovnost $\nu(E) = \mu(E)$.

3. Je-li μ_0 σ-konečná pramíra, potom je μ jediná míra na $\mathcal{M}$ taková, že $\mu \restriction \mathcal{A} = \mu_0$.

Důkaz. 1. Označme $\mathcal{M}^*$ σ-algebru μ^*-měřitelných množin, viz Věta 4.35. Podle Lemma 4.37 je $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}^*$, a proto je podle Lemma 4.7 také $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*$. Carathéodoryho Věta 4.35 říká, že $\bar{\mu} := \mu^* \restriction \mathcal{M}^*$ je míra na $(X, \mathcal{M}^*)$, a proto také $\mu := \mu^* \restriction \mathcal{M} = \bar{\mu} \restriction \mathcal{M}$, jakožto míra zúžená na σ-algebru $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*$, musí být μ míra na $(X, \mathcal{M})$. Nakonec aplikujeme-li 1. tvrzení Lemma 4.37, dostaneme pro lib. $A \in \mathcal{A}$ rovnost $\mu_0(A) = \mu^*(A) = \mu(A)$, což implikuje, že $\mu \restriction \mathcal{A} = \mu_0$.

2. Nechť ν je míra na $(X, \mathcal{M})$ taková, že $\nu \restriction \mathcal{A} = \mu_0$. Buď $E \in \mathcal{M}$ a $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ taková, že $E \subset \cup_{n=1}^\infty A_n$. Potom z monotonie a subaditivity míry ν plyne

$$\nu(E) \leq \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu_0(A_n).$$

Přechodem k infimu přes množiny $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ takové, že $E \subset \cup_{n=1}^\infty A_n$ odtud vyvodíme

$$\nu(E) \leq \mu^*(E) = \mu(E). \tag{38}$$

Položíme-li $A = \cup_{n=1}^\infty A_n$ pro $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$, vyplývá ze spojitosti měr ν a μ zdola, že

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \mu(A). \tag{39}$$

Pokud je $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) < \infty$, lze z definice infima najít k libovolnému $\epsilon > 0$ posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ takovou, že $E \subset A = \cup_{n=1}^\infty A_n$

$$\mu(E) + \epsilon \geq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \geq \mu(A),$$

neboli $\mu(A \setminus E) = \mu(A) - \mu(E) \leq \epsilon$. Uvědomte si, že v poslední rovnosti využíváme předpoklad $\mu(E) < \infty$. Potom z již dokázané nerovnosti (38) a rovnosti (39) vyplývá, že

$$\mu(E) \leq \mu(A) = \nu(A) = \nu(E) + \nu(A \setminus E) \leq \nu(E) + \mu(A \setminus E) \leq \nu(E) + \epsilon.$$

Jelikož bylo $\epsilon > 0$ voleno libovolně, dostáváme $\mu(E) \leq \nu(E)$. Tudíž $\mu(E) = \nu(E)$ pro $E \in \mathcal{M}$ splňující $\mu(E) < \infty$.

3. Předpokládejme opět, že ν je míra na $(X, \mathcal{M})$ taková, že $\nu \restriction \mathcal{A} = \mu_0$ a že μ_0 je σ-konečná pramíra. Potom existuje $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ tak, že

$$X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n \quad \text{a} \quad (\forall n \in \mathbb{N})(\mu_0(A_n) = \mu(A_n) = \nu(A_n) < \infty).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že množiny z $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou po dvou disjunktní, jinak bychom vzali $\tilde{A}_n := A_n \setminus \cup_{j=1}^{n-1} A_j$. Potom pro $E \in \mathcal{M}$ dostaneme s využitím již dokázaného bodu 2. a σ-aditivity měr rovnost

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E \cap A_n) = \nu(E).$$

A tedy $\mu = \nu$. □

Čtenář si mohl v důkazu Věty 4.38 všimnout, že daná pramíra μ_0 na algebře $\mathcal{A}$ určuje dvě míry: $\mu = \mu^* \upharpoonright \mathcal{M}$ a $\bar{\mu} = \mu^* \upharpoonright \mathcal{M}^*$. Značení $\overline{\mu}$ jsme také použili pro zúplnění míry μ. Je-li μ_0 σ-konečná pramíra, je skutečně $\overline{\mu}$ zúplněním míry μ.

Věta 4.39: Nechť $\mathcal{A} \subset X$ je algebra, μ_0 σ-konečná pramíra na $\mathcal{A}$ a μ^* vnější míra definovaná vztahem (37). Potom je míra $\bar{\mu} := \mu^* \upharpoonright \mathcal{M}^*$ zúplnění míry $\mu := \mu^* \upharpoonright \mathcal{M}$.

Důkaz. Podle Věty 4.30 stačí dokázat, že $\mathcal{M}^* = \overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F \mid E \in \mathcal{M}, F \subset N \in \mathcal{N}\}$. K tomu použijeme následující pomocné tvrzení, jehož důkaz je přenechán čtenáři jako Cvičení 4.3. Označme $\mathcal{A}_\sigma$ systém spočetných sjednocení množin z $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ systém spočetných průniků množin z $\mathcal{A}_\sigma$.

Lemma 4.40: Je-li μ_0 σ-konečná pramíra na algebře $\mathcal{A}$, potom

$$E \in \mathcal{M}^* \quad \Leftrightarrow \quad (\exists B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}, E \subset B)(\mu^*(B \setminus E) = 0).$$

Dokážeme inkluzi $\mathcal{M}^* \subset \overline{\mathcal{M}}$. Nechť $G \in \mathcal{M}^*$. Potom $G^c \in \mathcal{M}^*$ a podle Lemma 4.40 existuje $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, $G^c \subset B$ a $\mu^*(B \setminus G^c) = \mu(B \cap G) = 0$. Jelikož je $\mathcal{M}$ σ-algebra obsahující $\mathcal{A}$, také $\mathcal{A}_{\sigma\delta} \subset \mathcal{M}$. Označme $E := B^c \in \mathcal{M}$ a $F := G \cap B$. Potom je $G = E \cup F$ a G tedy bude v $\overline{\mathcal{M}}$, najdeme-li μ-nulovou nadmnožinu $N \supset F$.

Aplikujme Lemma 4.40 ještě jednou tentokrát na množinu G. Potom existuje $C \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, $G \subset C$ a $\mu^*(C \setminus G) = 0$. Položíme-li $N := B \cap C$, bude

$$F = G \cap B \subset C \cap B = N,$$

a protože $G \in \mathcal{M}^*$, platí také

$$\mu(N) = \mu^*(B \cap C) = \mu^*(B \cap C \cap G) + \mu^*(B \cap C \cap G^c) = \mu^*(B \cap G) + \mu^*(C \setminus G) = 0.$$

Dokážeme opačnou inkluzi $\overline{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}^*$. Nechť $G \in \overline{\mathcal{M}}$. Potom $G = E \cup F$ pro nějaká $E \in \mathcal{M}$ a $F \subset N \subset \mathcal{N}$. Jelikož $E \cup N \in \mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*$, existuje podle Lemma 4.40 množina $D \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tak, že $E \cup N \subset D$ a $\mu^*(D \setminus (E \cap N)) = 0$. Dále z μ^*-měřitelnosti množiny $E \cup N$ vyvodíme, že

$$\begin{aligned}\mu^*(D \setminus G) &= \mu^*((D \setminus G) \cap (E \cup N)) + \mu^*((D \setminus G) \cap (E \cup N)^c)\\ &= \mu^*(N \setminus F) + \mu^*(D \setminus (E \cup N)) \leq \mu(N) + \mu^*(D \setminus (E \cup N)) = 0.\end{aligned}$$

Našli jsme tedy $D \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, $G \subset D$, pro kterou je $\mu^*(D \setminus G) = 0$, což znamená, že $G \in \mathcal{M}^*$ opět podle Lemma 4.40.

□

4.5 Borelovské míry na reálné přímce

Nyní máme vše připravené k tomu, abychom mohli zavést míru na bohatém systému podmnožin $\mathbb{R}$, která intervalům přiřazuje jejich délku. Ve skutečnosti můžeme zkonstruovat bez výraznějších komplikací daleko obecnější třídu tzv. *borelovských měr* na $\mathbb{R}$.

Definice 4.41 (Borelovská míra)**:** Nechť (X, τ) je topologický prostor. Míra μ definovaná na σ-algebře borelovských množin $\mathcal{B}_X$ se nazývá *borelovská míra* na X.

Abychom motivovali následující postup, uvažujme borelovskou míru μ na $\mathbb{R}$ a její tzv. *distribuční funkci* $F(x) := \mu((-\infty, x])$. Hodnoty takto definované funkce F nemusí být konečné. Nyní pro jednoduchost předpokládejme, že μ je taková, aby hodnoty F byly v $\mathbb{R}$. Potom F je **neklesající a zprava spojitá** funkce. První vlastnost plyne z monotonie míry μ, viz 1. tvrzení Věty 4.24, neboť pro $x \leq y$ je $(-\infty, x] \subset (-\infty, y]$, a proto $F(x) \leq F(y)$. Druhá vlastnost vyplývá ze spojitosti μ zespodu a Heineho věty, neboť pro lib. $x \in \mathbb{R}$ a nerostoucí posloupnost $\{x_n\}_{n=1} \subset \mathbb{R}$ takovou, že $x_n \to x \in \mathbb{R}$ platí

$$(-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n],$$

a proto $F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n)$. Navíc pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, máme vztah

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a), \tag{40}$$

protože $(-\infty, b] = (-\infty, a] \cup (a, b]$ a intervaly vpravo jsou disjunktní.

