7 Dodatky

7.1 Gama a Beta funkce

Walter Rudin začíná svou knihu [22] tvrzením, že funkce $z \mapsto \exp(z)$ je nejdůležitější funkce v matematice. Podobně by se dalo tvrdit, že Gama funkce $z \mapsto \Gamma(z)$ je nejdůležitější funkce z tzv. vyšších transcendentních funkcí [9]. Jak funkce Gama, tak i s ní úzce související funkce Beta, jsou funkce definované jako parametrické integrály - tzv. *Eulerovy integrály*.

Definice 7.1 (Gama a Beta funkce)**:** Funkci definovanou vztahem

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t \tag{88}$$

pro $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$ nazýváme *Gama funkce*. Dále funkci

$$B(u,v) := \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} \mathrm{d}t \tag{89}$$

definovanou pro $u, v \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} u > 0$ a $\operatorname{Re} v > 0$ nazýváme *Beta funkce*.

Požadavek, aby argumenty z, u, v z definice Gama a Beta funkce měly pozitivní reálné části, zaručuje integrabilitu funkcí v integrálech (88) a (89) na příslušných intervalech. Např. v případě Gama funkce máme

$$\left|t^{z-1} e^{-t}\right| = t^{\operatorname{Re} z - 1} e^{-t}$$

a funkce vpravo má konečný integrál na $(0, \infty)$, právě když $\operatorname{Re} z > 0$. Přesněji tuto podmínku vyžaduje integrabilita funkce na pravé okolí nuly. Na okolí bodu ∞ je funkce integrabilní pro každé $z \in \mathbb{C}$ díky členu e^{-t} (promyslete). Podobně dostaneme omezení pro argumenty u a v funkce Beta (ověřte).

Pro naše účely bude stačit v dalším výkladu uvažovat jen reálné (tedy pozitivní) argumenty funkcí Gama a Beta. Všimněte si, že přímo z definic (88) a (89) plyne, že $\Gamma(x) > 0$ a $B(x,y) > 0$ pro každé $x, y > 0$. Nejprve shrneme základní identity.

Věta 7.2:

1. Pro každé $x > 0$ platí:
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$
2. Pro každé $x, y > 0$ platí:
$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$
3. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí:
$$\Gamma(n+1) = n!.$$
4. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí:
$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}.$$

   Speciálně $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Důkaz. 1. Pro $x > 0$ dostaneme integrací per partes:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} \mathrm{d}t = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^\infty + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

2. Buďte $x, y > 0$. V integrálu

$$\Gamma(x+y) = \int_0^\infty t^{x+y-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

provedeme substituci $t = (1+r)s$, kde $r > 0$ je fixní parametr, a dostaneme

$$\Gamma(x+y) = (1+r)^{x+y} \int_0^\infty s^{x+y-1} e^{-(1+r)s} \mathrm{d}s.$$

Obě strany poslední rovnosti vynásobíme $r^{x-1}/(1+r)^{x+y}$ a integrujeme podle r od 0 do ∞. Tak dojdeme k rovnosti:

$$\Gamma(x+y) \int_0^\infty \frac{r^{x-1}}{(1+r)^{x+y}} \mathrm{d}r = \int_0^\infty r^{x-1} \int_0^\infty s^{x+y-1} e^{-s-rs} \mathrm{d}s \, \mathrm{d}r.$$

Integrand vpravo je kladná měřitelná funkce, a proto můžeme podle Tonelliho věty zaměnit pořadí integrace. Potom

$$\Gamma(x+y) \int_0^\infty \frac{r^{x-1}}{(1+r)^{x+y}} \mathrm{d}r = \int_0^\infty s^{x+y-1} e^{-s} \int_0^\infty r^{x-1} e^{-rs} \mathrm{d}r \, \mathrm{d}s.$$

Jelikož je vnitřní integrál

$$\int_0^\infty r^{x-1} e^{-rs} \mathrm{d}r = s^{-x} \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t = s^{-x} \Gamma(x),$$

máme

$$\Gamma(x+y) \int_0^\infty \frac{r^{x-1}}{(1+r)^{x+y}} \mathrm{d}r = \Gamma(x) \int_0^\infty s^{y-1} e^{-s} \mathrm{d}s = \Gamma(x)\Gamma(y).$$

Nakonec všimneme-li si, že

$$\int_0^\infty \frac{r^{x-1}}{(1+r)^{x+y}} \mathrm{d}r = \int_0^\infty \left(\frac{r}{1+r}\right)^{x-1} \left(1 - \frac{r}{1+r}\right)^{y-1} \frac{\mathrm{d}r}{(1+r)^2},$$

dostaneme po substituci $t = r/(1+r)$ rovnost

$$\int_0^\infty \frac{r^{x-1}}{(1+r)^{x+y}} \mathrm{d}r = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \mathrm{d}t = B(x,y).$$

Celkem tedy máme

$$\Gamma(x+y) B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y),$$

odkud plyne dokazovaná identita.

3. Přímým výpočtem z definice spočítáme, že $\Gamma(1) = 1$. Potom rovnost $\Gamma(n+1) = n!$ pro $n \in \mathbb{N}$ dostaneme matematickou indukcí s využitím již dokázaného 1. tvrzení.

