2 Topologické a metrické prostory

2.1 Úvod

Jako motivaci pro následující definice uvažujme jednoduchý příklad množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Na $\mathbb{R}$ zavádíme absolutní hodnotu $|x|$ čísla $x \in \mathbb{R}$ obvyklým způsobem. Absolutní hodnotu $|x|$ můžeme chápat jako *velikost* prvku $x \in \mathbb{R}$. Absolutní hodnota je také zobrazení $|\cdot| : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ s vlastnostmi:

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \alpha \in \mathbb{R})(|\alpha x| = |\alpha||x|)$,
2. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(|x + y| \leq |x| + |y|)$,
3. $(\forall x \in \mathbb{R})(|x| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0)$,

které je jednoduché ověřit.

Axiomatizací vlastností 1.-3. dostaneme známou definici *normy* jako abstrakci *velikosti* prvku lineárního prostoru.

Definice 2.1 (Norma)**:** Buď V lineární prostor nad $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Zobrazení $\| \cdot \| : V \to [0, \infty)$ s vlastnostmi:

1. $(\forall x \in V)(\forall \alpha \in \mathbb{R}\,(\text{resp. } \mathbb{C}))(\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|)$,
2. $(\forall x, y \in V)(\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|)$, (tzv. *trojúhelníková nerovnost*)
3. $(\forall x \in V)(\|x\| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0)$,

nazýváme *norma* na V a uspořádanou dvojici $(V, \| \ \|)$ *normovaný prostor*.

Poznámka: 1. Prostor V z definice normy musí být lineární, protože musí být jasné, co je součet $x + y$ a součin αx pro elementy $x, y \in V$ a číslo α. To už nebude třeba pro obecnější prostory metrické a topologické.
2. Zobrazení $\| \cdot \| : V \to [0, \infty)$ splňující 1. a 2. se nazývá *seminorma* na V.

Příklad 2.2: Příklady normovaných prostorů:

1. Na $V = \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) definujeme tzv. p-normu

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, & \text{pro } p \in [1, \infty), \\ \max\limits_{i \in \hat{n}} |x_i|, & \text{pro } p = \infty, \end{cases}$$

kde $x \in V$. Normy $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ a $\|x\|_\infty$ se někdy nazývají po řadě *součtová*, *euklidovská* a *maximová*.

2. Podobně lze zavést na prostoru spojitých funkcí $C([a,b])$ na intervalu $[a,b]$ p-normy

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{1/p} \mathrm{d}x, & \text{pro } p \in [1,\infty), \\ \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|, & \text{pro } p = \infty, \end{cases}$$

kde $f \in C([a,b])$.

Ukázat, že normy $\|\cdot\|_p$ pro $p \in (1,\infty)$ splňují trojúhelníkovou nerovnost, není triviální a my si ji dokážeme až mnohem později v obecnější podobě, viz Věta 5.84 a také Cvičení 2.2 a 2.3. Ve speciálním případě $p = 2$ lze využít toho, že $\|\cdot\|_2$ je indukována euklidovským skalárním součinem, tzn. $\|x\|_2 = \sqrt{(x,x)}$ a použít k důkazu trojúhelníkové nerovnosti známou Schwarzovu nerovnost (Cvičení 2.2).

V důkazu implikace $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ je podstatný předpoklad spojitosti funkce f. Všimněte si, že pokud bychom prostor $C([a,b])$ nahradili (větším) prostorem Riemannovsky integrabilních funkcí na $[a,b]$, implikace už by neplatila a $\|\cdot\|_p$ by byla pouze semi-norma.

Vraťme se k příkladu reálných čísel. Vzdálenost mezi dvěma reálnými čísly x a y je rovna $\rho(x,y) := |x-y|$. Vzdálenost dvou elementů z $\mathbb{R}$ můžeme tedy chápat jako zobrazení $\rho : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0,\infty)$, které má navíc tyto vlastnosti:

1. $(\forall x,y \in \mathbb{R})(\rho(x,y) = \rho(y,x))$,
2. $(\forall x,y,z \in \mathbb{R})(\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z))$,
3. $(\forall x,y \in \mathbb{R})(\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$.

Abstrahujeme-li od $\mathbb{R}$ k libovolné neprázdné množině X, pak axiomatizací vlastností 1.-3. dostaneme definici *metriky* jako abstrakci *vzdálenosti* dvou elementů z X.

Definice 2.3 (Metrika)**:** Buď $X \neq \emptyset$ množina. Zobrazení $\rho : X\times X \to [0,\infty)$ splňující

1. $(\forall x,y \in X)(\rho(x,y) = \rho(y,x))$, (tzv. *symetrie*)
2. $(\forall x,y,z \in X)(\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z))$, (tzv. *trojúhelníková nerovnost*)
3. $(\forall x,y \in X)(\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$,

nazýváme *metrika* na X a uspořádanou dvojici (X,ρ) *metrický prostor.*

Je-li X speciálně lineární prostor vybavený normou $\|\cdot\|$, potom je zobrazení

$$\rho(x,y) := \|x-y\|$$

metrikou na X (ověřte). O takové metrice říkáme, že je *indukovaná normou.* Příklad 2.2 nám proto ihned dává následující příklady metrik.

Příklad 2.4: Pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) je

$$\rho_p(x,y) := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}, & \text{pro } p \in [1,\infty), \\ \max_{i \in \hat{n}} |x_i - y_i|, & \text{pro } p = \infty, \end{cases}$$

metrika (indukovaná normou $\|\cdot\|_p$) na $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$). Podobně pro $f, g \in C([a,b])$ je

$$\rho_p(f,g) := \begin{cases} \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}, & \text{pro } p \in [1,\infty), \\ \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|, & \text{pro } p = \infty, \end{cases}$$

je metrika na $C([a,b])$.

Existují ovšem metriky, které nejsou indukovány žádnou normou.

Příklad 2.5 (Diskrétní metrika)**:** Na lib. $X \neq \emptyset$ lze vždy zavést tzv. *diskrétní metrika*:

$$\rho_d(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{je-li } x \neq y, \\ 0, & \text{je-li } x = y. \end{cases}$$

Je-li X lineární prostor s alespoň dvěma různými prvky, tj. $|X| \geq 2$, není ρ_d indukována žádnou normou na X. Předpokládejme, že naopak existuje norma $\|\cdot\|$ na X taková, že

$$\rho_d(x,y) = \|x - y\|$$

pro všechna $x, y \in X$. Z vlastností normy by potom metrika ρ_d musela splňovat

$$\rho_d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha|\|x - y\| = |\alpha|\rho_d(x,y)$$

pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) a $x, y \in X$. Pokud je $x \neq y$, dostaneme z definice ρ_d, že $|\alpha| = 1$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), což je spor.

Můžeme-li měřit vzdálenosti mezi prvky množiny. Můžeme měřit také vzdálenost množin a mluvit o omezených množinách.

Definice 2.6: Buď (X, ρ) metrický prostor a $\emptyset \neq A, B \subset X$. Číslo

$$d(A,B) := \inf\{\rho(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$$

nazýváme *vzdáleností množin* A a B. Dále číslo

$$\operatorname{diam} A := \sup\{\rho(x,y) \mid x, y \in A\}$$

nazýváme *průměr* množiny A. Pro prázdnou množinu klademe $\operatorname{diam} \emptyset := 0$. Řekneme, že A je *omezená*, právě když $\operatorname{diam} A < \infty$.

Poznámka: 1. Je-li $|X| \geq 2$, zobrazení d není metrika na potenční množině 2^X, ať už dodefinujeme $d(A, B)$ jakkoliv pro $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$, neboť z $d(A, B) = 0$ neplyne $A = B$.
2. Pokud $A \subset B$, potom $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} B$.

Abychom se postupně dostali k obecnému topologickému prostoru, potřebuje si ujasnit pojem *otevřená množina* v metrickém prostoru. K tomu si nejprve zavedeme pojem *koule* v metrickém prostoru.