Myšlenka následující konstrukce staví na opačném postupu, kdy k zadané neklesající a zprava spojité funkci F definujeme μ na polouzavřených intervalech $(a, b]$ podle vzorce (40), a poté rozšíříme μ na borelovskou míru aplikací obecné teorie. Je-li speciálně $F(x) = x$, bude míra intervalu $(a, b]$ rovna jeho délce $b - a$.

Základní stavební kameny jsou pro nás tedy polouzavřené intervaly $(a, b]$. Bohužel ani systém konečných sjednocení intervalů typu $(a, b]$ ještě není algebra, což představuje jistou technickou komplikaci pro aplikaci obecné konstrukce vycházející z pramíry na algebře. Musíme proto ještě do systému polouzavřených intervalů dodat jejich (polo)nekonečné varianty. Definujeme si tak (elementární) systém

$$\mathcal{E} := \{\emptyset\} \cup \{(a, b] \mid -\infty \leq a < b < \infty\} \cup \{(a, \infty) \mid -\infty \leq a < \infty\}.$$

Množiny systému $\mathcal{E}$ budeme stručně nazývat *p-intervaly* („polouzavřené/polootevřené“ intervaly).

Věta 4.42: Nechť $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesající zprava spojitá funkce, $\mathcal{E}$ systém p-intervalů a $\mathcal{A}$ systém konečných sjednocení po dvou disjunktních množin z $\mathcal{E}$. Definujme $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ následujícím způsobem:

0.
$$\mu_0(\emptyset) := 0.$$

1.

$$\mu_0((a,b]) := F(b) - F(a), \qquad -\infty \le a < b < \infty,$$
$$\mu_0((a,\infty)) := F(\infty) - F(a), \qquad -\infty \le a < \infty,$$

kde používáme značení $F(\pm\infty) := \lim_{x\to\pm\infty} F(x)$.

2. Nakonec pro $n \in \mathbb{N}$ a po dvou disjunktní p-intervaly $I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{E}$ položíme

$$\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) := \sum_{j=1}^{n} \mu_0(I_j).$$

Potom $\mathcal{A}$ je algebra a μ_0 je pramíra na $\mathcal{A}$.

Poznámka: V definici μ_0 se vyskytují limity $F(\pm\infty) := \lim_{x\to\pm\infty} F(x)$, jejichž existence je zaručena monotonií F. Může se stát, že $F(-\infty) = -\infty$ nebo $F(-\infty) = +\infty$, a proto je třeba rozšířit aritmetiku počítání s $\pm\infty$. Aritmetiku s $\pm\infty$ rozšiřujeme přirozeně v případech, kdy mají výrazy dobrý smysl, např. $-1 \cdot \infty = -\infty$, $\infty - (-\infty) = \infty$, $\infty - x = \infty$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, atp. Rozmyslete si, že výrazy $\infty - \infty$, nebo $-\infty + \infty$, které nemají dobrý smysl, se v definici μ_0 nevyskytují!

Důkaz Věty 4.42. Je jednoduché ověřit, že $\mathcal{E}$ je elementární systém podle Definice 4.15. Potom podle Lemma 4.16 je systém $\mathcal{A}$ konečných sjednocení po dvou disjunktních množin z $\mathcal{E}$ algebra. Zbývá dokázat, že μ_0 je pramíra na $\mathcal{A}$. Důkladné ověření tohoto tvrzení je místy trochu těžkopádné a vyžaduje rozsáhlejší diskuzi. Proto některé části, kde se opakuje podobný postup, pouze naznačíme.

Nejdřív je třeba ověřit, že μ_0 je vztahy z tvrzení dobře definovaná na $\mathcal{A}$. Množinu z $\mathcal{A}$ lze totiž rozložit na sjednocení disjunktních množin z $\mathcal{E}$ více různými způsoby. Je-li $(a,b] = \cup_{j=1}^{n}(a_j,b_j]$, kde $(a_1,b_1], \ldots, (a_n,b_n]$ jsou po dvou disjunktní, potom po případném přečíslování intervalů $(a_1,b_1], \ldots, (a_n,b_n]$ je $-\infty \le a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \cdots < b_n = b$. Odtud dostaneme

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^{n} F(b_j) - F(a_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu_0((a_j,b_j]).$$

Podobný závěr dostaneme, rozložíme-li interval typu (a,∞) na konečné sjednocení po dvou disjunktních p-intervalů.

Těmito úvahami zjistíme, že pro p-interval J a po dvou disjunktní p-intervaly $I_1, \ldots, I_n$ takové, že $J \subset \cup_{j=1}^{n} I_j$ platí

$$\mu_0(J) = \sum_{j=1}^{n} \mu_0(J \cap I_j).$$

Nakonec jsou-li $I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{E}$ a $J_1, \ldots, J_m \in \mathcal{E}$ po dvou disjunktní takové, že $\cup_{j=1}^{n} I_j = \cup_{k=1}^{m} J_k$, potom

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_0(I_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \mu_0(I_j \cap J_k) = \sum_{k=1}^{m} \mu_0(J_k),$$

neboli

$$\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) = \mu_0\left(\bigcup_{k=1}^{m} J_k\right).$$

Tudíž μ_0 je dobře definovaná na $\mathcal{A}$ a taktéž je z definice jasné, že μ_0 je konečně aditivní na $\mathcal{A}$.

K tomu, abychom dokázali, že μ_0 je pramíra, zbývá ověřit, že je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}$ taková, že $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, potom $\mu_0(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$. Tento problém si nejprve mírně zjednodušíme. Za prvé protože je každá z množin A_n sjednocením konečně mnoha po dvou disjunktních p-intervalů a μ_0 je konečně aditivní, stačí uvažovat posloupnost $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ neprázdných p-intervalů z $\mathcal{E}$ takových, že $\cup_{n=1}^{\infty} I_n \in \mathcal{A}$ a ověřit rovnost

$$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{n} I_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(I_n). \tag{41}$$

Navíc místo $\cup_{n=1}^{\infty} I_n \in \mathcal{A}$ stačí předpokládat, že $\cup_{n=1}^{\infty} I_n \in \mathcal{E}$, neboť je-li $\cup_{n=1}^{\infty} I_n$ sjednocením N po dvou disjunktních p-intervalů $J_1, \ldots J_N$, můžeme rozložit $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ na N podposloupností p-intervalů, jejichž sjednocením dostaneme jednotlivé množiny $J_1, \ldots J_N$. Potom již stačí využít konečné aditivity μ_0. Rovnost (41) dokážeme jako dvě nerovnosti.

1) Nerovnost $(\geq)$: Označme $I := \cup_{n=1}^{\infty} I_n$. Jelikož je $I \in \mathcal{A}$ a $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$, jsou také množiny $\cup_{j=1}^{n} I_j$ a $I \setminus \cup_{j=1}^{n} I_j$ z $\mathcal{A}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, protože $\mathcal{A}$ je algebra. Z konečné aditivity μ_0 na $\mathcal{A}$ vyplývá, že

$$\mu_0(I) = \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) + \mu_0\left(I \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) \geq \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu_0(I_j)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pošleme-li $n \to \infty$, dostáváme nerovnost

$$\mu_0(I) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j).$$

2) Nerovnost $(\leq)$: Předpokládejme nejdřív, že $I = (a, b]$ a je omezený, tj. $a, b \in \mathbb{R}$. Potom jsou $I_j = (a_j, b_j]$ pro nějaká $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$. Zvolme $\epsilon > 0$. Protože je F zprava spojitá,

$$(\exists \delta > 0)\,(F(a+\delta) - F(a) < \epsilon) \tag{42}$$

a také

$$(\forall j \in \mathbb{N})(\exists \delta_j > 0)\left(F(b_j + \delta_j) - F(b_j) < \frac{\epsilon}{2^j}\right). \tag{43}$$

Jelikož

$$[a+\delta, b] \subset (a, b] = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j + \delta_j),$$

je $\{(a_j, b_j + \delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ otevřené pokrytí kompaktního intervalu $[a + \delta, b]$, a tudíž musí obsahovat konečné podpokrytí. Vynecháním intervalů, které jsou obsaženy v jiných, a případným přečíslováním intervalů konečného pokrytí najdeme $m \in \mathbb{N}$ a intervaly $(a_1, b_1+\delta_1), \dots, (a_m, b_m+\delta_m)$ pokrývající $[a + \delta, b]$ takové, že

$$b_j + \delta_j \in (a_{j+1}, b_{j+1} + \delta_{j+1}).$$

pro každé $j \in \{1, \dots, m-1\}$.

Potom s využitím monotonie F a nerovností (42) a (43) dostaneme

$$\begin{aligned}
\mu_0(I) &= F(b) - F(a) < F(b) - F(a+\delta) + \epsilon \le F(b_m + \delta_m) - F(a_1) + \epsilon \\
&= F(b_m + \delta_m) - F(a_m) + \sum_{j=1}^{m-1} (F(a_{j+1}) - F(a_j)) + \epsilon \\
&\le F(b_m + \delta_m) - F(a_m) + \sum_{j=1}^{m-1} (F(b_j + \delta_j) - F(a_j)) + \epsilon \\
&= \sum_{j=1}^{m} (F(b_j + \delta_j) - F(a_j)) + \epsilon < \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{\epsilon}{2^j} + F(b_j) - F(a_j)\Big) + \epsilon \\
&< \sum_{j=1}^{m} (F(b_j) - F(a_j)) + 2\epsilon \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j) + 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Protože bylo $\epsilon > 0$ voleno libovolně, dostáváme kýženou nerovnost $\mu_0(I) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j)$ pro případ $I = (a, b]$ s $a > -\infty$.