4. Podobně jako v bodu 3. stačí ukázat, že $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Zbytek je potom opět přímý důsledek identity z 1. tvrzení (ověřte). Položíme-li v identitě z 2. tvrzení $x = y = 1/2$, dostaneme

$$\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

Provedeme-li v posledním integrálu substituci $t = \sin^2\theta$, zjistíme, že

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \int_0^{\pi/2} 2\mathrm{d}\theta = \pi,$$

a tudíž $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. □

Poznámka: 1. Z 2. tvrzení Věty 7.2 plyne symetrie $B(x,y) = B(y,x)$ pro $x, y > 0$.
2. Díky vztahu $\Gamma(n+1) = n!$ pro $n \in \mathbb{N}_0$ lze použít Gama funkci k definování faktoriálu čísla, které není přirozené. Někteří autoři skutečně píšou $x!$ pro $x > -1$ ve smyslu $x! := \Gamma(x+1)$. Podle této logiky je potom například $(-1/2)! = \sqrt{\pi}$. My zde ale značení $x!$ nebudeme používat.
3. Vztah $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ lze použít k dodefinování funkce Gama pro $x < 0$. Např. je-li $x \in (-1, 0)$, položíme

$$\Gamma(x) := \frac{\Gamma(x+1)}{x},$$

neboť pravá strana má dobrý smysl. Podobně můžeme postupovat pro libovolné neceločíselné $x < 0$ a dostaneme funkci Γ definovanou na množině $\mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}_0)$. Graf této funkce je na Obrázku 24.
4. Identity z 1. a 2. tvrzení Věty 7.2 platí i pro komplexní argumenty x a y s kladnou reálnou částí. Dále se v komplexní analýze speciálních funkcí ukazuje, že funkci Γ lze rozšířit jako analytickou funkci až na množinu $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$. Body množiny $-\mathbb{N}_0$ jsou tzv. jednoduché póly Γ. Podobně je funkce B analytickou funkcí obou svých argumentů na $(\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0))^2$.

Příklad 7.3: Identity z Věty 7.2 lze s výhodou použít při výpočtu integrálů tvaru

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m(\theta)\cos^n(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Provedeme-li totiž v integrálu (89) z definice funkce Beta substituci $t = \sin^2\theta$, dostaneme

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2y-1}(\theta)\mathrm{d}\theta$$

pro libovolné $x, y > 0$. Odtud plyne, že

$$\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha(\theta)\cos^\beta(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right)$$

pro každé $\alpha, \beta > -1$. Pokud je tedy např. $\alpha = 2m+1$ a $\beta = 2n$ pro $m, n \in \mathbb{N}_0$, máme

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1}(\theta)\cos^{2n}(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}B\left(m+1, n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1/2)}{2\Gamma(m+n+3/2)}$$
$$= 2^{2m+1}\frac{m!(2n)!(m+n+1)!}{n!(2m+2n+2)!}$$

a podobně pro další varianty parity exponentů α a β (jsou-li celočíselné).

Dále dokážeme identitu známou jako *Eulerův vzorec* pro funkci Γ (*Euler reflection formula*). Klasické důkazy této rovnosti nejsou elementární, využívají např. Reziduovou větu z teorie komplexních funkcí nebo vyjádření Gama funkce ve tvaru nekonečného součinu (Weierstrassova věta z teorie celých funkcí). Jeden důkaz prostředky reálné analýzy našel R. Dedekind, žák C. F. Gausse, ve své dizertační práci, viz [7]. My si ukážeme důkaz, který využívá tzv. Mittag-Lefflerova rozvoje funkce $z \mapsto \sin^{-1}(\pi z)$ a který lze odvodit z Fourierovy řady funkce $f(x) = \cos(\alpha x)$ na $(-\pi, \pi)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Obvyklým postupem a s využitím Věty 1.64 dokážeme, že

$$\cos(\alpha x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}\cos(nx)$$

pro každé $x \in [-\pi, \pi]$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Položíme-li $x = 0$ a $z := \alpha$, dostaneme

$$1 = \frac{\sin(z\pi)}{z\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z\sin(z\pi)}{\pi(z^2-n^2)},$$

z čehož plyne

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right), \tag{90}$$

kde $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Dá se ukázat, že rovnost (90) platí dokonce pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Věta 7.4 (Euler)**:** Pro každé $x \in (0, 1)$ platí:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Důkaz. Ukážeme, že

$$B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

pro všechna $x \in (0, 1)$. Tvrzení pak plyne ihned z Věty 7.2.

Nejprve si upravíme integrální vyjádření funkce Beta. Pro $x, y > 0$ máme

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}\mathrm{d}s,$$

kde jsme provedli substituci $t = s/(1+s)$. Poslední integrál napíšeme jako součet integrálu od 0 do 1 a od 1 do ∞ a ve druhém integrálu provedeme substituci $s = 1/\tilde{s}$ (vlnku vzápětí nebudeme psát). Tak dostaneme rovnost

$$B(x,y) = \int_0^1 \frac{s^{x-1}+s^{y-1}}{(1+s)^{x+y}}\mathrm{d}s$$

pro $x, y > 0$.

Odtud pro $x \in (0,1)$ máme

$$B(x,1-x) = \int_0^1 \frac{s^{x-1}}{1+s}\mathrm{d}s + \int_0^1 \frac{s^{-x}}{1+s}\mathrm{d}s = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n s^{n+x-1}\mathrm{d}s + \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n s^{n-x}\mathrm{d}s.$$

Dále prohodíme pořadí integrálů a sum, což je krok, který ospravedlníme na konci důkazu, a po integraci dostane

$$B(x,1-x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right).$$

Nyní stačí aplikovat vzorec (90).