Definice 2.7: Buď (X, ρ) metrický prostor, $x \in X$ a $r > 0$. Množinu

$$B_x(r) := \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$$

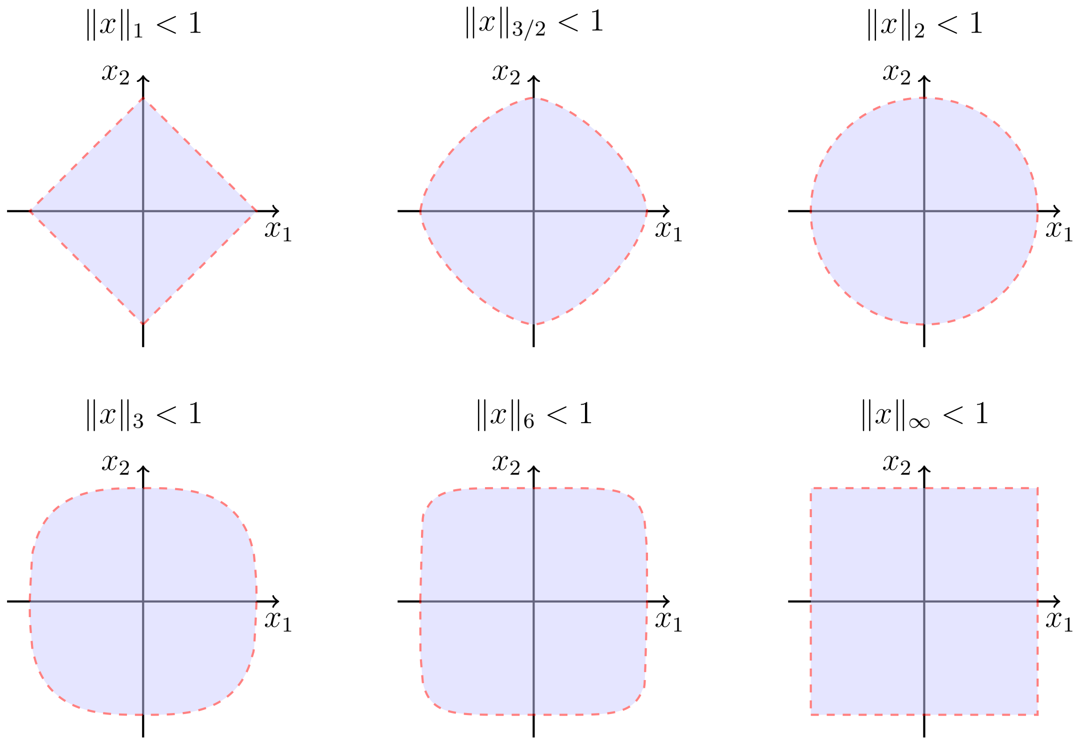
nazveme *(otevřenou) koulí* se středem v x a poloměrem r nebo stručněji r*-koulí* se středem v x.

Poznámka: Množina $B_x(r)$ se také někdy nazývá r*-okolím* bodu x.

Příklad 2.8: Uvažujme $X = \mathbb{R}^2$ s metrikou indukovanou p-normou $\|.\|_p$, kde $p \geq 1$. Potom 1-koule se středem v 0 je množina

$$B_0(1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p < 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1|^p + |x_2|^p < 1\}.$$

Tvar množin $B_0(1)$ pro několik hodnot p je na Obrázku 4.



Obrázek 4: Příklady 1-koulí se středem v 0 v $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ pro několik hodnot p.

Definice 2.9: Buď (X, ρ) metrický prostor. Řekneme, že množina $A \subset X$ je *otevřená*, pokud

$$(\forall x \in A)(\exists r > 0)(B_x(r) \subset A).$$

Tzn., že s každým bodem $x \in A$ leží v A také nějaká koule se středem v x. Množinu $B \subset X$ nazveme *uzavřenou*, právě když $X \setminus B$ je otevřená.

Příklad 2.10: Uvažujme $X = \mathbb{R}^2$ s metrikou indukovanou p-normou $\|\cdot\|_p$ pro nějaké $1 \leq p \leq \infty$. Množina $A = (0,1) \times (0,1)$ (otevřený čtverec) je otevřená v $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$. Množina $B = [0,1] \times [0,1]$ (uzavřený čtverec) je uzavřená v $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$. Množina $C = [0,1) \times [0,1)$ není ani otevřená, ani uzavřená v $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$.

Věta 2.11: Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $x \in X$ a $r > 0$. Potom $B_x(r)$ je otevřená.

Důkaz. Buď $y \in B_x(r)$ libovolné ale fixní. Ukážeme, že $\exists r' > 0$ tak, že $B_y(r') \subset B_x(r)$. Položme $r' := r - d > 0$, kde $d := \rho(x, y) < r$. Je-li $z \in B_y(r')$, plyne z trojúhelníkové nerovnosti

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) < d + r' = r.$$

Tzn, že $z \in B_x(r)$. $\square$

Následující vlastnosti se ukáží jako klíčové pro axiomatickou definici otevřené množiny v obecných prostorech **bez** metriky.

Věta 2.12: V metrickém prostoru (X, ρ) platí:

1. $\emptyset$ a X jsou otevřené.
2. Je-li $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \ldots, A_n \subset X$ otevřené, pak $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ je otevřená množina.
3. Je-li $I \neq \emptyset$ indexová množina lib. mohutnosti a $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset X$ otevřené, potom $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha$ je otevřená.

Důkaz. Tvzení 1. je triviální.

2. Předpokládejme, že $A_1, \ldots, A_n \subset X$ jsou otevřené. Nechť $x \in A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Potom $x \in A_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Z otevřenosti množin A_i plyne, že $\exists r_i > 0$ tak, že $B_x(r_i) \subset A_i$. Položíme-li $r := \min_{i \in \hat{n}} r_i > 0$ je

$$(\forall i \in \hat{n})(B_x(r) \subset A_i),$$

neboli

$$B_x(r) \subset A_1 \cap \cdots \cap A_n.$$

Z toho plyne, že $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ je otevřená.

3. Předpokládejme, že $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset X$ jsou otevřené. Nechť $x \in \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Potom $\exists \alpha_0 \in I$ tak, že $x \in A_{\alpha_0}$. Protože je A_{α_0} otevřená, existuje $r > 0$ tak, že

$$B_x(r) \subset A_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

Tedy $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha$ je otevřená. $\square$

Vidíme, že máme-li metriku na X, máme také systém otevřených podmnožin X, pro který platí tvrzení 1.-3. z Věty 2.12. Axiomatizací vlastností 1.-3. dostaneme abstraktní definici systému otevřených množin a dostaneme tak nejobecnější strukturu, kterou se budeme zabývat - *topologický prostor*.

2.2 Topologie

Definice 2.13 (Topologie)**:** Nechť $X \neq \emptyset$. Systém množin $\tau \subset 2^X$ splňující

1. $\emptyset, X \in \tau$,
2. $(\forall n \in \mathbb{N}), (\forall i \in \hat{n}, A_i \in \tau \;\Rightarrow\; \cap_{i=1}^{n} A_i \in \tau)$,
3. $(\forall I \neq \emptyset)(\forall \alpha \in I, A_\alpha \in \tau \;\Rightarrow\; \cup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau)$,

nazýváme *topologie* na X a uspořádanou dvojici (X, τ) *topologický prostor*. Prvky $A \in \tau$ se nazývají *otevřené množiny*.

Poznámka: 1. Pojem *otevřená množina* z Definice 2.13 je vždy svázán s konkrétní topologií a zobecňuje pojem otevřená množina v metrickém prostoru z Definice 2.9.
2. Skutečně je-li (X, ρ) metrický prostor a

$$\tau_\rho := \{A \subset X \mid A \text{ otevřená podle Definice 2.9}\},$$

plyne z Věty 2.12, že τ_ρ je topologie na X. Topologie τ_ρ se nazývá *topologie indukovaná metrikou ρ*. Na druhou stranu ne každá topologie je indukovaná nějakou metrikou, viz Příklad 2.14.
3. Dostáváme tedy hierarchii striktních vložení

$$(X, \|\cdot\|) \prec (X, \rho) \prec (X, \tau).$$

Navíc víme z lineární algebry, že skalární součin indukuje normu na lineárním prostoru, můžeme si proto hierarchii ještě rozšířit o pre-Hilbertův prostor

$$(X, (\cdot,\cdot)) \prec (X, \|\cdot\|) \prec (X, \rho) \prec (X, \tau).$$

Následující dva příklady ukazují dva extrémy, kdy jsou otevřené pouze množiny $\emptyset$ a X, nebo všechny podmnožiny X.

Příklad 2.14 (Triviální topologie)**:** Na lib. $X \neq \emptyset$ lze zavést *triviální topologii* $\tau_0 := \{\emptyset, X\}$.