Je-li $a = -\infty$, postupujeme jako v předchozím případě a najdeme konečné pokrytí kompaktního intervalu $[-M, b]$ intervaly $(a_j, b_j + \delta_j)$ pro lib. $M > 0$ dostatečně velké ($-M < b$). Analogicky dojdeme k závěru, že

$$F(b) - F(-M) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j) + 2\epsilon$$

pro libovolné $M > 0$ a $\epsilon > 0$. Pošleme-li $M \to \infty$ a $\epsilon \to 0+$, dokážeme kýženou nerovnost

$$\mu_0\left((-\infty, b]\right) = F(b) - F(-\infty) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j).$$

Pokud je $I = (a, \infty)$ s $a > -\infty$ aplikujeme opět podobný postup tentokrát s kompaktním intervalem $[a + \delta, M]$ a lib. $M > 0$ dostatečně velkým. Dojdeme k nerovnosti

$$F(M) - F(a) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j) + 2\epsilon$$

a limitním přechodem $M \to \infty$ a $\epsilon \to 0+$ získáme kýženou nerovnost. Nakonec i v případě $I = \mathbb{R}$ lze postupovat analogicky k odvození nerovnosti

$$F(M) - F(-M) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j) + 2\epsilon$$

platné pro každé $M > 0$ a $\epsilon > 0$ a limitním přechodem $M \to \infty$ a $\epsilon \to 0+$ dokončíme důkaz. □

Nyní již je vše připravené pro aplikaci obecné konstrukce míry z pramíry na algebře vyložené ve Větě 4.38.

Věta 4.43: Nechť $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesající a zprava spojitá. Potom platí:

1. Existuje právě jedna borelovská míra μ_F na $\mathbb{R}$ taková, že $\mu_F \restriction \mathcal{E} = \mu_0$. Speciálně platí

   $$\mu_F\left((a, b]\right) = F(b) - F(a).$$

   pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

2. Je-li $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neklesající a zprava spojitá funkce, potom

   $$\mu_F = \mu_G \quad \Leftrightarrow \quad F - G \text{ je konstantní.}$$

3. Naopak je-li μ borelovská míra na $\mathbb{R}$ taková, že $(\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ omezená$)(\mu(B) < \infty)$ a definujeme

   $$F(x) := \begin{cases} \mu((0, x]), & \text{je-li } x > 0, \\ 0, & \text{je-li } x = 0, \\ -\mu((x, 0]), & \text{je-li } x < 0, \end{cases}$$

potom je F neklesající zprava spojitá funkce a $\mu_F = \mu$.

Důkaz. 1. Podle Věty 4.42 je μ_0 pramíra na algebře $\mathcal{A}$, a tudíž určuje vnější míru μ^* vztahem (37). Podle Věty 4.38 je $\mu := \mu^* \restriction \mathcal{M}(\mathcal{A})$ míra. Ukážeme, že $\mu = \mu_F$. Protože $\mu \restriction \mathcal{A} = \mu_0$, máme pro lib. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, vztah

$$\mu((a, b]) = \mu_0((a, b]) = F(b) - F(a).$$

Dále $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, a proto $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ podle Lemma 4.7. Opačná inkluze $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \supset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ je důsledek Věty 4.9 a opět Lemma 4.7. Tedy $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, což znamená, že μ je borelovská míra.

Nakonec dokážeme jednoznačnost. Je-li μ_F borelovská míra taková, že $\mu_F \restriction \mathcal{E} = \mu_0$, pak z aditivity míry plyne, že také $\mu_F \restriction \mathcal{A} = \mu_0$. Jednoznačnost je nyní důsledkem 3. tvrzení Věty 4.38, neboť pramíra μ_0 je σ-konečná. Stačí uvážit např. rozklad

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1] = \mathbb{R},$$

pro který je $\mu_0((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$.

2. Pokud $\mu_F = \mu_G$, máme pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, rovnost $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$, ze které speciálně plyne, že

$$F(x) - G(x) = F(0) - G(0)$$

kdykoliv $x > 0$, nebo $x < 0$ a triviálně pro $x = 0$. Tedy poslední rovnost platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$, neboli $F - G$ je konstantní funkce.

Naopak je-li $F - G$ konstantní funkce, určují F i G tutéž pramíru μ_0, jak plyne z definice μ_0 z Věty 4.42. Tudíž $\mu_F = \mu^* \restriction \mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mu_G$.

3. Důkaz jen naznačíme, detailní ověření je přenecháno čtenáři jako Cvičení 4.6. Jelikož je μ konečná na omezených borelovských podmnožinách $\mathbb{R}$, má funkce F pouze reálné hodnoty, tedy $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Monotonie F plyne z monotonie míry μ a spojitost F zprava na $[0, \infty)$ resp. na $(-\infty, 0]$ plyne ze spojitosti μ shora resp. zdola, viz Věta 4.24. Nakonec si stačí rozmyslet, že $\mu = \mu_F$ na $\mathcal{A}$, a proto $\mu = \mu_F$ podle 3. tvrzení Věty 4.38. $\square$

Poznámka:

1. Naprosto analogickou teorii bychom vybudovali, kdybychom začali s intervaly typu $[a, b)$ a zleva spojitými neklesajícími funkcemi F.

2. Distribuční funkce $F_\mu(x) := \mu((-\infty, x])$ se obvykle definuje pro borelovské míry μ, pro které je $\mu((-\infty, x]) < \infty$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tedy např. pro konečné borelovské míry. V takovém případě se distribuční funkce F_μ liší od funkce F z 3. tvrzení Věty 4.43 o konstantu $\mu((-\infty, 0])$, přesněji $F_\mu - F = \mu((-\infty, 0])$.

Zastavme se ještě na chvíli u Věty 4.43. Ke každé neklesající a zprava spojité funkci F dokážeme zkonstruovat borelovskou míru μ_F, která přiřazuje intervalům $(a, b]$ hodnotu $F(b) - F(a)$. Taková míra je mezi borelovskými jediná a navíc je jasné, že je μ_F konečná na omezených borelovských podmnožinách $\mathbb{R}$. Naopak ke každé borelovské míře μ na $\mathbb{R}$, která je konečná na omezených borelovských množinách, existuje neklesající zprava spojitá funkce F taková, že $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$. Dostáváme tak *téměř* vzájemně jednoznačný vztah mezi množinami:

$$\{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid F \text{ neklesající a zprava spojitá}\}$$

a

$$\{\mu \text{ borelovská míra na } \mathbb{R} \mid (\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ omezená})(\mu(B) < \infty)\}.$$

Vztah je *téměř* vzájemně jednoznačný, protože μ určuje F až na posunutí o konstantu. To bychom mohli spravit tak, že bychom do první z množin přidali např. požadavek $F(0) = 0$ (jako je to ve 3. tvrzení Věty 4.43), pak bychom už měli vzájemně jednoznačný vztah.

Už definiční obor $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ míry μ_F je velice bohatý systém. Míru μ_F lze ovšem ještě zúplnit podle Věty 4.30 a tím ji ještě dále rozšířit. Definiční obor tohoto rozšíření $\overline{\mu}_F$ může skutečně být významně větší než $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, ale důkaz příslušného tvrzení vyžaduje hlubší poznatky z teorie množin. Naznačíme to na konci této části pro případ Lebesgueovy míry.

Definice 4.44 (Lebesgueova–Stieltjesova míra)**:** Nechť $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesající zprava spojitá funkce. Míru $\mu = \overline{\mu}_F$, která je zúplněním míry μ_F z Věty 4.43, nazýváme *Lebesgueova–Stieltjesova míra* na $\mathbb{R}$ asociovaná s F; σ-algebru, na níž je μ definovaná, označíme $\mathcal{M}_\mu$.

Definice 4.45 (Lebesgueova míra, lebegueovsky měřitelná množina)**:** Lebesgueovu–Stieltjesovu míru asociovanou s funkcí $F = \mathrm{id}$, tj. $(\forall x \in \mathbb{R})(F(x) = x)$, nazýváme *Lebesgueova míra* na $\mathbb{R}$ a značíme m. Množiny σ-algebry $\mathcal{L} := \mathcal{M}_m$ se nazývají *lebesgueovsky měřitelné*.

Poznámka: Z poznámky za Větou 4.38 vyplývá, že množina $E \subset \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná, právě když je m^*-měřitelná, tj. $(\forall A \subset \mathbb{R})(m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c))$. Henri Lebesgue původně také nejprve definoval vnější míru m^*, ale (lebesgueovskou) měřitelnost množiny $E \subset \mathbb{R}$ definoval trochu jinak, než jsme to udělali my. Totiž omezenou množinu E nazval měřitelnou, pokud $m^*(E) + m^*((a,b) \setminus E) = b - a$ pro každý interval (a,b) obsahující E a neomezenou množinu E nazval měřitelnou, právě když každý průnik E s omezeným intervalem byla měřitelná množina. Ačkoliv to není ihned patrné, tyto dvě definice lebegueovské měřitelnosti jsou ekvivalentní, což lze ověřit s využitím výsledku Cvičení 4.5.