K dokončení důkazu zbývá ospravedlnit záměnu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^n s^{\alpha+n}\mathrm{d}s = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n s^{\alpha+n}\mathrm{d}s$$

pro libovolné $\alpha \in (-1,0)$. K tomu stačí ospravedlnit záměnu integrálu a limity v poslední rovnosti úpravy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^n s^{\alpha+n}\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k s^{\alpha+k}\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 s^{\alpha}\frac{1+s^{n+1}}{1+s}\mathrm{d}s = \int_0^1 \frac{s^{\alpha}}{1+s}\mathrm{d}s,$$

což umožňuje Lebesgueova Věta 5.43, neboť pro každé $s \in (0,1)$ a $n \in \mathbb{N}$ je

$$\left|s^{\alpha}\frac{1+s^{n+1}}{1+s}\right| \le \frac{2s^{\alpha}}{1+s} \le 2s^{\alpha}$$

a majoranta vpravo je integrabilní funkce na $(0,1)$ pro každé $\alpha > -1$. $\square$

Na závěr prozkoumáme vybrané analytické vlastnosti funkce Γ na $(0,\infty)$, viz též graf na Obrázku 24.

Věta 7.5: Funkce Γ je hladká a ryze konvexní na $(0,\infty)$. Dále platí:

$$\lim_{x\to 0+}\Gamma(x) = \lim_{x\to\infty}\Gamma(x) = \infty.$$

Důkaz. Nejprve ověříme, že $\Gamma \in C^{\infty}((0,\infty))$. Důkaz jen naznačíme, detaily jsou přenechány čtenáři. Matematickou indukcí ověříme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\Gamma \in C^{(n)}((0,\infty))$ a pro n-tou derivaci Γ platí:

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

pro každé $x > 0$. Pro indukční krok je třeba ospravedlnit záměnu derivace podle x a integrálu, kterou zajistí Věta 5.48. Pro její aplikaci je nezbytné najít pro libovolnou volbu intervalu $(a,b) \subset (0,\infty)$ integrabilní majorantu $g \in L((0,\infty),m)$ nezávislou na x a takovou, že $|(\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}| \leq g(t)$ pro všechna $t \in (0,\infty)$ a $x \in (a,b)$. K tomu si stačí uvědomit, že

$$\left|(\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}\right| \leq \begin{cases} |\ln t|^n \, t^{a-1} e^{-t} \in L((0,1),m), & \text{je-li } t \in (0,1), \\ |\ln t|^n \, t^{b-1} e^{-t} \in L((1,\infty),m), & \text{je-li } t \in [1,\infty). \end{cases}$$

V iniciačním kroku $n = 0$ stačí ověřit spojitost Γ na $(0,\infty)$, která plyne z Věty 5.47.

Funkce Γ je ryze konvexní na $(0,\infty)$, protože pro každé $x > 0$ je

$$\Gamma''(x) = \int_0^{\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t > 0,$$

neboť integrand je pozitivní funkce na $(0,\infty)$.

Dále ze spojitosti Γ a Věty 7.2 plyne, že

$$\lim_{x\to 0+} x\Gamma(x) = \lim_{x\to 0+} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1.$$

Tedy funkce Γ se na pravém okolí nuly chová stejně jako $1/x$, speciálně $\lim_{x\to 0+} \Gamma(x) = \infty$.

Všimněte si, že pro každé $x > 0$ máme

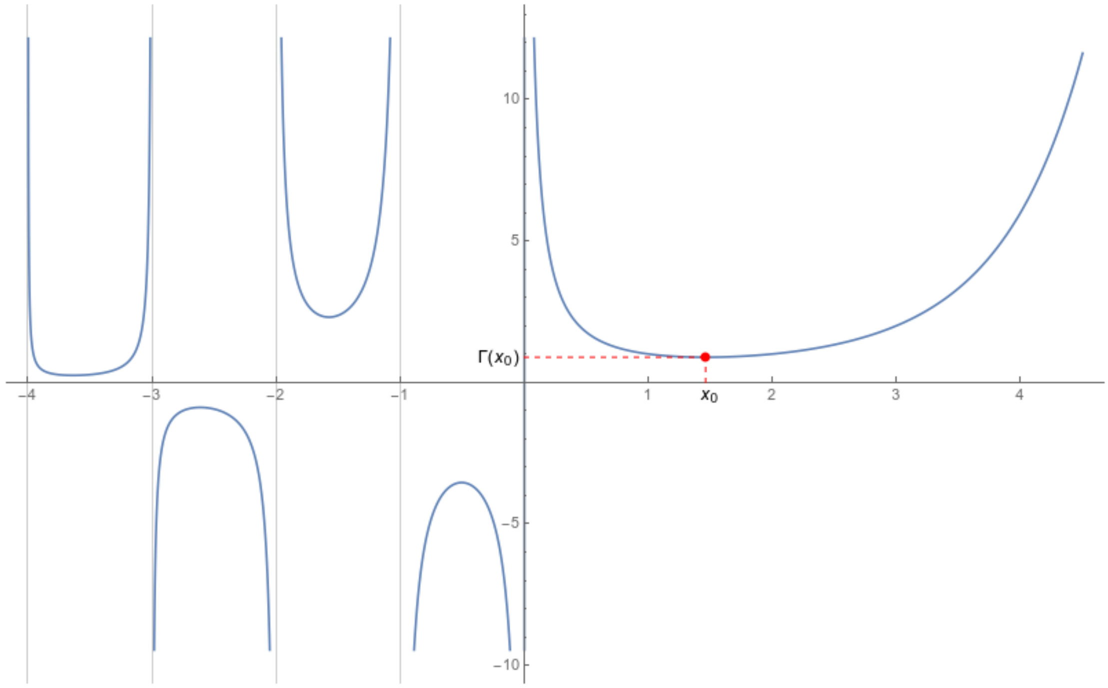
$$\Gamma(x) \geq \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t. \tag{91}$$