Pokud je $|X| \geq 2$, není τ_0 indukována žádnou metrikou. Pro spor předpokládejme naopak, že existuje metrika ρ na X indukující τ_0. Zvolme $x, y \in X$, $x \neq y$ a označme $r := \rho(x, y) > 0$. Potom $x \in B_x(r/2)$, ale $y \notin B_x(r/2)$. Tzn., že $\emptyset \neq B_x(r/2) \neq X$, a tedy $B_x(r/2)$ není v topologii τ_0. Na druhou stranu podle Věty 2.11 je $B_x(r/2)$ otevřená, což je spor.

Příklad 2.15 (Diskrétní topologie)**:** Na lib. $X \neq \emptyset$ lze zavést *diskrétní topologii* $\tau_d := 2^X$. Topologie τ_d je indukována diskrétní metrikou na ρ_d na X (Cvičení 2.7).

Příklad 2.16 (Obvyklá topologie na $\mathbb{R}^n$)**:** Topologii na $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, indukovanou euklidovskou metrikou $\rho_2(x, y) = \|x - y\|_2$ pro $x, y \in \mathbb{R}^n$, budeme stručně nazývat *obvyklou* topologií na $\mathbb{R}^n$.

Definice 2.17: Buď (X, τ) topologický prostor a $x \in X$. Libovolnou množinu $A \in \tau$, která obsahuje x, nazveme *(otevřeným) okolím* x a budeme ji značit H_x.

Věta 2.18: Buď (X, τ) topologický prostor a $A \subset X$. Potom $A \in \tau$, právě tehdy když

$$(\forall x \in A)(\exists H_x)(H_x \subset A).$$

Důkaz. Implikace $(\Rightarrow)$ je triviální, neboť za H_x lze vzít samotnou množinu A.

Dokážeme implikaci $(\Leftarrow)$. Z předpokladu $(\forall x \in A)(\exists H_x)(H_x \subset A)$ plyne

$$A = \bigcup_{x \in A} H_x.$$

Inkluze $A \subset \cup_{x \in A} H_x$ je zřejmě pravdivá. Naopak, je-li $y \in \cup_{x \in A} H_x$, existuje $x \in A$ tak, že $y \in H_x \subset A$. Platí tedy i opačná inkluze $A \supset \cup_{x \in A} H_x$. K dokončení důkazu stačí uvážit, že podle definice okolí je $H_x \in \tau$ pro každé $x \in X$. Vlastnost 3. z definice topologie potom implikuje

$$A = \bigcup_{x \in A} H_x \in \tau.$$

□

Uzavřenou množinu definujeme jako doplněk do otevřené množiny.

Definice 2.19 (Uzavřená množina, kotopologie)**:** Buď (X, τ) topologický prostor. Množinu $A \subset X$ nazveme ***uzavřenou***, právě když $X \setminus A \in \tau$. Systém všech uzavřených množin nazýváme *kotopologie* a značíme $c\tau$.

Příklad 2.20: Uvažujme $X = \mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Potom, je-li $a \leq b$, je uzavřený interval

$$[a, b] = \mathbb{R} \setminus ((-\infty, a) \cup (b, \infty))$$

uzavřenou množinou.

Věta 2.21: Buď (X, τ) topologický prostor. Potom platí:

1. $\emptyset, X \in c\tau$,
2. $(\forall n \in \mathbb{N}), (\forall i \in \hat{n}, A_i \in c\tau \;\Rightarrow\; \cup_{i=1}^{n} A_i \in c\tau)$,
3. $(\forall I \neq \emptyset)(\forall \alpha \in I, A_\alpha \in c\tau \;\Rightarrow\; \cap_{\alpha \in I} A_\alpha \in c\tau)$,

Důkaz. Připomeňme *de Morganovy zákony*, které dávají do souvislosti průnik, sjednocení a doplněk množin $A, B \subset X$:

$$(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B),$$
$$(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = X \setminus (A \cup B).$$

Důkaz tvrzení potom přímo plyne z vlastností topologie a vztahů:

1.
$$X = X \setminus \emptyset \quad \text{a} \quad \emptyset = X \setminus X,$$

2.
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus A_i) \right),$$

3.
$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha) \right).$$

□

Poznámka: 1. Místo z množin otevřených bychom mohli vyjít z množin uzavřených, axiomatizovat vlastnosti 1.-3. z Věty 2.21 a definovat kotopologii místo topologie. Budovali bychom tím ale v podstatě tutéž teorii.
2. Nekonečný průnik otevřených množin obecně není otevřená množina. Podobně nekonečné sjednocení množin uzavřených nemusí být uzavřená množina (najděte příklady). V topologii se množiny, které jsou *spočetným* průnikem otevřených, resp. *spočetným* sjednocením uzavřených množin nazývají G_δ, resp. F_σ množiny. Toto zvláštní značení odkazuje na francouzské a německé výrazy:

F_σ :	$F =$ „Fermé" $=$ uzavřený,	$\sigma =$ „somme" $=$ suma/sjednocení,
G_δ :	$G =$ „Gebiet" $\approx$ okolí (otev.),	$\delta =$ „durchschnitt" $=$ průnik.

Jednou z obvyklých a užitečných metod, jak zadat topologii na množině, je pomocí báze.

Definice 2.22 (Báze)**:** Systém množin $\beta \subset \tau$ nazýváme *bází* topologického prostoru (X, τ) (též *bází* topologie τ), právě když každá množina $A \in \tau$ je sjednocením nějakých množin z β.

Poznámka: Přijímáme konvenci, že prázdné sjednocení množin je $\emptyset$. Proto i $\emptyset$ je sjednocením (nula) množin z β a to i v případě, že $\emptyset \notin \beta$.

Samozřejmě každý topologický prostor má bázi, neboť lze triviálně položit $\beta := \tau$. Protože $\tau = \{\cup\gamma \mid \gamma \subset \beta\}$, je topologie určena svojí bází jednoznačně. Naopak jeden topologický prostor může mít více bází.

Příklad 2.23: Uvažujme $X = \mathbb{R}$ s obvyklou topologií τ. Množina otevřených intervalů $\{(a, b) \mid a < b\}$ je bází τ. Jiný příklad (spočetné) báze τ je množina otevřených intervalů s racionálními krajními body $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$.

Příklad 2.24: V topologii metrického prostoru (X, ρ) je systém otevřených koulí $\{B_x(r) \mid x \in X, r > 0\}$ bází.

Věta 2.25: Nechť (X, τ) je topologický prostor. Systém množin $\beta \subset 2^X$ je báze (X, τ), právě když $\beta \subset \tau$ a $(\forall x \in X)(\forall H_x)(\exists B \in \beta)(x \in B \subset H_x)$.

Důkaz. Nechť β je báze τ, $x \in X$ a H_x okolí x. Protože $H_x \in \tau$, musí být H_x sjednocením množin z β, tedy

$$H_x = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha,$$

kde $B_\alpha \in \beta$ pro všechna $\alpha \in I$ a $I \neq \emptyset$ je indexová množina. Protože

$$x \in H_x = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha,$$

existuje $\alpha_0 \in I$ tak, že $x \in B_{\alpha_0}$. Položíme-li $B := B_{\alpha_0}$, máme $B \in \beta$ a $x \in B \subset H_x$.

Naopak předpokládejme, že je dán systém $\beta \subset \tau$ splňující $(\forall x \in X)(\forall H_x)(\exists B \in \beta)(x \in B \subset H_x)$. Ukážeme, že β je báze τ. Nechť $A \in \tau$. Potom k lib. $x \in A$ existuje $H_x \subset A$. Odtud plyne

$$A = \bigcup_{x \in A} H_x.$$

Z předpokladu dále víme, že ke každému H_x existuje $B = B_x \in \beta$ tak, že $x \in B_x \subset H_x$. Potom platí

$$A = \bigcup_{x \in A} B_x,$$

neboli A je sjednocením množin z β. □

Následující věta zcela odpovídá na otázku, jaké systémy podmnožin X mohou být bází topologie.

Věta 2.26: Je-li β bází topologického prostoru (X, τ), potom platí:

1. $\cup\beta = X$,
2. $(\forall A, B \in \beta)(\forall x \in A \cap B)(\exists C \in \beta)(x \in C \subset A \cap B)$.

Naopak, je-li $\beta \subset 2^X$ s vlastnostmi 1. a 2., potom je $\tau_\beta = \{\cup\gamma \mid \gamma \subset \beta\}$ topologie na X a β její báze.