Lebesgue–Stieltjesovy míry jsou v jistém smyslu regulární, to znamená, že mají určité pěkné vlastnosti, které nejsou automatické ani pro borelovské míry (viz Věta 4.47 dále). Dokázat tuto regularitu bude náš další cíl. Z konstrukce Lebesgueovy–Stieltjesovy míry μ na $\mathbb{R}$ a Věty 4.39 plyne pro každé $E \in \mathcal{M}_\mu$ rovnost

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \;\middle|\; \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}, \tag{44}$$

viz (37). Nejprve si dokážeme pomocné tvrzení, že ve vzorci (44) stačí místo množin $A_n \in \mathcal{A}$ uvažovat intervaly typu $(a,b]$, nebo alternativně otevřené intervaly (a,b), kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Lemma 4.46: Nechť μ je Lebesgueova–Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$. Potom pro každé $E \in \mathcal{M}_\mu$ platí:

1.
$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left((a_n, b_n]\right) \;\middle|\; E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \right\},$$

2.
$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left((a_n, b_n)\right) \;\middle|\; E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \right\}.$$

Důkaz. Nechť $E \in \mathcal{M}_\mu$.

1. Systém p-intervalů se rozkládá $\mathcal{E} = \{\emptyset\} \cup \mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_{II} \cup \mathcal{E}_{III}$, kde

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_I &:= \{(a,b] \mid -\infty < a < b < \infty\}, \\
\mathcal{E}_{II} &:= \{(a,\infty) \mid -\infty \le a < \infty\}, \\
\mathcal{E}_{III} &:= \{(-\infty,b] \mid -\infty < b < \infty\},
\end{aligned}$$

Pro potřeby důkazu si označíme

$$\mu_{\mathcal{E}}(E) := \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) \;\middle|\; \{I_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\},$$
$$\mu_{\mathcal{E}_I}(E) := \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) \;\middle|\; \{I_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}_I, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}.$$

Nejprve ukážeme, že v (44) můžeme nahradit algebru $\mathcal{A}$ systémem $\mathcal{E}$, tzn. rovnost $\mu(E) = \mu_{\mathcal{E}}(E)$. Z inkluze $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ plyne $\mu(E) \le \mu_{\mathcal{E}}(E)$. Dále předpokládejme, že $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ je posloupnost taková, že $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Každá množina A_n je konečné sjednocení po dvou disjunktních množin z $\mathcal{E}$, označme je $\{I_j^{(n)}\}_{j=1}^{N_n} \subset \mathcal{E}$, kde $N_n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_n} \mu\left(I_j^{(n)}\right) \ge \mu_{\mathcal{E}}(E),$$

protože $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{N_n} I_j^{(n)}$. Z poslední nerovnosti a z (44) plyne, že $\mu(E) \ge \mu_{\mathcal{E}}(E)$.

Dále ukážeme, že místo $\mathcal{E}$ lze vzít dokonce jen $\mathcal{E}_I$, tj. ověříme rovnost $\mu_{\mathcal{E}}(E) = \mu_{\mathcal{E}_I}(E)$. Z inkluze $\mathcal{E}_I \subset \mathcal{E}$ vyplývá nerovnost $\mu_{\mathcal{E}}(E) \le \mu_{\mathcal{E}_I}(E)$. Naopak nechť je $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ taková, že $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $I_n \ne \emptyset$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Každý p-interval I_n, který je z $\mathcal{E}_{II}$, tedy $I_n = (a_n, \infty)$, je spočetným sjednocením po dvou disjunktních intervalů z $\mathcal{E}_I$, např.

$$(a_n, \infty) = \begin{cases} \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} (a_n + j - 1, a_n + j], & \text{je-li } a_n > -\infty, \\ \displaystyle\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} (j - 1, j], & \text{je-li } a_n = -\infty. \end{cases}$$

Podobně každý p-interval I_n, který je z $\mathcal{E}_{III}$, tedy $I_n = (-\infty, b_n]$, je spočetným sjednocením po dvou disjunktních intervalů z $\mathcal{E}_I$, např.

$$(-\infty, b_n] = \bigcup_{j=1}^{\infty} (b_n - j - 1, b_n - j + 1].$$

To znamená, že ke každému $I_n \in \mathcal{E}$ existuje nejvýše spočetný systém po dvou disjunktních intervalů z $\mathcal{E}_I$, označme jej $\{I_j^{(n)}\}_j$ (bez specifikace rozsahu pro index j pro jednoduchost), tak, že $I_n = \cup_j I_j^{(n)}$. Z tohoto pozorování odvodíme nerovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) = \sum_{n,j} \mu\left(I_j^{(n)}\right) \ge \mu_{\mathcal{E}_I}(E),$$

což implikuje $\mu_{\mathcal{E}}(E) \ge \mu_{\mathcal{E}_I}(E)$. Celkem tedy máme $\mu(E) = \mu_{\mathcal{E}_I}(E)$, což jsme chtěli dokázat.

2. Označme si

$$\nu(E) := \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left((a_n, b_n)\right) \;\middle|\; E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \right\}.$$

V důkazu použijeme již dokázanou rovnost pro $\mu(E)$ z 1. tvrzení a ukážeme, že $\mu(E) = \nu(E)$.

Nechť $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$. Každý z intervalů (a_n, b_n) lze napsat jako spočetné sjednocení po dvou disjunktních intervalů z $\mathcal{E}_I$:

$$(a_n, b_n) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(c_j^{(n)}, c_{j+1}^{(n)}\right],$$

kde $c_1^{(n)} = a_n$ a $\{c_j^{(n)}\}_{j=1}^{\infty}$ je libovolná rostoucí posloupnost taková, že $\lim_{j\to\infty} c_j^{(n)} = b_n$. Odtud dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left((a_n, b_n)\right) = \sum_{n,j=1}^{\infty} \mu\left(\left(c_j^{(n)}, c_{j+1}^{(n)}\right]\right) \geq \mu(E),$$

a tudíž $\nu(E) \geq \mu(E)$.

Naopak zvolme pevně $\epsilon > 0$. Potom z definice infima plyne existence posloupnosti intervalů $\{(a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ takových, že $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]$ a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left((a_n, b_n]\right) \leq \mu(E) + \epsilon.$$

Podle předpokladu je μ Lebesgueova–Stieltjesova míra, a proto existuje neklesající zprava spojitá funkce F taková, že $\mu\left((a_n, b_n]\right) = F(b_n) - F(a_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ze spojitosti F zprava dále plyne, že

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists \delta_n > 0)\left(F(b_n + \delta_n) - F(b_n) < \frac{\epsilon}{2^n}\right).$$

Potom $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n + \delta_n)$ a platí

$$\begin{aligned}
\nu(E) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu((a_n, b_n + \delta_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu((a_n, b_n + \delta_n]) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(F(b_n + \delta_n) - F(a_n)\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\epsilon}{2^n} + F(b_n) - F(a_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left((a_n, b_n]\right) + \epsilon \leq \mu(E) + 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Jelikož jsme $\epsilon > 0$ volili libovolně, dostáváme tak druhou nerovnost $\nu(E) \leq \mu(E)$. $\square$

Věta 4.47: Nechť μ je Lebesgueova–Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$. Potom pro každé $E \in \mathcal{M}_\mu$ platí:

1. **Vnější regularita**: $\mu(E) = \inf\{\mu(U) \mid E \subset U$ a U je otevřená$\}$.
2. **Vnitřní regularita**: $\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset E$ a K je kompaktní$\}$.

Důkaz. Nechť $E \in \mathcal{M}_\mu$.

1. Díky monotonii míry μ platí nerovnost $\mu(E) \leq \mu(U)$ pro každou otevřenou nadmnožinu $U \supset E$. Ukážeme, že je splněna i druhá vlastnost z definice infima. Nechť $\epsilon > 0$. Potom podle 2. tvrzení Lemma 4.46 existuje otevřená množina $U := \cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ tak, že $E \subset U$ a

$$\mu(E) + \epsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu((a_n, b_n)) \geq \mu(U),$$

kde jsme využili subaditivity míry μ. Tím je dokázáno 1. tvrzení.

2. Opět z monotonie míry plyne $\mu(E) \geq \mu(K)$ pro každou kompaktní $K \subset E$, a tedy $\mu(E)$ je horní závora množiny $\{\mu(K) \mid K \subset E$ a K je kompaktní$\}$. Stačí tedy opět dokázat druhou vlastnost z definice suprema. Zvolme $\epsilon > 0$.

Předpokládejme nejprve, že E je omezená. Je-li E uzavřená, je E kompaktní a dokazovaná rovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\overline{E} \setminus E \neq \emptyset$. Podle již dokázané rovnosti z 1. tvrzení existuje otevřená množina $U \supset \overline{E} \setminus E$ taková, že $\mu(\overline{E} \setminus E) + \epsilon \geq \mu(U)$. Z poslední nerovnosti plyne, že $\mu(U) < \infty$, neboť $\overline{E} \setminus E \subset \overline{E}$ je omezená množina, a tudíž $\mu(\overline{E} \setminus E) < \infty$. Položme $K := \overline{E} \setminus U$, potom K je omezená a uzavřená, a tedy kompaktní a navíc $K \subset E$. Protože $E = K \cup (E \cap U)$ a $K \cap (E \cap U) = \emptyset$, můžeme psát

$$\mu(K) = \mu(E) - \mu(E \cap U),$$

kde jsme využili toho, že $\mu(E) < \infty$, což plyne z omezenosti množiny E. Dále máme také disjunktní rozklad $U = (U \cap E) \cup (U \cap E^c) = (U \cap E) \cup (U \setminus E)$, a proto $\mu(U) = \mu(U \cap E) + \mu(U \setminus E)$. Celkem potom dostaneme

$$\mu(K) = \mu(E) - (\mu(U) - \mu(U \setminus E)) \geq \mu(E) - \mu(U) + \mu(\overline{E} \setminus E) \geq \mu(E) - \epsilon,$$

což jsme chtěli dokázat.