Pro libovolnou posloupnost bodů $1 \leq x_n \leq x_{n+1}$ takovou, že $x_n \to \infty$ je $\{t^{x_n-1}e^{-t}\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost nezáporných integrabilních funkcí na $(1,\infty)$, a proto podle Věty 5.24 o monotónní konvergenci je

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{\infty} t^{x_n-1} e^{-t} \mathrm{d}t = \int_1^{\infty} \infty \, \mathrm{d}x = \infty.$$

Tudíž z nerovnosti (91) vyplývá, že také $\Gamma(x_n) \to \infty$ a podle Heineho věty nakonec $\Gamma(x) \to \infty$ pro $x \to \infty$. □

Z Věty 7.5 vyplývá, že Γ má na $(0,\infty)$ jedno globální minimum. Tento bod minima $x_0 > 0$ je jediné řešení rovnice $\Gamma'(x) = 0$ na $(0,\infty)$, kterou není možné vyřešit explicitně. Z Věty o přírůstku plyne, že $x_0 \in (1,2)$, protože $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Numericky lze minimum přibližně lokalizovat: $x_0 \approx 1{,}46163$ a $\Gamma(x_0) \approx 0{,}8856$, viz Obrázek 24.



Obrázek 24: Graf funkce Γ na $\mathbb{R}$.

Poznámka: Mnohem přesnější informaci o chování funkce Γ pro $x \to \infty$ dává tzv. *Stirlingův vzorec*:

$$\Gamma(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left(\frac{x}{e}\right)^x [1 + \varepsilon(x)],$$

kde $\varepsilon(x) \to 0$ pro $x \to \infty$ (dokonce $\lim_{x\to\infty} x\varepsilon(x) = 1/12$). Protože $\Gamma(n+1) = n!$, dostáváme speciálně asymptotický rozvoj pro faktoriál:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n [1 + \varepsilon(n)],$$

kde $\varepsilon(n) \to 0$ pro $n \to \infty$. Důkaz Stirlingova vzorce je nad rámec tohoto kurzu. Jeden možný způsob odvození Stirlingova vzorce používá tzv. Laplaceovu metodu, viz [19].

Cvičení 7.1: Dokažte, že

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

(Hint: Nejprve ověřte konvergence integrálu s pomocí rovnosti $\lim_{x\to 0+} x\Gamma(x) = 1$. Potom ukažte, že $\int_0^1 \ln(\Gamma(x)\Gamma(1-x)) \, \mathrm{d}x = 2\int_0^1 \ln \Gamma(x) \mathrm{d}x$ a použijte Větu 7.4.)

Cvičení 7.2: Pro $x > 0$ dokažte vzorec pro dvojnásobný argument:

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

(Hint: Nejprve dokažte, že $B(x,x) = 2^{1-2x} B(x, 1/2)$, a potom aplikujte Větu 7.2.)

Cvičení 7.3: Dokažte, že

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{G} \quad \text{a} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos x}} = \pi G,$$

kde

$$G = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2 .$$

Číslo $G = 0.8346268\ldots$ je známé jako *Gaussova konstanta* a je to transcendentní iracionální číslo.

7.2 Integrace ve sférických souřadnicích

XXX

7.3 Greenova a Gaussova věta

Cílem tohoto dodatku je důkaz Greenovy a Gaussovy věty pro obecnější třídu množin než ty, na jaké jsme se pro jednoduchost omezili v důkazech Vět 6.15 a 6.33. K tomuto účelu zkonstruujeme tzv. *rozklad jedničky*, což je užitečný koncept, který se objevuje na mnoha místech pokročilé analýzy.

Lemma 7.6: Nechť $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ je n-interval v $\mathbb{R}^n$. Potom existuje $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ taková, že

$$(\forall x \in I^\circ)(f(x) > 0) \quad \text{a} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus I^\circ)(f(x) = 0).$$

Důkaz. Hladkou funkci f s popsanou vlastností explicitně definujeme. Je-li $n = 1$, tj. $I = [a, b]$, můžeme f zvolit jako

$$f_a^b(x) := \begin{cases} e^{1/(x-a)(x-b)}, & \text{pro } a < x < b, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Ověření hladkosti f_a^b se provede analogicky jako v Příkladu 1.50. Nyní pro obecné $n \in \mathbb{N}$ stačí položit

$$f(x) := \prod_{i=1}^{n} f_{a_i}^{b_i}(x_i)$$

pro každé $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. □

Definice 7.7 (Nosič funkce)**:** *Nosič funkce* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je množina

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Tedy $\operatorname{supp} f$ je nejmenší uzavřená množina, na jejímž doplňku je f nulová.

Věta 7.8: Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina a $\{U_j\}_{j=1}^J \subset \mathbb{R}^n$ otevřené neprázdné množiny takové, že $K \subset \cup_{j=1}^J U_j$. Potom existují funkce $\{\psi_m\}_{m=1}^M \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tak, že platí:

1. $(\forall m \in \hat{M})\big(\exists j \in \hat{J}\big)\,(\operatorname{supp}\psi_m \subset U_j \text{ a } \operatorname{supp}\psi_m \text{ je kompaktní})$,
2. $(\forall x \in K)\big(\sum_{m=1}^M \psi_m(x) = 1\big)$.