Důkaz. Nechť β je báze topologie τ. Potom 1. platí, neboť $X \in \tau$. K ověření 2. mějme $A, B \in \beta$ a $x \in A \cap B$. Protože $\beta \subset \tau$, je množina $A \cap B \in \tau$, a tedy okolím x. Potom z Věty 2.25 vyplývá, že existuje $C \in \beta$ taková, že $x \in C \subset A \cap B$.

Předpokládejme naopak, že systém $\beta \subset 2^X$ má vlastnosti 1. a 2. Ukážeme, že $\tau_\beta = \{\cup\gamma \mid \gamma \subset \beta\}$ je topologie na X. Triviálně máme $\emptyset \in \tau_\beta$ a podle vlastnosti 1. také $X \in \tau_\beta$.

Ukážeme, že τ_β je uzavřený na lib. sjednocení. Dále budou řecká písmena α, α', μ označovat indexy z nějakých neprázdných indexových množin, které pro stručnost nebudeme explicitně vyznačovat. Mějme tedy $\{A_\alpha\}_\alpha \subset \tau_\beta$. Podle definice τ_β existují ke každému α množiny $B_\mu^{(\alpha)} \in \beta$ tak, že

$$A_\alpha = \bigcup_\mu B_\mu^{(\alpha)}.$$

Potom
$$\bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha \bigcup_\mu B_\mu^{(\alpha)},$$
neboli množina $\cup_\alpha A_\alpha$ je sjednocením množin z β, a proto $\cup_\alpha A_\alpha \in \tau_\beta$.

Nakonec ověříme, že τ_β je uzavřený na konečné průniky. Stačí ukázat implikaci
$$A, B \in \tau_\beta \;\Rightarrow\; A \cap B \in \tau_\beta.$$
Nejprve si všimněme, že pokud $B_1, B_2 \in \beta$, potom $B_1 \cap B_2 \in \tau_\beta$. Buďto totiž $B_1 \cap B_2 = \emptyset \in \tau_\beta$, nebo $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, a potom podle tvrzení 2. $(\forall x \in B_1 \cap B_2)(\exists C_x \in \beta)(x \in C_x \subset B_1 \cap B_2)$, z čehož plyne
$$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} C_x.$$
Tedy $B_1 \cap B_2 \in \tau_\beta$.

Jsou-li $A, B \in \tau_\beta$, potom
$$A = \bigcup_\alpha B_\alpha \quad \text{a} \quad B = \bigcup_{\alpha'} B_{\alpha'}$$
pro nějaké $\{B_\alpha\}_\alpha, \{B_{\alpha'}\}_{\alpha'} \subset \beta$. Proto lze průnik $A \cap B$ vyjádřit jako
$$A \cap B = \bigcup_\alpha B_\alpha \cap \bigcup_{\alpha'} B_{\alpha'} = \bigcup_{\alpha, \alpha'} B_\alpha \cap B_{\alpha'}.$$
Podle pozorování výše je $B_\alpha \cap B_{\alpha'} \in \tau_\beta$ pro každé α a α'. Protože už víme, že systém τ_β je uzavřený na lib. sjednocení, dostáváme konečně $A \cap B \in \tau_\beta$. □

Ještě jeden způsob, jak na množině zavést topologii, je velice obvyklý. Stačí předepsat dostatečně bohatý systém okolí každého bodu.

Definice 2.27 (Lokální báze)**:** Buď (X, τ) topologický prostor a $x \in X$. Systém okolí β_x bodu x nazveme *lokální bází v* x prostoru (X, τ), pokud platí $(\forall H_x)(\exists B \in \beta_x)(B \subset H_x)$.

Příklad 2.28: Uvažujme $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Potom systém
$$\beta_x = \{(x - \epsilon, x + \epsilon) \mid \epsilon > 0\}$$
je příklad lokální báze v $x \in \mathbb{R}$. Jiná lokální báze v x je např.
$$\tilde{\beta}_x = \{(x - 2\epsilon, x + 3\epsilon) \mid \epsilon > 0\}.$$

Mezi pojmy báze a lokální báze je úzká souvislost.

Věta 2.29: Nechť je pro každý bod x topologického prostoru (X, τ) dána lokální báze β_x. Potom jejich sjednocení $\cup_{x \in X} \beta_x$ je bází (X, τ). Naopak, je-li β báze (X, τ) a $x \in X$, potom $\beta_x := \{B \in \beta \mid x \in B\}$ je lokální bází v x.

Důkaz. Vyplývá okamžitě z příslušných definic a je přenechán čtenáři jako Cvičení 2.8. □

Je-li $X \neq \emptyset$ daná množina, můžeme zavést na X topologii tak, že ke každému bodu $x \in X$ definujeme neprázdný systém množin $\beta_x \subset 2^X$, kde každá množina z β_x obsahuje x a navíc má β_x vlastnost:

$$(\forall A, B \in \beta_x)(\exists C \in \beta_x)(C \subset A \cap B).$$

Potom je totiž zaručena vlastnost 2. z Věty 2.26 pro systém $\beta := \cup_{x \in X} \beta_x$ (vlastnost 1. platí také), a proto je β bází topologie $\tau_\beta = \{\cup\gamma \mid \gamma \subset \beta\}$ a β_x lokální bází v x topologického prostoru (X, τ_β).

Tento způsob zavedení topologie na X předepsáním „dostatečně bohatých okolí“ všech bodů je velmi častý. Např. systém intervalů β_x z Příkladu 2.28 definuje obvyklou topologii na $\mathbb{R}$. Další příklady zavedení topologie pomocí lokálních bází najde čtenář ve Cvičeních 2.17 a 2.23.

Definice 2.30 (Vnitřek)**:** Buď (X, τ) topologický prostor a $A \subset X$. Největší otevřená podmnožina A (ve smyslu inkluze) se nazývá *vnitřek* A a značí A°, tzn.

$$A^\circ := \bigcup_{B \subset A, B \in \tau} B.$$

Bod $x \in A^\circ$ se nazývá *vnitřní bod* A.

Vlastnosti vnitřku množiny shrneme v následujícím tvrzení.

Věta 2.31: Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A, B \subset X$. Potom platí:

1. $A^\circ \subset A$ a $A^\circ \in \tau$,
2. $x \in A^\circ \;\Leftrightarrow\; (\exists H_x)(H_x \subset A)$,
3. $A \in \tau \;\Leftrightarrow\; A = A^\circ$,
4. $(A^\circ)^\circ = A^\circ$,
5. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$,
6. $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$,
7. $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$.

Poznámka: Rovnost v tvrzení 6. neplatí, viz Cvičení 2.10.

Důkaz Věty 2.31. Ověřit vlastnosti 1.-7. je jednoduché cvičení. Ověříme jen tvrzení 2.-5., zbytek je obsahem Cvičení 2.9.

2. Je-li $x \in A^\circ$, potom můžeme položit $H_x := A^\circ$ a tvrzení platí podle 1. Naopak předpokládejme, že existuje $H_x \subset A$. Protože $H_x \in \tau$, je okolí H_x jednou z množin B z definice vnitřku:

$$x \in H_x \subset \bigcup_{B \subset A, B \in \tau} B = A^\circ.$$

3. Je-li $A \in \tau$, je A jednou z množin B z definice A°, a proto $A \subset A^\circ$. A protože také $A^\circ \subset A$, máme $A^\circ = A$. Naopak, pokud

$$A = A^\circ = \bigcup_{B \subset A, B \in \tau} B,$$

je $A \in \tau$ podle 3. axiomu z definice topologie.

4. Využijeme-li již dokázané tvrzení 3., platí $(A^\circ)^\circ = A^\circ$, právě když $A^\circ \in \tau$, což platí podle 1.

5. Podle 2. je $x \in (A \cap B)^\circ$, právě když existuje H_x tak, že $H_x \subset A \cap B$. Neboli $H_x \subset A$ a současně $H_x \subset B$. To je opět podle 2. ekvivalentní tvrzení $x \in A^\circ$ a současně $x \in B^\circ$, neboli $x \in A^\circ \cap B^\circ$. □

Definice 2.32 (Uzávěr)**:** Buď (X, τ) topologický prostor a $A \subset X$. Nejmenší uzavřená nadmnožina A (ve smyslu inkluze) se nazývá *uzávěr* A a značí $\overline{A}$, tzn.

$$\overline{A} := \bigcap_{A \subset C, C \in c\tau} C.$$

Příklad 2.33: V prostoru $X = \mathbb{R}^2$ s obvyklou topologií uvažujme množinu $A = [0,1) \times [0,1)$. Potom $A^\circ = (0,1) \times (0,1)$ a $\overline{A} = [0,1] \times [0,1]$.