Je-li E neomezená, definujeme si omezené po dvou disjunktní množiny $E_n := E \cap (n, n+1]$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. Podle argumentu použitého v předchozím odstavci existuje pro každé $n \in \mathbb{Z}$ kompaktní množina $K_n \subset E_n \subset E$ tak, že

$$\mu(K_n) \geq \mu(E_n) - \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^{|n|+1}}.$$

Položíme-li $H_n := \cup_{j=-n}^{n} K_j$, je H_n kompaktní množina, $H_n \subset E$ a

$$\mu(H_n) = \sum_{j=-n}^{n} \mu(K_j) \geq \sum_{j=-n}^{n} \left(\mu(E_j) - \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^{|j|+1}}\right) \geq \mu\left(\bigcup_{j=-n}^{n} E_j\right) - \frac{\epsilon}{2}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože

$$\mu(E) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \mu(E_j) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=-n}^{n} E_j\right), \tag{45}$$

existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že
$$\mu\left(\bigcup_{j=-n_0}^{n_0} E_j\right) \geq \mu(E) - \frac{\epsilon}{2}$$
za předpokladu, že $\mu(E) < \infty$. V takovém případě jsme k zadanému $\epsilon > 0$ našli kompaktní množinu $K := H_{n_0} \subset E$ takovou, že
$$\mu(K) \geq \mu(E) - \epsilon.$$

Nakonec je-li $\mu(E) = \infty$, vyplývá také z rovnosti (45), že k libovolně velké konstantě $L > 0$ najdeme kompaktní množinu $K := H_{n_0}$ (pro n_0 dostatečně velké) tak, že
$$\mu(K) > L.$$
A to je druhá vlastnost z definice suprema pro případ, že je toto supremum nekonečné. □

Poznámka: Množina E, pro kterou platí první resp. druhá rovnost z Věty 4.47, se nazývá *regulární zvnějšku* resp. *vnitřně* vzhledem k μ. Borelovská míra μ, příp. její zúplnění, se nazývá *regulární*, je-li každá μ-měřitelná množina E regulární zvnějšku i vnitřně vzhledem k μ. Věta 4.47 tedy říká, že Lebesgueovy–Stieltjesovy míry na $\mathbb{R}$ jsou regulární. Platí dokonce následující obecnější tvrzení, viz [22, Věta 2.18]. *Je-li X lokálně kompaktní Hausdorfův prostor (tzn., že každý bod má okolí, jehož uzávěr je kompaktní), ve kterém každá otevřená množina je σ-kompaktní (tzn., že je spočetným sjednocením kompaktních množin) a μ je borelovská míra na X taková, že $\mu(K) < \infty$ pro každou kompaktní množinu $K \subset X$, potom je μ regulární.*

Z konstrukce Lebesgueovy–Stieltjesovy míry μ není jasné, jaké to vlastně jsou množiny, které tvoří σ-algebru $\mathcal{M}_\mu$. Další věta ukazuje, že tyto měřitelné množiny lze vyjádřit pomocí „jednoduchých“ množin (ze systémů G_δ nebo F_σ) až na μ-nulovou opravu.

Věta 4.48: Nechť μ je Lebesgueova–Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$ a $E \subset \mathbb{R}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $E \in \mathcal{M}_\mu$.
2. Existují F_σ-množina H a μ-nulová množina N tak, že $E = H \cup N$.
3. Existují G_δ-množina V a μ-nulová množina N tak, že $E = V \setminus N$.

Důkaz. Je jasné, že tvrzení 2. i 3. implikují 1., neboť z předpokladů tvrzení 2. a 3. plyne, že $V, H, N, \tilde{N} \in \mathcal{M}_\mu$, a proto $E = H \cup N \in \mathcal{M}_\mu$ a také $E = V \setminus \tilde{N} = V \cap \tilde{N}^c \in \mathcal{M}_\mu$.

Dokážeme implikaci $1. \Rightarrow 2.$ Nechť $E \in \mathcal{M}_\mu$ a navíc předpokládejme, že $\mu(E) < \infty$. Podle Věty 4.47 existuje ke každému $n \in \mathbb{N}$ kompaktní množina $K_n \subset E$ taková, že
$$\mu(E) \leq \mu(K_n) + \frac{1}{n}.$$
Položme $H := \cup_{n=1}^{\infty} K_n$. Potom H je F_σ-množina a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí
$$\mu(E) \leq \mu(H) + \frac{1}{n},$$

což implikuje nerovnost $\mu(E) \leq \mu(H)$. Uvážíme-li ještě, že $H \subset E$, dostaneme

$$\mu(E) = \mu(H).$$

Protože $\mu(E) = \mu(H) < \infty$, je $\mu(E \setminus H) = \mu(E) - \mu(H) = 0$. Stačí tedy položit $N := E \setminus H$.

V případě, že $\mu(E) = \infty$, si definujme pomocné množiny $E_n := (n, n+1] \cap E$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. Protože $\mu(E_n) \leq \mu((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < \infty$, kde F je nějaká neklesající funkce, můžeme na množiny E_n aplikovat předchozí postup. Dostaneme tak F_σ-množiny $H_n \subset E_n$ a μ-nulové množiny N_n tak, že $E_n = H_n \cup N_n$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$. Protože

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} H_n \cup N_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} H_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} N_n\right),$$

stačí položit

$$H := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} H_n \quad \text{a} \quad N := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} N_n.$$

Potom H je F_σ-množina a N je μ-nulová množina, jak plyne z Věty 4.26. Tím je implikace 1. $\Rightarrow$ 2. dokázána.

Nakonec dokážeme implikaci 1. $\Rightarrow$ 3. Nechť $E \in \mathcal{M}_\mu$. Jelikož už máme dokázanou implikaci 1. $\Rightarrow$ 3., můžeme ji aplikovat na množinu $E^c \in \mathcal{M}_\mu$. Potom existuje F_σ-množina $H \subset E^c$ a μ-nulová množina N tak, že $E^c = H \cup N$. Protože

$$E = H^c \cap N^c = H^c \setminus N,$$

stačí položit $V := H^c$ a uvědomit si, že doplněk do F_σ-množiny je G_δ-množina. □

Dokážeme si ještě jednu větu, která vyjadřuje, že měřitelné množiny lze aproximovat jednoduchými množinami. Připomeňme, že symetrická diference množin A a B je definována vztahem

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Věta 4.49: Nechť μ je Lebesgueova–Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}_\mu$ a $\mu(E) < \infty$. Potom

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists A \text{ konečné sjednocení otevřených intervalů})(\mu(E \Delta A) < \epsilon).$$

Důkaz. Nechť $\epsilon > 0$. Protože je $\mu(E) < \infty$, existují podle Věty 4.47 otevřená množina $U \supset E$ a kompaktní množina $K \subset E$ tak, že

$$\mu(U \setminus E) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{a} \quad \mu(E \setminus K) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Protože je U otevřená, existuje ke každému $x \in U$ číslo $r_x > 0$ tak, že $(x - r_x, x + r_x) \subset U$, což implikuje

$$U = \bigcup_{x\in U} (x - r_x, x + r_x).$$

To znamená, že $\{(x - r_x, x + r_x) \mid x \in U\}$ je otevřené pokrytí kompaktní množiny K, neboť $K \subset U$. Proto existuje $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \ldots, x_n \in U$ tak, že $K \subset A$, kde jsme označili

$$A := \bigcup_{i=1}^{n} (x_i - r_{x_i}, x_i + r_{x_i}).$$

Tedy A je konečné sjednocení otevřených intervalů. Dále z inkluzí $K \subset A \subset U$ plyne, že

$$A \setminus E \subset U \setminus E \quad \text{a} \quad E \setminus A \subset E \setminus K,$$

a proto

$$\mu(E \Delta A) = \mu(E \setminus A) + \mu(A \setminus E) \leq \mu(E \setminus K) + \mu(U \setminus E) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

V poslední části této kapitoly prozkoumáme blíže **nejdůležitější míru** na $\mathbb{R}$, totiž Lebesgueovu míru m a také σ-algebru lebesgueovsky měřitelných množin $\mathcal{L}$. Připomeňme si motivaci popsanou v úvodu této kapitoly. Chtěli jsme zavést „zobecněný objem" na podmnožinách $\mathbb{R}^n$, který by byl σ-aditivní, invariantní vůči posunutí, rotaci a zrcadlení a intervalům přiřadil jejich objem v obvyklém smyslu. Lebesgueova míra je právě tento hledaný „zobecněný objem" na $\mathbb{R}$. Rozšíření Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^n$ zavedeme později.

Jelikož Lebesguova míra m je speciální Lebesgueova–Stieltjesova míra asociovaná s funkcí $F(x) = x$, máme

$$m((a,b)) = m([a,b)) = m((a,b]) = m([a,b]) = b - a$$

pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, viz Cvičení 4.7. Speciálně tedy $m(\{a\}) = 0$.