Poznámka: Kolekce funkcí $\{\psi_m\}_{m=1}^M$ z Věty 7.8 se nazývá *rozklad jedničky na K podřízený pokrytí* $\{U_j\}_{j=1}^J$.

Důkaz Věty 7.8. Kompaktní množina K je omezená, a proto existuje n-interval $I_0 := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ tak, že $K \subset I_0$. Půlením jednotlivých intervalů můžeme I_0 rozložit na 2^n n-intervalů, označme si množinu těchto intervalů $\mathcal{I}_1$. Opakováním téhož postupu na každém n-intervalu z $\mathcal{I}_1$ vytvoříme systém 2^{2n} n-intervalů, který označíme $\mathcal{I}_2$, atd. Tímto postupem můžeme rozložit I_0 na 2^{kn} n-intervalů, které vytvoří systém $\mathcal{I}_k$. Strany n-intervalu z $\mathcal{I}_k$ mají délku rovnu 2^{-k}-násobku délky příslušné strany I_0.

Jako první použijeme následující pomocný výsledek.

Lemma 7.9: Existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že každý n-interval z $\mathcal{I}_k$, který má neprázdný průnik s K, je obsažen v nějaké z množin $\{U_j\}_{j=1}^J$, neboli platí:

$$(\exists k \in \mathbb{N})(\forall I \in \mathcal{I}_k)\left(I \cap K \neq \emptyset \;\Rightarrow\; (\exists j \in \hat{J})(I \subset U_j)\right).$$

Důkaz Lemma 7.9. Pro spor předpokládejme, že

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists I_k \in \mathcal{I}_k)\left(I_k \cap K \neq \emptyset \;\wedge\; (\forall j \in \hat{J})(I_k \not\subset U_j)\right).$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ zvolme $x_k \in I_k \cap K$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ konvergentní, jinak bychom přešli k podposloupnosti. Konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ existuje díky kompaktnosti K. Označme si $x := \lim_{k\to\infty} x_k$. Prvek $x \in K$, a proto $(\exists j_0 \in \hat{J})(x \in U_{j_0})$. Protože je U_{j_0} otevřená, $(\exists \epsilon > 0)(B_x(\epsilon) \subset U_{j_0})$. Zvolme $k \in \mathbb{N}$ dostatečně velké tak, aby platilo

$$\|x_k - x\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{a} \quad \frac{1}{2^k}\sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Druhá podmínka implikuje, že vzdálenost libovolných dvou bodů z I_k je menší než $\epsilon/2$. Potom pro libovolné $y \in I_k$ platí:

$$\|y - x\| \leq \|y - x_k\| + \|x_k - x\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

neboli $I_k \subset B_x(\epsilon) \subset U_{j_0}$, což je spor. $\square$

Dál budeme pokračovat v důkazu Věty 7.8. Označme $\mathcal{I} := \mathcal{I}_k$ systém n-intervalů, kde $k \in \mathbb{N}$ je dostatečně velké tak, aby platilo tvrzení Lemma 7.9. Dále označme $I_1, \ldots, I_M$ ty n-intervaly z $\mathcal{I}$, které mají neprázdný průnik s K a $I_{M+1}, \ldots, I_N$ ty n-intervaly z $\mathcal{I}$, které mají neprázdný průnik s některým z $I_1, \ldots, I_M$. Tedy $\cup_{m=1}^M I_m$ je kompaktní množina obsahující K a $\cup_{m=1}^N I_m$ vznikne přidáním další vrstvy n-intervalů podél hranice množiny $\cup_{m=1}^M I_m$.

Podle Lemma 7.9 je

$$(\forall m \in \hat{M})(\exists j(m) \in \hat{J})(I_m \subset U_{j(m)}).$$

Označme si vzdálenost $c_m := d(I_m, U_{j(m)}^c)$ pro každé $m \in \hat{M}$. Pro $m \in \{M+1, \ldots, N\}$ ozn. $c_m := d(I_m, K)$. Jelikož jsou v definici c_m vždy dvě uzavřené disjunktní množiny, je $c_m > 0$ pro každé $m \in \hat{N}$, viz Lemma 2.54. Označme si ještě $\eta > 0$ je délku nejkratší strany ze všech intervalů z $\mathcal{I}$ a položme

$$\delta := \frac{1}{2\sqrt{n}} \min\left(c_1, \ldots, c_N, \eta\right).$$

Nakonec ještě definujeme n-intervaly $\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{I}_N$, které vzniknou z $I_1, \ldots, I_N$ zvětšením každé strany o δ (v obou směrech). Tedy je-li $I_m = [c_1, d_1] \times \cdots \times [c_n, d_n]$, potom je $\tilde{I}_m = [c_1 - \delta, d_1 + \delta] \times \cdots \times [c_n - \delta, d_n + \delta]$. Tyto „přifouknuté“ n-intervaly $\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{I}_N$ mají následující vlastnosti:

i) Jelikož $\delta < \eta/2$, je pro $m \in \hat{M}$ každý bod z $\tilde{I}_m$ vnitřním bodem právě jedné množiny $\tilde{I}_\ell$. (Zde jde zejména o body z hranice množiny $\tilde{I}_m$; může se stát, že $\ell > M$.)