Věta 2.34: Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A, B \subset X$. Potom platí:

1. $A \subset \overline{A}$ a $\overline{A} \in c\tau$,
2. $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ$,
3. $x \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; (\forall H_x)(H_x \cap A \neq \emptyset)$,
4. $A \in c\tau \;\Leftrightarrow\; A = \overline{A}$,
5. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,
6. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
7. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$,
8. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

Poznámka: Rovnost v tvrzení 7. neplatí, viz Cvičení 2.12.

Důkaz Věty 2.34. Ověříme jen tvrzení 2.,3. a 6., zbytek si čtenář dokáže sám jako Cvičení 2.11.

2. Aplikací de Morganových zákonů dostaneme

$$X \setminus \overline{A} = X \setminus \bigcap_{A \subset C \in c\tau} C = \bigcup_{A \subset C \in c\tau} X \setminus C.$$

Přejdeme-li k doplňkům, můžeme psát

$$X \setminus \overline{A} = \bigcup_{X\setminus A \supset B, B\in\tau} B = (X \setminus A)^\circ,$$

z čehož dostáváme rovnost $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ$.

3. S využitím již dokázaného tvrzení 2. a také negací tvrzení 2. z Věty 2.31 dostáváme řetězec ekvivalencí:

$$x \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; x \notin (X \setminus A)^\circ \;\Leftrightarrow\; (\forall H_x)(H_x \cap A \neq \emptyset).$$

6. Můžeme použít již dokázanou identitu z bodu 2., de Morganovy zákony a tvrzení 5. z Věty 2.31. Tak dostaneme

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= X \setminus (X \setminus (A \cup B))^\circ = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B))^\circ = X \setminus ((X \setminus A)^\circ \cap (X \setminus B)^\circ)\\ &= (X \setminus (X \setminus A)^\circ) \cup (X \setminus (X \setminus B)^\circ) = \overline{A} \cup \overline{B}.\end{aligned}$$

□

Definice 2.35 (Hranice)**:** Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A \subset X$. Množinu $\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ$ nazýváme *hranicí* množiny A.

Příklad 2.36: Uvažujme $X = \mathbb{R}^2$ s obvyklou topologií a $A = [0, 1) \times (0, 1]$. Potom $\partial A = [0, 1] \times \{0, 1\} \cup \{0, 1\} \times [0, 1]$ (hranice čtverce).

Další příklad ukazuje, že hranice A nemusí být zcela intuitivní (ostatně jako i jiné pojmy z topologie) a může být dokonce nadmnožinou A.

Příklad 2.37: Uvažujme $X = \mathbb{R}$ s obvyklou topologií a množinu racionálních čísel $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Budeme potřebovat jednu vlastnost $\mathbb{Q}$, totiž že pro lib. $a < b$ obsahuje interval (a, b) nějaké racionální i iracionální číslo, kterou na tomto místě přijmeme jako známý fakt.

Nejprve si uvědomme, že $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$. Kdyby totiž existoval prvek $x \in \mathbb{Q}^\circ$, potom by muselo existovat $\epsilon > 0$, takové, že $B_x(\epsilon) = (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset \mathbb{Q}$, což uvedené tvrzení vylučuje. Z uvedené vlastnosti $\mathbb{Q}$ také plyne, že v libovolném okolí jakéhokoliv reálného čísla, leží nějaké racionální číslo, tj. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \epsilon > 0)(\exists q \in \mathbb{Q})(q \in B_x(\epsilon))$. Proto je $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Tudíž $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$, neboli hranicí racionálních čísel jsou čísla reálná.

Věta 2.38: Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A, B \subset X$. Potom platí:

1. $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A = A \cup \partial A$,
2. $\partial A = X \setminus (A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ a odtud speciálně plyne, že $\partial A \in c\tau$,
3. $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$,
4. $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$.

Poznámka: V tvrzeních 3. a 4. neplatí rovnost, viz Cvičení 2.14.

Důkaz Věty 2.38. Tvrzení 1. je triviální. Tvrzení 3. a 4. si dokáže čtenář jako Cvičení 2.14.

Tvrzení 2. plyne z definice hranice, tvrzení 2. Věty 2.34 a de Morganových zákonů, neboť máme

$$\begin{aligned}\partial A &= \overline{A} \setminus A^\circ = (X \setminus (X \setminus A)^\circ) \setminus A^\circ = X \setminus (A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ) \\ &= (X \setminus A^\circ) \cap (X \setminus (X \setminus A)^\circ) = \overline{X \setminus A} \cap \overline{A}.\end{aligned}$$

□

Definice 2.39 (Hromadný bod, derivace, perfektní množina)**:** Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A \subset X$. Bod $x \in X$ nazveme *hromadným bodem množiny* A, právě když $(\forall H_x)(A \cap (H_x \setminus \{x\}) \neq \emptyset)$. Množinu hromadných bodů A nazýváme *derivace* A a značíme A'. Množinu A nazýváme *perfektní*, pokud $A = A'$.

Definice 2.40 (Izolovaný bod, izolátor, diskrétní množina)**:** Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A \subset X$. Bod $x \in A$ nazveme *izolovaným bodem množiny* A, právě když x není hromadný bod A, tzn. $(\exists H_x)(H_x \cap A = \{x\})$. Množinu izolovaných bodů A nazýváme *izolátor* A a značíme A^{i}. Množinu A nazýváme *diskrétní*, pokud $A = A^{\mathrm{i}}$.

Poznámka: Všimněte si, že hromadný bod A nemusí v množině A ležet, ale izolovaný bod A je vždy prvek A.

Příklad 2.41: Uvažujme $X = \mathbb{R}$ s obvyklou topologií, $A = (0,1) \cup \{2\}$, $B = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, a $C = \mathbb{N}$. Potom $A' = [0,1]$, $A^{\mathrm{i}} = \{2\}$, $B' = \{0\}$, $B^{\mathrm{i}} = B$, $C' = \emptyset$ a $C^{\mathrm{i}} = \mathbb{N}$.

Věta 2.42: Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A \subset X$. Potom platí:

1. $x \in A' \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{A \setminus \{x\}}$,
2. $\overline{A} = A' \cup A^{\mathrm{i}}$,
3. $A' \subset A \;\Leftrightarrow\; A = \overline{A}$.

Důkaz Věty 2.42. 1. Z definice hromadného bodu a tvrzení 3. Věty 2.34 plyne

$$x \in A' \;\Leftrightarrow\; (\forall H_x)((H_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset) \;\Leftrightarrow\; (\forall H_x)(H_x \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset) \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{A \setminus \{x\}}.$$

2. Z příslušných definic přímo plyne, že $A^{\mathrm{i}} \subset A \subset \overline{A}$ a podle z již dokázaného tvrzení 1. máme také $A' \subset \overline{A}$. Odtud $A' \cup A^{\mathrm{i}} \subset \overline{A}$.

Dokážeme opačnou inkluzi $\overline{A} \subset A' \cup A^{\mathrm{i}}$. Nechť $x \in \overline{A}$, potom máme $(\forall H_x)(H_x \cap A \neq \emptyset)$. Pokud je $x \notin A$, potom pro lib. H_x je $(H_x \setminus \{x\}) \cap A = H_x \cap A \neq \emptyset$, z čehož plyne $x \in A'$. Je-li naopak $x \in A$, potom musí být pravdivý jeden z výroků $(\forall H_x)((H_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset)$, nebo $(\exists H_x)((H_x \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset)$, neboť jsou komplementární. První ovšem znamená, že $x \in A'$. Kdežto druhý spolu s předpokladem $x \in A$ implikuje $x \in A^{\mathrm{i}}$.

3. Je-li $A' \subset A$, plyne z již dokázaného $\overline{A} = A' \cup A^{\mathrm{i}}$ a inkluze $A^{\mathrm{i}} \subset A$, že $\overline{A} \subset A$, což dokazuje implikaci $A' \subset A \;\Rightarrow\; A = \overline{A}$. Naopak, platí-li $A = \overline{A}$, je opačná implikace důsledkem inkluze $A' \subset \overline{A}$. □

V následující definici si zavedeme terminologii, která zde pro nás sice nebude mít zásadní význam, ale často se s ní v matematice setkáte, a proto je dobré pojmům rozumět.