Dále si ukážeme, že m je skutečně translačně invariantní a také invariantní vůči rotaci a zrcadlení. Samozřejmě poslední dvě jmenované transformace jsou v $\mathbb{R}$ značně limitované. My si ukážeme dokonce víc, konkrétně chování m vůči škálování. Pro $E \subset \mathbb{R}$ a $s, r \in \mathbb{R}$ použijeme značení:

$$E + s = \{x + s \mid x \in E\} \quad \text{a} \quad rE = \{rx \mid x \in E\}.$$

Věta 4.50: Nechť $E \in \mathcal{L}$ a $s, r \in \mathbb{R}$. Potom $E + s \in \mathcal{L}$, $rE \in \mathcal{L}$ a platí:

$$m(E + s) = m(E) \quad \text{a} \quad m(rE) = |r| m(E).$$

(V případě $r = 0$ a $m(E) = \infty$ používáme konvenci $0 \cdot \infty = 0$.)

Důkaz. Je jasné, že tvrzení o rE platí, pokud je $r = 0$, a proto budeme dále předpokládat, že $r \neq 0$.

Nejprve dokážeme, že $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ je invariantní vůči posunutí a škálování. Označme $\mathcal{I}$ systém otevřených intervalů v $\mathbb{R}$. Systém $\mathcal{I}$ je zřejmě invariantní vůči posunutí i škálování, tj. $\mathcal{I} + s = \mathcal{I}$ a $r\mathcal{I} = \mathcal{I}$. Jelikož je $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, máme

$$\mathcal{I} = \mathcal{I} + s \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}} + s.$$

Protože $\mathcal{B}_\mathbb{R}+s$ je σ-algebra (rozmyslete) a systém $\mathcal{I}$ generuje $\mathcal{B}_\mathbb{R}$, viz Věta 4.9, plyne z Lemma 4.7, že

$$\mathcal{B}_\mathbb{R} \subset \mathcal{B}_\mathbb{R} + s.$$

Tato inkluze platí pro všechna $s \in \mathbb{R}$. Platí proto, i pokud místo s píšeme $-s$. Dostáváme tak inkluzi

$$\mathcal{B}_\mathbb{R} \subset \mathcal{B}_\mathbb{R} - s,$$

která je ekvivalentní s inkluzí

$$\mathcal{B}_\mathbb{R} + s \subset \mathcal{B}_\mathbb{R},$$

a tedy platí rovnost $\mathcal{B}_\mathbb{R} + s = \mathcal{B}_\mathbb{R}$ pro všechna $s \in \mathbb{R}$. Zcela analogicky se ověří, že $r\mathcal{B}_\mathbb{R} = \mathcal{B}_\mathbb{R}$ pro všechna $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (proveďte).

Zafixujme $s \in \mathbb{R}$ a $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a definujme

$$\begin{aligned} m_s(E) &:= m(E+s), \\ m^r(E) &:= m(rE) \end{aligned}$$

pro $E \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$. Jelikož $\mathcal{B}_\mathbb{R}+s = \mathcal{B}_\mathbb{R}$ a $r\mathcal{B}_\mathbb{R} = \mathcal{B}_\mathbb{R}$, jsou m_s a m^r dobře definované na $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ a navíc jsou to míry na $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ (ověřte). Dále je jasné, že se m_s a m^r shodují s m a $|r|m$ na množině p-intervalů, a tudíž také na algebře konečných sjednocení po dvou disjunktních p-intervalů. Věta 4.38 potom implikuje, že $m_s = m$ a $m^r = |r|m$ na $\mathcal{B}_\mathbb{R}$, neboli máme

$$m(E+s) = m(E) \quad \text{a} \quad m(rE) = |r|m(E)$$

pro všechna $E \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$.

Speciálně pro množiny $N \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ nulové Lebesgueovy míry platí, že $m(N+s) = m(rN) = 0$ pro všechna $s, r \in \mathbb{R}$. Podle definice zúplnění míry popsané ve Větě 4.30 je $E \in \mathcal{L}$, právě když existují $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ a $F \subset N \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ takové, že $m(N) = 0$ a $E = A \cup F$, a potom $m(E) = m(A)$. Tudíž

$$E + s = A \cup F + s = (A+s) \cup (F+s),$$

kde $A+s \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ a $F+s \subset N+s$, $m(N+s) = 0$, jak víme z předchozí části. Tzn., že $E+s \in \mathcal{L}$. Navíc

$$m(E+s) = m(A+s) = m(A) = m(E).$$

Analogicky máme

$$rE = r(A \cup F) = rA \cup rF,$$

kde $rA \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ a $rF \subset rN$, $m(rN) = 0$ podle předchozí části, a proto $rE \in \mathcal{L}$. Navíc

$$m(rE) = m(rA) = |r|m(A) = |r|m(E).$$

□

Topologické vlastnosti Lebesgueovsky měřitelných množin jsou poměrně delikátní a jejich studium připravilo matematikům nejedno překvapení. Uvědomte si, že z Vět 4.1 a 4.50 vyplývá, že $\mathcal{L} \neq 2^{\mathbb{R}}$, neboli, že existuje množina, která není lebesgueovsky měřitelná. Nicméně důkaz Věty 4.1, kde jsme nalezli lebegueovsky neměřitelnou množinu N, není konstruktivní, nýbrž používá k definici N axiom výběru. Použití axiomu výběru pro důkaz existence neměřitelné množiny není motivován touhou matematika použít záhadný výběr. Ukazuje se, že použití axiomu výběru je pro důkaz existence neměřitelné množiny zásadní. Přesnou formulaci tohoto tvrzení, kterou neuvedeme, neboť vyžaduje hlubší exkurz do axiomatické teorie množin, najde čtenář v [23].

Poznámka: Poznamenejme, že existence neměřitelné množiny není vlastností každé Lebesgueovy–Stieltjesovy míry na $\mathbb{R}$. Např., je-li Lebesgueova–Stieltjesova míra μ asociovaná s konstantní funkcí F, potom je $\mu = 0$ a $\mathcal{M}_\mu = 2^{\mathbb{R}}$. Příklad netriviální Lebesgueovy–Stieltjesovy míry definované na všech podmnožinách $\mathbb{R}$ ukazuje Cvičení 4.8.

Dále nechť $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost všech racionálních čísel v intervalu $[0,1]$. Zvolme $\epsilon > 0$. Definujme $I_n := (r_n - \epsilon 2^{-n-1}, r_n + \epsilon 2^{-n-1})$ a

$$U := (0,1) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Množina U je otevřená a hustá v $[0,1]$. Navíc $m(U) \leq \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \epsilon$. Naopak množina $K := [0,1] \setminus U$ je uzavřená a tzv. řídká, neboť $K^\circ = \emptyset$ (obecně se množina A nazývá ***řídká***, pokud $(\overline{A})^\circ = \emptyset$) a $m(K) \geq 1 - \epsilon$. Tedy topologicky „velká“ množina, tj. otevřená a hustá v $[0,1]$, může mít libovolně malou míru (nicméně ne nulovou, viz Cvičení 4.9). Na druhou stranu topologicky „nevýznamná“ množina, tj. řídká v $[0,1]$, může mít míru libovolně blízkou míře celého intervalu $[0,1]$.

Jelikož jednobodová množina má nulovou Lebesgueovu míru, je také $m(\mathbb{Q}) = 0$, viz Věta 4.26. Existují ale i množiny nulové míry, které mají dokonce mohutnost kontinua. Ukážeme si to na klasickém příkladu *Cantorova diskontinua.*

Příklad 4.51 (Cantorovo diskontinuum)**:** Položme

$$\begin{aligned}
C_1 &:= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \\
C_2 &:= \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \\
C_3 &:= \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \left(\frac{4}{27}, \frac{5}{27}\right) \cup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{11}{27}, \frac{12}{27}\right) \cup \cdots \cup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right),
\end{aligned}$$

atd. Obecně pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$C_n := \bigcup_{k=1}^{3^{n-1}} \left(\frac{3k-2}{3^n}, \frac{3k-1}{3^n}\right).$$

Potom *Cantorovo diskontinuum* je množina

$$C := [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Jinými slovy C vznikne z $[0,1]$ odebráním prostřední třetiny $(1/3, 2/3)$, poté odebráním prostředních třetin $(1/9, 2/9)$ a $(7/9, 8/9)$, atd., viz Obrázek 12.

Obrázek 12: Ilustrace konstrukce Cantorova diskontinua.

Ukážeme, že C je množina Lebesgueovy míry nula. Jelikož C vznikne z $[0,1]$ odebráním jednoho intervalu délky $1/3$, dvou intervalů délky $1/9$, čtyř intervalů délky $1/27$, atd., máme

$$m(C) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-2/3} = 0.$$

Dále si ukážeme, že C má mohutnost kontinua. K tomu budeme potřebovat charakterizaci elementů množiny C založenou na ternární reprezentaci čísla $x \in [0,1]$. Libovolné číslo $x \in [0,1]$ můžeme reprezentovat v číselné bázi o základu 3 ve tvaru

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j},$$

kde $a_j \in \{0,1,2\}$, např. použitím tzv. hladového algoritmu. Tato reprezentace ovšem není jednoznačná, např. číslo $1/3$ má jednak reprezentaci s ciframi $a_1 = 1$ a $a_j = 0$ pro $j > 1$, ale také $a_1 = 0$ a $a_j = 2$ pro $j > 1$, protože

$$\frac{1}{3} = \sum_{j=2}^{\infty} 2 \cdot 3^{-j}.$$

Tato dvojznačnost se týká pouze čísel tvaru $p3^{-k}$, kde $p, k \in \mathbb{Z}$ a p není dělitelné třemi. Číslo $p3^{-k}$ má právě dvě reprezentace, které mají buď $a_j = 0$ pro $j > k$, nebo $a_j = 2$ pro $j > k$. V intervalu $(0,1)$ se tato nejednoznačnost týká právě koncových bodů intervalů definujících množiny C_n. Odstraníme tuto nejednoznačnost tak, že pokud je x levý kraj odstraňovaného intervalu, zvolíme variantu reprezantace končící nekonečnou posloupností cifer 2, kdežto pokud je x pravý kraj odstraňovaného intervalu, zvolíme reprezentaci končící nekonečnou posloupností cifer 0. Např.

$$x = \frac{1}{3}: \quad a_1 = 0,\, a_j = 2, \quad j > 1,$$
$$x = \frac{2}{3}: \quad a_1 = 2,\, a_j = 0, \quad j > 1.$$

Čísla 0 resp. 1 jsou reprezentována ciframi $a_n = 0$ resp. $a_n = 2$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. S touto konvencí je každému číslu $x \in [0,1]$ přiřazena jednoznačně posloupnost cifer $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s $a_n \in \{0,1,2\}$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$, což se obvykle vyjadřuje rovností

$$(x)_3 = 0_{\bullet_3} a_1 a_2 a_3 \ldots .$$

Navíc je toto zobrazení prosté, protože $x < y$, právě když existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n < b_n$ a $a_j = b_j$ pro všechna $j < n$.