ii) Je-li $x \in \tilde{I}_m$, potom existuje $y \in I_m$ tak, že pro každé $j \in \hat{n}$ je $|x_j - y_j| \leq \delta$, a proto $\|x - y\| \leq \delta\sqrt{n}$. Protože $\delta\sqrt{n} < c_m$, platí:

$$(\forall m \in \hat{M})(\tilde{I}_m \subset U_{j(m)}) \quad \text{a} \quad (\forall m \in \{M+1, \ldots, N\})(\tilde{I}_m \cap K = \emptyset).$$

Nyní pro každé $m \in \hat{N}$ zvolme $f_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ takové, že $f_m > 0$ na $\tilde{I}_m^\circ$ a $f_m = 0$ na $(\tilde{I}_m^\circ)^c$, jejichž existenci zaručuje Lemma 7.6. Pro $m \in \hat{M}$ definujme

$$\psi_m := \begin{cases} \frac{f_m}{\sum_{\ell=1}^N f_\ell}, & \text{na } \tilde{I}_m, \\ 0, & \text{na } \tilde{I}_m^c. \end{cases}$$

Díky vlastnosti (i) je jmenovatel $\sum_{\ell=1}^N f_\ell$ pozitivní na $\tilde{I}_m$. Tudíž $\psi_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dále $\operatorname{supp}\psi_m = \operatorname{supp} f_m = \tilde{I}_m \subset U_{j(m)}$, kde jsme využili vlastnost (ii).

Zbývá dokázat 2. tvrzení věty. Z vlastnosti (ii) plyne, že pro každé $m \in \{M+1, \ldots, N\}$ je $f_m = 0$ na K. Tudíž pro libovolné $x \in K$ platí:

$$\sum_{m=1}^M \psi_m(x) = \frac{\sum_{m=1}^M f_m(x)}{\sum_{\ell=1}^N f_\ell(x)} = \frac{\sum_{m=1}^M f_m(x)}{\sum_{\ell=1}^M f_\ell(x)} = 1.$$

□

Nyní si již můžeme dokázat Greenovu větu pro kompaktní podmnožiny $\mathbb{R}^2$, jejichž hranici tvoří stopy Jordanových C^1 křivek. Věta platí i pro obecnější případ, kdy hranici tvoří stopy *po částech* C^1 křivek, což znamená v konečně mnoha bodech hranice mohou být „rohy" nebo „špičky". Toto zobecnění již ale v tomto textu dokazovat nebudeme.

Věta 7.10 (Green)**:** Nechť $S \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktní množina, jejíž hranice je konečným sjednocením stop kladně orientovaných Jordanových křivek třídy C^1. Dále nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, $S \subset \Omega$ a $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ třídy C^1 na Ω. Potom platí:

$$\int_{\partial S} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Výchozím bodem důkazu je Greenova věta pro jednoduchou množinu S, kterou jsme dokázali ve Větě 6.15 (ve skutečnosti nám stačí speciální případ množin S, které jsou obdélníky, t.j. 2-intervaly). Na rozdíl od metody důkazu Věty 6.15, kde jsme *rozkládali množinu* S na jednodušší části, je hlavní myšlenkou tohoto důkazu *rozložit integrovanou funkci* na jednodušší části pomocí rozkladu jednotky a aplikovat Větu o substituci.

Zvolme libovolné $x \in \partial S$. Bod x leží na stopě nějaké C^1 křivky ϕ, která má všude nenulovou derivaci, což plyne z předpokladu orientovatelnosti hranice. Z Věty 3.59 o implicitní funkci, viz také Cvičení 3.19, vyplývá, že existuje otevřený kruh $B_x \subset \mathbb{R}^2$ tak, že množina $\partial S \cap B_x$ je grafem C^1 funkce, a to buď $y = f(x)$ nebo $x = g(y)$. Jelikož je ∂S kompaktní, neboť je omezená a uzavřená, existuje konečně mnoho těchto otevřených kruhů, ozn. $B_1, \ldots, B_J$, které pokrývají ∂S. Tudíž množiny $B_1, \ldots B_J$ a S° tvoří otevřené pokrytí S.

Podle Věty 7.8 můžeme zvolit rozklad jednotky $\{\psi_m\}_{m=1}^M$ na S podřízený otevřenému pokrytí $B_1, \ldots, B_J, S^\circ$. Potom na S platí:

$$F_i = \sum_{m=1}^{M} \psi_m F_i, \quad i \in \{1, 2\},$$

a funkce $\psi_m F_1$ a $\psi_m F_2$ jsou stále třídy C^1 pro každé $m \in \hat{M}$. Větu tedy stačí dokázat pro funkce $\psi_m F_1$ a $\psi_m F_2$ namísto původních F_1 a F_2. To znamená, že větu stačí dokázat pro C^1 funkce F_1 a F_2 takové, že

$$\begin{aligned} \text{buď} \quad & \text{a)} \ \operatorname{supp} F_1, \operatorname{supp} F_2 \subset S^\circ, \\ \text{nebo} \quad & \text{b)} \ (\exists j \in \hat{J})(\operatorname{supp} F_1, \operatorname{supp} F_2 \subset B_j). \end{aligned}$$

Případ (a) vyřídíme jednoduše, neboť $F_1 = F_2 = 0$ na ∂S, a proto je také $\int_{\partial S} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$. Funkce F_1 a F_2 zůstanou třídy C^1 dodefinujeme-li je nulou na libovolný 2-interval $R \supset S$. Potom aplikací Greenovy věty na obdélník R dostaneme

$$\int_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial R} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0.$$

Tedy Greenova věta je dokázána pro případ (a).