Definice 2.43 (Hustá množina, separabilita)**:** Buď (X, τ) topologický prostor a $A, B \subset X$. Množinu $A \subset B$ nazveme *hustou v množině* B, pokud $\overline{A} \supset B$. Množina A se nazývá *hustá*, je-li hustá v X, tzn. $\overline{A} = X$. Prostor (X, τ) se nazývá *separabilní*, existuje-li v X hustá nejvýše spočetná množina.

Příklad 2.44: Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je hustá v topologickém prostoru $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií τ, neboť platí $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Protože je $\mathbb{Q}$ navíc spočetná, je $(\mathbb{R}, \tau)$ separabilní.

Některé vlastnosti, které se mohou jevit jako přirozené, jako je např. uzavřenost jednoprvkové množiny, uzavřenost množiny A', nebo inkluze $(A')' \subset A'$ neplatí v obecném topologickém prostoru, viz Cvičení 2.15 a 2.18. Podobný problém se týká nejednoznačnosti limity posloupnosti v topologickém prostoru, který uvidíme později (Příklad 2.49). Z těchto důvodů dále rozlišujeme topologické prostory pomocí tzv. *axiomů oddělitelnosti.*

Definice 2.45 (Axiomy oddělitelnosti)**:** Následující výroky nazýváme *axiom oddělitelnosti*:

$$T_0\colon\ (\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists H_x)(y \notin H_x) \vee (\exists H_y)(x \notin H_y), \qquad \textit{(Kolmogorov)}$$

$$T_1\colon\ (\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists H_x, H_y)(y \notin H_x \wedge x \notin H_y), \qquad \textit{(Fréchet)}$$

$$T_2\colon\ (\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists H_x, H_y)(H_x \cap H_y = \emptyset), \qquad \textit{(Hausdorff)}$$

$$T_3\colon\ (\forall A \in c\tau)(\forall x \notin A)(\exists H_x)(\exists U \supset A, U \in \tau)(H_x \cap U = \emptyset), \qquad \textit{(regulární)}$$

$$T_4\colon\ (\forall A, B \in c\tau, A \cap B = \emptyset)(\exists U \supset A, U \in \tau)(\exists V \supset B, V \in \tau)(U \cap V = \emptyset). \qquad \textit{(normální)}$$

Dále používáme následující názvosloví:

V (X, τ) platí axiom T_0 $\Leftrightarrow$ (X, τ) nazýváme T_0-*prostor*, alternativně *Kolmogorův*.
V (X, τ) platí axiom T_1 $\Leftrightarrow$ (X, τ) nazýváme T_1-*prostor*, alternativně *Frechétův*.
V (X, τ) platí axiom T_2 $\Leftrightarrow$ (X, τ) nazýváme T_2-*prostor*, alternativně *Hausdorffův*.
V (X, τ) platí axiom T_3 $\Leftrightarrow$ (X, τ) nazýváme *regulární*.
V (X, τ) platí axiom T_4 $\Leftrightarrow$ (X, τ) nazýváme *normální*.
V (X, τ) platí axiomy T_1 a T_3 $\Leftrightarrow$ (X, τ) nazýváme T_3-*prostor*.
V (X, τ) platí axiomy T_1 a T_4 $\Leftrightarrow$ (X, τ) nazýváme T_4-*prostor*.

Poznámka: Tedy (X, τ) je T_i-prostor, platí-li v něm axiom T_i a navíc v případě, že $i \in \{3, 4\}$, ještě požadujeme platnost axiomu T_1. Potom je každý T_i-prostor také T_{i-1}-prostor. Naopak pro každé $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ existují topologické prostory,v nichž platí axiom T_{i-1}, ale neplatí axiom T_i, viz Cvičení 2.19–2.23.

Fréchetovy prostory jsou charakterizovány tím, že jsou to právě takové topologické prostory, v nichž jsou singletony uzavřené množiny. Charakterizaci regulárních prostorů uvádí Cvičení 2.25.

Věta 2.46: Topologický prostor (X,τ) je Fréchetův, právě když $(\forall x \in X)(\{x\} \in c\tau)$.

Důkaz. Je-li $|X| = 1$, pak je tvrzení triviální. Předpokládejme dále, že $|X| \geq 2$.

Implikace $(\Rightarrow)$: Buď $x \in X$. Ukážeme, že $X \setminus \{x\}$ je otevřená. Vezměme $y \in X \setminus \{x\}$. Protože $x \neq y$, plyne z axiomu T_1, že $(\exists H_y)(x \notin H_y)$. Neboli $H_y \subset X \setminus \{x\}$. Z toho plyne $X \setminus \{x\} \in \tau$.

Implikace $(\Leftarrow)$: Nechť $x, y \in X, x \neq y$. Protože $y \in X \setminus \{x\}$ a $X \setminus \{x\}$ je podle předpokladu otevřená, existuje H_y takové, že $H_y \subset X \setminus \{x\}$, což znamená $x \notin H_y$. Podobný argument aplikovaný na $X \setminus \{y\}$ implikuje existenci H_x s vlastností $y \notin H_x$. $\square$

Věta 2.47: Nechť (X,τ) je Fréchetův topologický prostor a $A \subset X$. Potom platí:

1. $A' \in c\tau$,
2. $(A')' \subset A'$.

Poznámka: V 2. tvrzení neplatí rovnost, viz Cvičení 2.27. Předpoklad věty nelze zeslabit na Kolmogorův topologický prostor, viz Cvičení 2.17.

Důkaz Věty 2.47. Využijeme fakt, že ve Fréchetově prostoru je množina $H_x \setminus \{x\}$ otevřená pro lib. $x \in X$. To plyne z toho, že $H_x \setminus \{x\} = (X \setminus \{x\}) \cap H_x$ a $X \setminus \{x\}$ je otevřená podle Věty 2.46.

K důkazu tvrzení 1., ukážeme implikaci $x \notin A' \ \Rightarrow\ x \notin \overline{A'}$. Když $x \notin A'$, $\exists H_x$ takové, že $(H_x \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$. Mohou nastat dvě možnosti: buď $H_x \cap A = \emptyset$, nebo $H_x \cap A = \{x\}$. Je-li $H_x \cap A = \emptyset$, potom $x \notin \overline{A}$, a proto také $x \notin \overline{A'}$, neboť $\overline{A'} \subset \overline{A}$, což plyne z tvrzení 2. Věty 2.42.

Uvažujme dále variantu $H_x \cap A = \{x\}$. Pro spor předpokládejme, že $x \in \overline{A'}$. Potom $H_x \cap A' \neq \emptyset$. Protože podle předpokladu $x \notin A'$, je také $(H_x \setminus \{x\}) \cap A' \neq \emptyset$. Jinými slovy $\exists y \in A'$ a $y \in H_x \setminus \{x\}$. Protože $H_x \setminus \{x\} \in \tau$ (zde používáme pozorování udělané na začátku důkazu), je množina $H_x \setminus \{x\} =: H_y$ okolím y. Z toho, že $H_x \cap A = \{x\}$, ale vyplývá $H_y \cap A = \emptyset$, což znamená, že $y \notin A'$ a to je spor (s předchozím $y \in A'$).

K důkazu inkluze $(A')' \subset A'$ použijeme již dokázané $A' = \overline{A'}$ a tvrzení 2. Věty 2.42. Potom totiž

$$(A')' \subset (A')' \cup (A')^{\mathrm{i}} = \overline{A'} = A'.$$

$\square$

V topologickém prostoru můžeme také zavést pojem limita posloupnosti.

Definice 2.48 (Konvergence posloupnosti, limita)**:** Buď (X,τ) topologický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost z X. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje*, existuje-li $x \in X$ takové, že

$$(\forall H_x)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n \in H_x).$$

Bod x nazýváme *limitou* posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a značíme $x_n \to x$.

Poznámka: V definici limity posloupnosti lze místo všech okolí H_x uvažovat jen množiny nějaké lokální báze v x, tzn., že $x_n \to x$, právě když existuje β_x lokální báze v x tak, že

$$(\forall B \in \beta_x)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n \in B),$$

(ověřte).

Příklad 2.49: Uvažujme $X = [0,1]$ s topologií

$$\tau_{fin} := \emptyset \cup \{[0,1] \setminus F \mid F \subset [0,1] \text{ konečná}\}$$

(doplňky do konečných množin). Je jednoduché ověřit, že (X, τ_{fin}) je topologický prostor. Vezměme libovolnou prostou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $[0,1]$, tzn. $x_m \neq x_n$, pokud $m \neq n$. Potom každá neprázdná množina z τ_{fin} obsahuje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ až na konečný počet výjimek. Z toho plyne, že každý bod z $[0,1]$ je limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Předchozí příklad ukazuje, že limita posloupnosti v topologickém prostoru nemusí být určena jednoznačně. V Hausdorffově topologickém prostoru už taková situace nastat nemůže.