V souvislosti s Cantorovou množinou C si nyní stačí uvědomit, že

$$\begin{aligned} x \in C_1 \quad &\Leftrightarrow \quad a_1 = 1, \\ x \in C_2 \quad &\Leftrightarrow \quad a_2 = 1, \\ &\text{atd.} \end{aligned}$$

Obecně $x \in C_n \Leftrightarrow a_n = 1$, a proto můžeme charakterizovat elementy množiny C následovně:

$$x \in C \quad \Leftrightarrow \quad \text{Ternární reprezentace čísla } x \text{ obsahuje pouze cifry 0 a 2.}$$

Abychom viděli, že C má mohutnost kontinua, stačí nahradit v ternární reprezentaci čísla $x \in C$ cifry 2 cifrou 1. Tedy je-li $(x)_3 = 0_{\bullet_3} a_1 a_2 a_3 \ldots$, definujeme $b_n := a_n/2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak řada

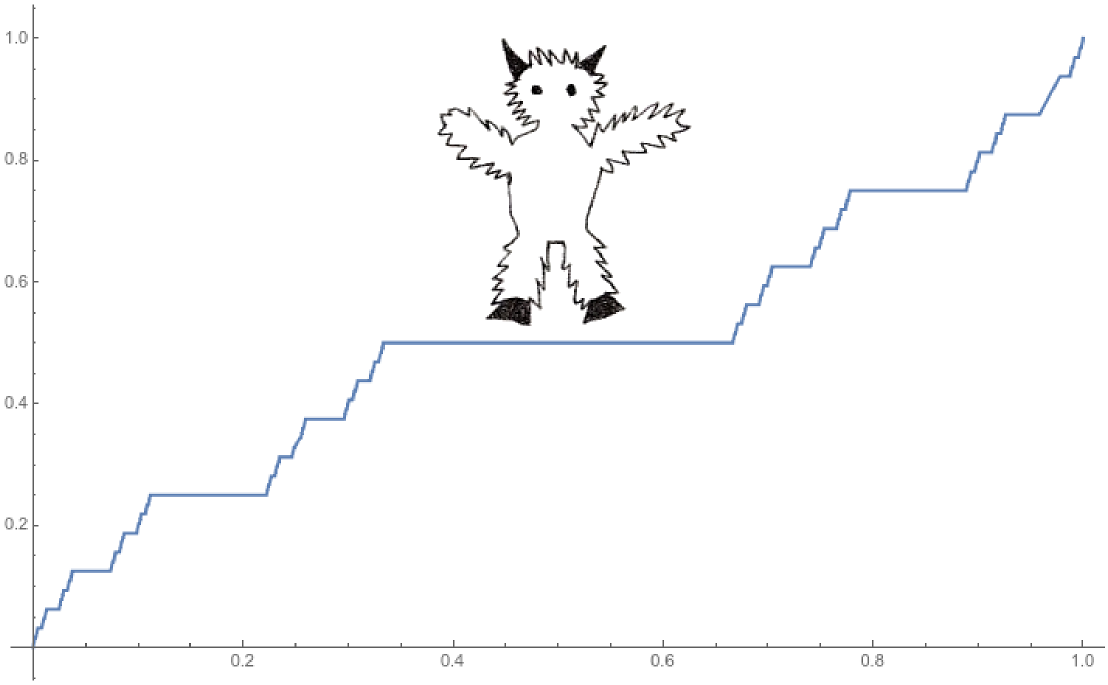
$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^{-n} \tag{46}$$

představuje binární reprezentaci čísla $[0,1]$ a navíc každé číslo z $[0,1]$ lze takto získat. Jinými slovy je $f : C \to [0,1]$ surjektivní. Z toho plyne, že C má stejnou mohutnost jako interval $[0,1]$, tedy mohutnost kontinua.

Topologické vlastnosti Cantorova diskontinua shrnuje Cvičení 4.10. Prozkoumáme ještě zobrazení $f : C \to [0,1]$ z předchozího příkladu.

Příklad 4.52 (Cantorova funkce)**:** V poslední části předchozího příkladu jsme viděli, že mezi elementy $x \in C$ a posloupnostmi z nul a jedniček je vzájemně jednoznačný vztah. Funkce f definovaná na C vztahem (46) zobrazuje tedy na $[0,1]$, ale není prostá, protože dvě různé posloupnosti z nul a jedniček mohou představovat dvě různé binární reprezentace téhož čísla. Jedná se o již výše popsanou nejednoznačnost tentokrát pro případ binární reprezentace čísla. Čísla s dvojí binární reprezentací jsou tvaru $p2^{-k}$, kde $p, k \in \mathbb{Z}$.

Je jednoduché si rozmyslet, že pro $x < y$ platí $f(x) < f(y)$, až na situaci, kdy x a y jsou koncové body jednoho z intervalů odstraňovaných z $[0,1]$ při konstrukci množiny C. V takovém případě je $f(x) = f(y)$, a proto můžeme rozšířit definici f i na tyto odstraňované intervaly (x,y) tak, že f bude na (x,y) konstantní: $(\forall t \in (x,y))(f(t) := f(x) \equiv f(y))$. Tímto rozšířením získáme neklesající funkci $f : [0,1] \to [0,1]$. Jelikož je f neklesající a současně $f([0,1]) = [0,1]$, nemůže mít f body nespojitosti v $[0,1]$, a tedy f je spojitá funkce. Funkci f představil Cantor ve svém článku v roce 1884 a postupně se stala populární. V literatuře se f nazývá různými jmény, např. *Cantorova funkce*, *Lebesgueova–Cantorova funkce*, *Cantorova–Vitaliho funkce* nebo také *Ďáblovo schodiště*, viz Obrázek 13. Přehledné shrnutí různých vlastností Cantorovy funkce lze najít v článku [8].



Obrázek 13: Cantorova funkce a.k.a. Ďáblovo schodiště.

Připomeňme, že lebegueovsky měřitelné množiny $\mathcal{L}$ jsme získali z borelovských množin $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ tak, že jsme zúplnili příslušnou borelovskou míru. Požadavek, aby každá podmnožina množiny nulové míry měla nulovou míru, je nejen racionální, ale také významně rozšiřuje systém měřitelných množin. Nicméně ukázat si, že existují lebegueovsky měřitelné množiny, které nejsou borelovské, není jednoduché. Naznačíme si jeden argument, ovšem s tím, že bez důkazu přijmeme tvrzení, že $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ má mohutnost kontinua. Ověřit tento fakt vyžaduje hlubší exkurz do teorie množin, který je už nad rámec tohoto textu. Čtenář může důkaz najít např. v [10, Sec. 1.6, § 1.2].

V teorii množin značí $\mathrm{card}(A)$ kardinalitu (mohutnost) množiny A. Neuvedeme zde přesnou definici kardinality množiny, vystačíme si s následujícími informacemi. Je-li A konečná, je $\mathrm{card}(A)$ počet prvků A. Také kardinalita některých nekonečných množin má ustálené označení, např. $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$ nebo $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Rovnost $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$ znamená, že množiy A a B mají stejnou mohutnost, neboli, že mezi A a B existuje bijekce. Tedy např. pro Cantorovo diskontinuum C platí $\mathrm{card}(C) = \mathfrak{c}$. Nerovnost $\aleph_0 \neq \mathfrak{c}$ vyjadřuje, že mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$ neexistuje bijekce. Tyto symboly, tzv. *kardinální čísla*, lze chápat jako symboly pro „různá nekonečna“ v matematice.

Na kardinálních číslech lze zavést uspořádání. Řekneme, že $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$, pokud existuje injektivní zobrazení z A do B a řekneme, že $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(B)$, pokud $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ a současně neexistuje bijekce z A do B. Např. $\aleph_0 < \mathfrak{c}$. Antisymetrie relace card je obsahem Schröderovy–Bernsteinovy věty, která ukazuje, že pokud $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ a $\mathrm{card}(B) \leq \mathrm{card}(A)$, potom $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$. Přijmeme-li navíc Axiom výběru, lze kardinality libovolných dvou množin A a B vždy porovnat, tj. nastává buď $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$, nebo

$\mathrm{card}(B) \leq \mathrm{card}(A)$. Je to dokonce tvrzení ekvivalentní a Axiomem výběru, viz [2, Věta 7.14].