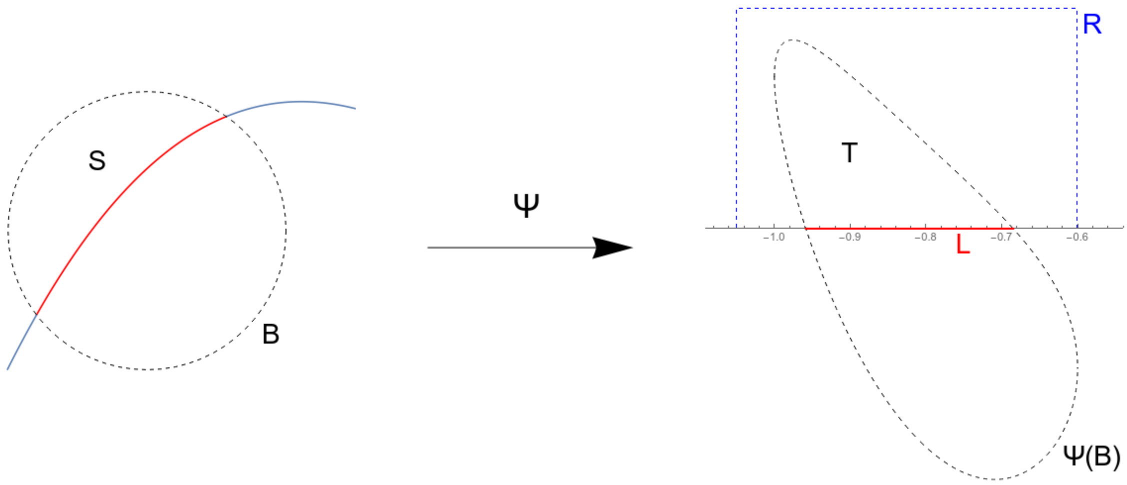
Případ (b) je zajímavější. Předpokládejme, že jsou dány C^1 funkce F_1 a F_2 s nosičem v otevřeném kruhu B a množina $\partial S \cap B$ je grafem C^1 funkce $y = f(x)$, přesněji $\partial S \cap B = \{(x, f(x)) \mid x \in (a,b)\}$ pro nějaká $a < b$. Druhý případ $x = g(y)$ se diskutuje analogicky. Definujme zobrazení $\Psi : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (u,v)$ předpisem

$$\Psi : \quad \begin{aligned} u &= x, \\ v &= y - f(x). \end{aligned}$$

Zobrazení Ψ je invertibilní a pro jeho inverzi $\Phi := \Psi^{-1}$ najdeme

$$\Phi : \quad \begin{aligned} x &= u, \\ y &= v + f(u). \end{aligned}$$

Transformace Ψ zobrazuje množinu B prostě na omezenou oblast v uv-rovině, množinu $\partial S \cap B$ na úsečku L na ose u a $S \cap (\operatorname{supp} F_1 \cup \operatorname{supp} F_2)$ na omezenou oblast T ležící buďto nad, nebo pod úsečkou L podle toho, jestli S leží nad, nebo pod grafem $y = f(x)$. Tedy vzájemná orientace L a T je stejná jako vzájemná orientace ∂S a S, viz Obrázek 25.



Obrázek 25: Ilustrace k důkazu Věty 7.10

Zvolme R 2-interval s jednou stranou obsahující L a takový, že $T \subset R$. Funkce $\tilde{F}_1 := F_1 \circ \Phi$ a $\tilde{F}_2 := F_2 \circ \Phi$ jsou třídy C^1 a jsou nulové na všech třech stranách obdélníku R kromě strany L. Potom máme

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} &= \int_a^b \left[F_1(u, f(u)) + F_2(u, f(u))\, f'(u)\right] \mathrm{d}u = \int_a^b \left[\tilde{F}_1(u,0) + \tilde{F}_2(u,0)\, f'(u)\right] \mathrm{d}u \\ &= \int_L \left(\tilde{F}_1 + f'\tilde{F}_2, \tilde{F}_2\right) \cdot \mathrm{d}s = \int_{\partial R} \left(\tilde{F}_1 + f'\tilde{F}_2, \tilde{F}_2\right) \cdot \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

kde poslední rovnost platí protože $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2 = 0$ na $\partial R \setminus L$. Aplikujeme-li Greenovu větu na obdélník R, dostaneme

$$\int_{\partial S} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_R \left(\frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial v}(u,v) - f'(u)\frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial v}(u,v) \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Podle Věty o derivaci složené funkce je

$$\frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial u}(u,v) - f'(u)\frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial F_2}{\partial x}\left(\Phi(u,v)\right) \quad \text{a} \quad \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial F_1}{\partial y}\left(\Phi(u,v)\right).$$

Všimneme-li si také, že

$$\det D\Phi(u,v) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(u) & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

dostane pomocí Věty o substituci, že

$$\int_{\partial S} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_T \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\left(\Phi(u,v)\right) - \frac{\partial F_1}{\partial y}\left(\Phi(u,v)\right) \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Podobně můžeme dokázat Gaussovu větu pro množiny, jejichž hranici tvoří parametrizovaná C^1 plocha, čímž zde rozumíme parametrizovanou plochu takovou, že pro každý její bod existuje okolí, které je obrazem spojitě diferencovatelného zobrazení dvou proměnných. Na tomto místě již necháme definici takto vágní, neboť Gaussovu větu lze dokázat i pro případ parametrizovaných po částech C^1 ploch (Definice 6.18).