Věta 2.50: V Hausdorffově prostoru má každá posloupnost nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z Hausdorffova prostoru (X, τ) má dvě různé limity x' a x''. Protože $x' \neq x''$, axiom T_2 implikuje existenci okolí $H_{x'}$ a $H_{x''}$ takových, že $H_{x'} \cap H_{x''} = \emptyset$.

Protože $x_n \to x'$ a také $x_n \to x''$, existují podle definice limity $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$(\forall n \geq n_1)(x_n \in H_{x'}) \quad \text{a} \quad (\forall n \geq n_2)(x_n \in H_{x''}).$$

Odtud plyne, že pro každé $n \geq \max(n_1, n_2)$ je $x_n \in H_{x'} \cap H_{x''}$, což je ve sporu s tím, že $H_{x'} \cap H_{x''} = \emptyset$. □

Příklad 2.51: Uvažujme množinu rozšířených reálných čísel $X = \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ s obvykle definovaným uspořádáním, kde speciálně platí $a < +\infty$ a $b > -\infty$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Na $\overline{\mathbb{R}}$ můžeme zavést topologii pomocí lokální báze v každém bodě:

$$\beta_x := \begin{cases} \{(x-\epsilon, x+\epsilon) \mid \epsilon > 0\}, & \text{je-li } x \in \mathbb{R}, \\ \{(K, \infty] \mid K \in \mathbb{R}\}, & \text{je-li } x = +\infty, \\ \{[-\infty, K) \mid K \in \mathbb{R}\}, & \text{je-li } x = -\infty. \end{cases}$$

Potom topologická definice limity posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ splývá s obvyklou definicí, tzn.

$$x_n \to x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(|x_n - x| < \epsilon)$$

a

$$\begin{aligned} x_n \to +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall K \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n > K), \\ x_n \to -\infty \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall K \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n < K). \end{aligned}$$

Připomeňme, že každý metrický prostor je i prostor topologický s topologií indukovanou metrikou. Všimněte si, že v metrickém prostoru (X, ρ) můžeme definici limity posloupnosti vyjádřit:

$$\begin{aligned} x_n \to x \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\rho(x, x_n) < \epsilon) \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \rho(x, x_n) = 0. \end{aligned}$$

V metrických prostorech lze topologické vlastnosti jako je vnitřek, uzávěr, hranice, derivace a izolátor množiny charakterizovat pomocí limity posloupnosti.

Věta 2.52: Buď (X, ρ) metrický prostor a $A \subset X$. Potom platí:

1. $x \in A^\circ \;\Leftrightarrow\; (\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X)\,(x_n \to x \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n \in A))\,,$
2. $x \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; (\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A)(x_n \to x),$
3. $x \in \partial A \;\Leftrightarrow\; (\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A)(x_n \to x) \;\wedge\; (\exists \{y_n\}_{n=1}^\infty \subset X \setminus A)(y_n \to x),$
4. $x \in A' \;\Leftrightarrow\; (\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A \setminus \{x\})(x_n \to x),$
5. $x \in A^{\mathrm{i}} \;\Leftrightarrow\; (\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A)\,(x_n \to x \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n = x))\,.$

Důkaz. Dokážeme pouze 1. ekvivalenci. Zbytek důkazu se provede podobně a je přenechán čtenáři jako Cvičení 2.28.

Nechť $x \in A^\circ$. Potom $\exists r > 0$ tak, že $B_x(r) \subset A$. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ a $x_n \to x$, potom z definice limity plyne $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n \in B_x(r) \subset A)$.

Naopak pokud $x \notin A^\circ$, potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$B_x\left(\frac{1}{n}\right) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$

Zvolme libovolně

$$x_n \in B_x\left(\frac{1}{n}\right) \cap (X \setminus A)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom $x_n \to x$ a přitom $x_n \notin A$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Další věta říká, že v každém metrickém prostoru platí axiom oddělitelnosti T_4.

Věta 2.53: Topologický prostor, jehož topologie je indukovaná metrikou, je normální.

Důkaz. Nechť (X, τ) je topologický prostor s topologií indukovanou metrikou ρ. V důkazu ověříme platnost axiomu T_4 v (X, τ). Nejprve ale dokážeme následující jednoduché pozorování.

Lemma 2.54: Buď (X, ρ) metrický prostor, $A = \overline{A} \neq \emptyset$ a $x \in X$. Potom

$$d(x, A) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \in A.$$

Zde $d(x, A) \equiv d(\{x\}, A) = \inf\{\rho(x, y) \mid y \in A\}$.

Důkaz Lemma 2.54. Implikace $(\Leftarrow)$ je triviální. Ukážeme opačnou implikaci $(\Rightarrow)$. Je-li $d(x, A) = 0$, potom z definice infima množiny musí existovat posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ prvků z A taková, že $y_n \to x$. Z toho plyne podle 2. tvrzení Věty 2.52, že $x \in \overline{A} = A$. $\square$

Mějme nyní $A, B \in c\tau$, $A \cap B = \emptyset$. Položme

$$\text{pro } x \in A: \quad r_x := \frac{1}{3} d(x, B) \quad \text{a} \quad U_x := B_x(r_x),$$
$$\text{pro } y \in B: \quad r_y := \frac{1}{3} d(y, A) \quad \text{a} \quad V_y := B_y(r_y).$$

Podle dokázaného lemma je $(\forall x \in A)(r_x > 0)$, neboť $x \notin B$, jinak by $A \cap B \neq \emptyset$. Podobně $(\forall y \in B)(r_y > 0)$. Dále definujme množiny

$$U := \bigcup_{x \in A} U_x \quad \text{a} \quad V := \bigcup_{y \in B} V_y.$$

Množiny U a V jsou otevřené, protože jsou dány sjednocením otevřených množin. Dále také $A \subset U$ a $B \subset V$. K tomu, aby byla platnost axiomu T_4 ověřena, zbývá ukázat, že $U \cap V = \emptyset$.

Pro spor předpokládejme, že $U \cap V \neq \emptyset$. Potom by musely existovat $x \in A$ a $y \in B$ tak, že $U_x \cap V_y \neq \emptyset$. Vezměme $z \in U_x \cap V_y$. Potom z definice množin U_x a V_y plyne, že

$$\rho(x, z) < r_x \quad \text{a} \quad \rho(y, z) < r_y.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $r_y \leq r_x$. Potom s použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$3r_x = d(x, B) \leq \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) < r_x + r_y \leq 2r_x,$$

což implikuje logický spor $3 < 2$. □

Nakonec si ještě vysvětlíme pojem topologický podprostor.

Definice 2.55: (Topologický podprostor) Buď (X, τ) topologický prostor a $Y \subset X$. Dvojici (Y, τ_Y), kde

$$\tau_Y := \{A \cap Y \mid A \in \tau\},$$

nazýváme *topologický podprostor* prostoru (X, τ).

Poznámka: Snadno se ověří, že topologický podprostor je topologický prostor (proveďte).

Věta 2.56: Nechť (Y, τ_Y) je topologický podprostor prostoru (X, τ). Potom platí:

1. $B \in c\tau_Y \;\Leftrightarrow\; (\exists C \in c\tau)(B = C \cap Y)$.
2. H_y^Y je okolí bodu $y \in Y$ v $(Y, \tau_Y) \;\Leftrightarrow\; (\exists H_y^X$ okolí y v $(X, \tau))(H_y^Y = H_y^X \cap Y)$.

Důkaz. Proveďte jako Cvičení 2.30. □

Příklad 2.57: Uvažujme $X = \mathbb{R}$ s obvyklou topologií τ a $Y = (0, 2]$. Všimněte si, že množina $(0, 1]$, která není ani otevřená, ani uzavřená v (X, τ), je uzavřená v (Y, τ_Y). Podobně je množina $(1, 2]$ otevřená v prostoru (Y, τ_Y).

Ještě jednou zdůrazníme na následujícím příkladu, že pokud pracujeme s topologickými pojmy jako je uzávěr, vnitřek, hranice, atd., je třeba mít vždy na paměti, jakou topologii uvažujeme.