Cantor jednoduchou ale geniální myšlenkou ukázal, že existují množiny libovolné mohutnosti, tedy „libovolně velká nekonečna“.

Věta 4.53 (Cantor)**:** Pro libovolnou abstraktní množinu A platí, že $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(2^A)$.

Důkaz. Je-li A konečná, potom tvrzení platí, neboť počet prvků potenční množiny 2^A je roven 2^n, kde n je počet prvků A (ověřte), a nerovnost $n < 2^n$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

Pro obecnou množinu A (konečnou či nekonečnou) využívá důkaz Cantorův „diagonální argument“. Tato myšlenka dokazuje, že neexistuje žádné surjektivní zobrazení $f : A \to 2^A$. Z toho již speciálně vyplývá, že $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(2^A)$, protože zobrazení $A \to 2^A : x \mapsto \{x\}$ je prosté.

Pro spor předpokládejme, že $f : A \to 2^A$ je surjektivní. Definujme množinu $B := \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. Jelikož je f surjektivní a $B \subset A$, existuje $x \in A$ tak, že $f(x) = B$. Potom ale $x \in B \iff x \notin f(x) = B$ z konstrukce množiny B; to je logický spor. $\square$

Již jsme ukázali, že pro Cantorovo diskontinuum C platí $m(C) = 0$, a proto také každá podmnožina C je lebegueovsky měřitelná (s nulovou mírou) z úplnosti Lebegueovy míry. Potom podle Cantorovy Věty 4.53 máme

$$\mathrm{card}\,\mathcal{L} \geq \mathrm{card}\,2^C > \mathrm{card}(C) = \mathfrak{c}.$$

Tedy systém $\mathcal{L}$ má větší mohutnost než $\mathcal{B}_\mathbb{R}$, protože $\mathrm{card}(\mathcal{B}_\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Speciálně z toho plyne, že existuje lebesgueovsky měřitelná množina, která není borelovská (dokonce nekonečně mnoho).

Poznámka: Je-li $\mathrm{card}\,A = \mathfrak{c}$, značí se $\mathrm{card}\,2^A = 2^\mathfrak{c}$ (nebo $\aleph_2$ za předpokladu platnosti Hypotézy kontinua). Kardinalitu $2^\mathfrak{c}$ má např. množina všech reálných funkcí. Jelikož $2^C \subset \mathcal{L} \subset 2^\mathbb{R}$, je $\mathrm{card}\,\mathcal{L} = 2^\mathfrak{c}$. Tedy dobrá zpráva je, že lebesgueovsky měřitelných množin je „mnoho“. Na druhou stranu lebesguevsky neměřitelných množin je stejně „mnoho“. Skutečně je-li např. N neměřitelná množina z důkazu Věty 4.1, potom také každá množina systému $\{N \cup (1+K) \mid K \subset C\}$ je neměřitelná. Tento systém má stejnou mohutnost jako 2^C, tj. $2^\mathfrak{c}$, a proto $\mathrm{card}(2^\mathbb{R} \setminus \mathcal{L}) = 2^\mathfrak{c}$.

4.6 Cvičení

Cvičení 4.1: Dokončete důkaz Věty 4.9.

Cvičení 4.2: Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $C \subset X$ je hustá. Dokažte, že systém

$$\{B_x(r) \mid x \in C, r \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}\}$$

je báze (X, ρ).

Cvičení* 4.3: Buď $\mathcal{A}$ algebra, $\mathcal{A}_\sigma$ systém spočetných sjednocení množin z $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ systém spočetných průniků množin z $\mathcal{A}_\sigma$. Uvažujme dále pramíru μ_0 na $\mathcal{A}$ a μ^* vnější míru určenou pramírou μ_0 podle vzorce (37). Dokažte následující tvrzení:

1. $(\forall E \subset X)(\forall \epsilon > 0)(\exists A \in \mathcal{A}_\sigma, E \subset A)(\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \epsilon)$.
2. Pokud $\mu^*(E) < \infty$, potom
$$E \text{ je } \mu^*\text{-měřitelná} \quad \Leftrightarrow \quad (\exists B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}, E \subset B)(\mu^*(B \setminus E) = 0).$$
3. Je-li μ_0 σ-konečná, lze předpoklad $\mu^*(E) < \infty$ v bodě 2. vynechat.

(Hint: Bod 1.: Použijte 2. vlastnost infima. Bod 2.: Nejprve aplikujte bod 1. s $\epsilon := 1/n$ a definujte B jako průnik množin $A_n \in \mathcal{A}_\sigma$ z bodu 1. Ukažte, že $E \subset B$ a $\mu^*(E) = \mu^*(B)$. Implikace $(\Rightarrow)$: Uvažujte množinu B v definici μ^*-měřitelnosti E: $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \cap E^c) = \mu^*(E) - \mu^*(B \setminus E)$ a použijte rovnost $\mu^*(E) = \mu^*(B)$ spolu s předpokladem $\mu^*(E) < \infty$. Implikace $(\Leftarrow)$: Uvědomte si, že $\mathcal{A}_{\sigma\delta} \subset \mathcal{M}^*$ a pro lib. $A \subset X$ ukažte, že $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap (B \setminus E)) + \mu^*(A \cap (B \setminus E)^c) \leq \mu^*(B \setminus E) + \mu^*(A) = \mu^*$. Potom je $B \setminus E \in \mathcal{M}^*$, a protože také $B \in \mathcal{M}^*$, musí i $E \in \mathcal{M}^*$.)

Cvičení* 4.4: Uvažujte μ_0 pramíru na algebře $\mathcal{A}$, vnější míru μ^* definovanou vztahem (37) a míru $\mu := \mu^* \restriction \mathcal{M}$, kde $\mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathcal{A})$, viz Věta 4.38. Aplikujte vzorec (37) ještě jednou tentokrát s $\mathcal{M}$ místo $\mathcal{A}$ a μ místo μ_0 a výslednou vnější míru označte $\mu^\dagger$. Dokažte, že $\mu^* = \mu^\dagger$. (Hint: Pro odvození nerovnosti $\mu^*(E) \leq \mu^\dagger(E)$ použijte Cvičení 4.3, bod 1.)

Cvičení 4.5: Buď μ^* vnější míra na X určená konečnou pramírou μ_0. Definujme *vnitřní míru* $\mu_* : 2^X \to [0, \infty]$ na X vztahem $\mu_*(E) := \mu_0(X) - \mu^*(E^c)$ pro $E \subset X$. Dokažte, že

$$E \text{ je } \mu^*\text{-měřitelná} \quad \Leftrightarrow \quad \mu_*(E) = \mu^*(E).$$

(Hint: V důkazu implikace $(\Leftarrow)$ postupujte jako v důkazu 2. tvrzení ze Cvičení 4.3 a ukažte, že k lib. $E \subset X$ existuje $B \in \sigma\delta$, $E \subset B$ taková, že $\mu^*(E) = \mu^*(B)$, a také $\mu^*(E^c) = \mu^*(B^c)$. Z druhé rovnosti a z μ^*-měřitelnosti B vyvoďte, že $\mu^*(B \setminus E) = 0$.)

Cvičení 4.6: Doplňte detaily v důkazu 3. tvrzení Věty 4.43.

Cvičení 4.7: Buď μ Lebesgueova–Stieltjesova míra asociovaná s funkcí F. Ukažte, že pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ platí:

$$\mu((a, b)) = F(b-) - F(a),$$
$$\mu([a, b]) = F(b) - F(a-),$$
$$\mu([a, b)) = F(b-) - F(a-)$$

a

$$\mu(\{a\}) = F(a) - F(a-),$$

kde $F(x-) = \lim_{y\to x-} F(y)$ označuje limitu zleva.

Cvičení 4.8: Ukažte, že Lebesgueova–Stieltjesova míra asociovaná s funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x \geq 0, \\ 0, & \text{je-li } x < 0, \end{cases}$$

je Diracova delta míra δ_0 v bodě 0.

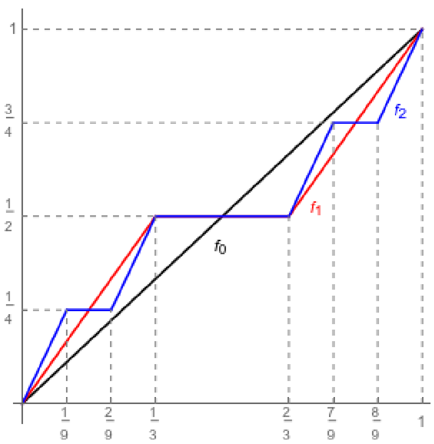
Cvičení 4.9: Dokažte, že neprázdná otevřená podmnožina $\mathbb{R}$ má pozitivní Lebesgueovu míru.

Cvičení 4.10: Dokažte, že pro Cantorovo diskontinuum C platí:

1. C je kompaktní.
2. C je řídká.
3. C je totálně nesouvislá, tzn., že jedinými souvislými podmnožinami C jsou singletony.
4. C je perfektní, tedy C nemá izolované body.

Cvičení 4.11: Uvažujte posloupnost funkcí $f_n : [0,1] \to [0,1]$ definovanou rekurzivně tak, že $f_0(x) := x$ a

$$f_{n+1}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x), & \text{je-li } \ 0 \leq x < 1/3, \\ \frac{1}{2}, & \text{je-li } \ 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2), & \text{je-li } \ 2/3 < x \leq 1, \end{cases}$$



kde $n \in \mathbb{N}_0$. Dokažte, že $f_n \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} f$, kde f je Cantorova funkce.

Pijte s mírou!