Věta 7.11 (Gauss)**:** Nechť $R \subset \mathbb{R}^3$ je kompaktní množina, jejíž hranice je orientovatelná parametrizovaná C^1 plocha s orientací určenou vnější jednotkovou normálou n. Dále nechť $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je třídy C^1 na otevřené nadmnožině $\Omega \supset R$. Potom platí:

$$\int_{\partial R} (F, n)\,\mathrm{d}S = \int_R \operatorname{div} F\,\mathrm{d}V.$$

Důkaz. Důkaz je velmi podobný důkazu Věty 7.10, a proto už budeme velmi struční. Budeme potřebovat platnost Gaussovy věty pro případ, že je množina R 3-interval, což lze provést jako v důkazu Věty 6.33. Nejprve pomocí rozkladu jednotky ukážeme, že větu stačí dokázat pro pole $F = (F_1, F_2, F_3)$ taková, že buď pro každé $i \in \hat{3}$ je $\operatorname{supp} F_i \subset R^\circ$, nebo $\operatorname{supp} F_i \subset B$, kde B je otevřená koule taková, že $\partial R \cap B$ je graf C^1 funkce, např. $z = f(x,y)$ (ostatní případy analogicky). V prvním ukážeme, že

$$\int_{\partial R} (F, n)\,\mathrm{d}S = \int_R \operatorname{div} F\,\mathrm{d}V = 0$$

stejně jako v důkazu Věty 7.10.

V druhém případě zavedeme na B zobrazení

$$\begin{aligned}\Psi: \quad u &= x,\\ v &= y,\\ w &= z - f(x,y),\end{aligned}$$

které je zřejmě invertibilní a pro jeho inverzi $\Phi := \Psi^{-1}$ máme

$$\begin{aligned}\Phi: \quad x &= u,\\ y &= v,\\ z &= w + f(u,v).\end{aligned}$$

Zobrazení Ψ transformuje B na omezenou oblast v uvw-prostoru a množinu $\partial R \cap B$ na jistou podmnožinu uv-roviny, kterou označíme S (analogie množiny L z důkazu Věty 7.10). Zvolme 3-interval Q v uvw-prostoru takový, že $\Psi(R \cap (\operatorname{supp} F_1 \cup \operatorname{supp} F_2 \cup \operatorname{supp} F_3)) \subset Q$ a jehož jedna strana obsahuje S (analogie množiny R z důkazu Věty 7.10). Definujme $\tilde{F} := F \circ \Phi$.

Jelikož $\partial R \cap B = \{(u,v,f(u,v)) \mid (u,v) \in S\}$, dostaneme

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} (F,n)\,\mathrm{d}S &= \pm \int_S \left(-\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\tilde{F}_1(u,v,0) - \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\tilde{F}_2(u,v,0) + \tilde{F}_3(u,v,0)\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &= \int_{\partial Q} (H, \pm e_3)\,\mathrm{d}S,\end{aligned}$$

kde

$$H(u,v,w) := \left(0, 0, -\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\tilde{F}_1(u,v,w) - \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\tilde{F}_2(u,v,w) + \tilde{F}_3(u,v,w)\right).$$

Zde je $\pm$ znaménko $+$, nebo $-$ v závislosti na tom, zda je plocha $\partial R \cap B$ pod, nebo nad R, nebo-li je-li vnější normálou Q na S vektor e_3, nebo $-e_3$. Aplikujeme-li Gaussovu větu na 3-interval Q, dostaneme

$$\int_{\partial S} (F,n)\,\mathrm{d}S = \int_Q \operatorname{div} H\,\mathrm{d}V = \int_Q \left(-\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial w} + \frac{\partial \tilde{F}_3}{\partial w}\right) \mathrm{d}V.$$

Podle řetězového pravidla máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial u}(u,v,w) &= \frac{\partial F_1}{\partial x}\left(\Phi(u,v,w)\right) + \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial F_1}{\partial z}\left(\Phi(u,v,w)\right),\\ \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial v}(u,v,w) &= \frac{\partial F_2}{\partial y}\left(\Phi(u,v,w)\right) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial F_2}{\partial z}\left(\Phi(u,v,w)\right),\\ \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial w}(u,v,w) &= \frac{\partial F_i}{\partial z}\left(\Phi(u,v,w)\right), \quad \forall i \in \hat{3},\end{aligned}$$

a tak dostáváme rovnost

$$\int_{\partial S} (F, n) \, \mathrm{d}S = \int_Q \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \circ \Phi - \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \circ \Phi - \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \circ \Phi \right) \mathrm{d}V.$$

Jelikož jsou funkce $\tilde{F}_1$ a $\tilde{F}_2$ nulové na vertikálních stěnách Q, zjistíme integrací v proměnné u, resp. v, že

$$\int_Q \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial u} \, \mathrm{d}V = \int_Q \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial v} \, \mathrm{d}V = 0.$$

Nakonec jelikož je $\det D\Phi = 1$, máme podle Věty o substituci

$$\int_{\partial S} (F, n) \, \mathrm{d}S = \int_Q \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \circ \Phi + \frac{\partial F_2}{\partial y} \circ \Phi + \frac{\partial F_2}{\partial z} \circ \Phi \right) \mathrm{d}V = \int_Q \operatorname{div} F \circ \Phi \, \mathrm{d}V = \int_R \operatorname{div} F \, \mathrm{d}V.$$

$\square$

Poznámka: Na závěr poznamenejme, že zde použité myšlenky jsou elegantní a méně technické, jsou-li převedené do přirozeného jazyka diferenciálních forem [24].