Příklad 2.58: Buď $X = \mathbb{R}^2$ s obvyklou topologií τ a $Y = [0, 1] \times \{0\}$. Uvažujme množinu $A = (0, 1) \times \{0\}$. Potom *v topologickém prostoru* (X, τ) máme

$$A^\circ = \emptyset, \quad \overline{A} = [0, 1] \times \{0\}, \quad \partial A = [0, 1] \times \{0\},$$

kdežto *v topologickém prostoru* (Y, τ_Y) platí

$$A^\circ = (0, 1) \times \{0\}, \quad \overline{A} = [0, 1] \times \{0\}, \quad \partial A = \{(0, 0), (1, 0)\}.$$

2.3 Spojitost

Pojem *spojité zobrazení* hraje v matematické analýze důležitou roli a lze zavést už na velmi abstraktní úrovni pro zobrazení mezi dvěma topologickými prostory.

Definice 2.59 (Spojitost v bodě, spojitost)**:** Buď $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ zobrazení mezi dvěma topologickými prostory (X, τ_X) a (Y, τ_Y). Řekneme, že zobrazení f *je spojité v bodě* $x \in X$, právě když

$$(\forall H_{f(x)})(\exists H_x)(f(H_x) \subset H_{f(x)}).$$

Dále zobrazení f nazveme *spojité*, je-li f spojité v každém bodě $x \in X$.

Poznámka: Spojitost je topologická vlastnost. Tzn., že závisí na topologiích τ_X a τ_Y na X a Y. Zdůrazněme, že H_x z definice spojitosti je okolím x v topologii τ_X a $H_{f(x)}$ okolím $f(x)$ v topologii τ_Y. Ve značení tuto skutečnost ale nebudeme speciálně vyznačovat. Budeme také občas stručněji psát $f : X \to Y$ je spojité, namísto přesného $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ je spojité.

Poznámka: V definici spojitosti f v bodě x lze místo okolí uvažovat jen množiny nějakých lokálních bází v bodech x a $f(x)$, tzn., že f je spojité v x, právě když existují lokální báze β_x a $\beta_{f(x)}$ v bodech x a $f(x)$ takové, že

$$(\forall B \in \beta_{f(x)})(\exists C \in \beta_x)(f(C) \subset B).$$

Na tomto místě je dobré si rozmyslet, že obvyklá „ϵ–δ definice“ spojitosti funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě x_0:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \delta)(|f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

je speciální případ uvedené obecné (topologické) definice, kde $\mathbb{R}$ uvažujeme s obvyklou topologií. Zde se rozumí, že je f definovaná na celém $\mathbb{R}$. Pokud je funkce f definovaná jen na nějaké podmnožině $D_f \subset \mathbb{R}$, chápeme D_f jako topologický podprostor $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií a „ϵ–δ definice“ má potom podobu

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f,\ |x - x_0| < \delta)(|f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

Příklad 2.60: Uvažujme obvyklé topologie a $f : [0, 1] \cup (2, 3] \to \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{je-li } x \in [0, 1], \\ x - 1, & \text{je-li } x \in (2, 3]. \end{cases}$$

Potom je f spojitá funkce.

Odtud dále, pokud nebude topologie na množinách $\mathbb{R}^n$ specifikována, budeme uvažovat topologii obvyklou.

Obecněji než v předchozí situaci s reálnou funkcí, avšak docela analogicky je definice spojitosti zobrazení $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ mezi metrickými prostory v bodě $x_0 \in X$ ekvivalentní výroku

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X,\ \rho(x, x_0) < \delta)(\sigma(f(x), f(x_0)) < \epsilon),$$

neboli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in B_{x_0}(\delta))(f(x) \in\ B_{f(x_0)}(\epsilon)).$$

Věta 2.61: Buďte (X, τ_X) a (Y, τ_Y) topologické prostory a $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. f je spojité.
2. Vzor otevřené množiny je otevřená množina, tj.
$$(\forall A \in \tau_Y)(f^{-1}(A) \in \tau_X).$$
3. Vzor uzavřené množiny je uzavřená množina, tj.
$$(\forall B \in c\tau_Y)(f^{-1}(B) \in c\tau_X).$$

Důkaz. K důkazu ekvivalence 2. a 3. tvrzení si stačí uvědomit, že pro lib. $A \subset Y$ je $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(Y \setminus A) = X$ a že tento rozklad je disjunktní. Potom už stačí vyžít toho, že otevřené a uzavřené množiny jsou vzájemně komplementární. Dále ukážeme ekvivalenci 1. a 2. tvrzení.

Implikace 2. $\Rightarrow$ 1.: Pro lib. zvolené $x \in X$ stačí položit $A = H_{f(x)}$ a tvrzení 2. potom říká, že $f^{-1}(H_{f(x)})$ je otevřená. Navíc z definice vzoru je $x \in f^{-1}(H_{f(x)})$. Proto musí existovat H_x tak, že $H_x \subset f^{-1}(H_{f(x)})$, neboli $f(H_x) \subset H_{f(x)}$.

Implikace 1. $\Rightarrow$ 2.: Nechť $A \in \tau_Y$. Potom je buď $f^{-1}(A) = \emptyset$ a tvrzení platí triviálně, nebo $f^{-1}(A) \neq \emptyset$. Předpokládejme, že $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ a zvolme $x \in f^{-1}(A)$. Potom je $f(x) \in A \in \tau_Y$, a proto $(\exists H_{f(x)})(H_{f(x)} \subset A)$. Protože je navíc dle předpokladu f spojitá v x, musí

$$(\exists H_x)(f(H_x) \subset H_{f(x)} \subset A),$$

neboli

$$(\exists H_x)(H_x \subset f^{-1}(A)),$$

a proto je $f^{-1}(A) \in \tau_X$. □

Definice 2.62 (Homeomorfismus, homeomorfní prostory)**:** Zobrazení $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ nazveme *homeomorfismus*, právě když je f bijekce a f i f^{-1} jsou spojité. Topologické prostory (X, τ_X) a (Y, τ_Y) nazýváme *homeomorfní*, existuje-li $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ homeomorfismus.

Poznámka: „Být homeomorfní" je relace ekvivalence na množině topologických prostorů.

Následující příklad ukazuje, že je-li $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ prosté a spojité, f^{-1} nemusí být nutně spojité, viz také Cvičení 2.32. Tzn., že požadavek, aby f^{-1} bylo spojité, není v definici homeomorfismu nadbytečný.

Příklad 2.63: Uvažujme ještě jednou zobrazení f z Příkladu 2.60, které je spojité a také prosté. Inverzní zobrazení snadno určíme:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & \text{je-li } y \in [0,1], \\ y+1, & \text{je-li } y \in (1,2]. \end{cases}$$

Zřejmě ale f^{-1} není spojité.

Homeomorfismus zachovává topologické vlastnosti, tzn. vlastnosti závislé jen na zvolené topologii jako je např. otevřenost množiny apod. Následující věta je okamžitý důsledek Věty 2.61 a příslušných definic.

Věta 2.64: Nechť $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ je homeomorfismus topologických prostorů (X, τ_X) a (Y, τ_Y). Potom pro každé $A \subset X$ platí:

1. $A \in \tau_X \quad \Leftrightarrow \quad f(A) \in \tau_Y$,
2. $A \in c\tau_X \quad \Leftrightarrow \quad f(A) \in c\tau_Y$,
3. $f(A^\circ) = (f(A))^\circ$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ a $f(\partial A) = \partial(f(A))$.

Jiné vlastnosti než topologické, jako je např. omezenost množiny, homeomorfismus nezachovává, viz Cvičení 2.34.

Definice 2.65 (Ekvivalence metrik, ekvivalence norem)**:** Dvě metriky na množině $X \neq \emptyset$ nazveme *(topologicky) ekvivalentní*, pokud indukují tutéž topologii na X. Dále dvě normy na lineárním prostoru V nazveme *ekvivalentní*, pokud indukují ekvivalentní metriky na V.

Poznámka: Metriky ρ a σ na množině $X \neq \emptyset$ jsou ekvivalentní, právě když identické zobrazení $\mathrm{id} : (X, \rho) \to (X, \sigma)$ je homeomorfismus.

Věta 2.66: Buď V lineární prostor a $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ normy na V. Potom normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, právě když

$$(\exists c, \tilde{c} > 0)(\forall x \in V)(c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \tilde{c}\|x\|_1).$$

Důkaz. Implikace $(\Rightarrow)$: Připomeňme, že v obecném normovaném prostoru $(V, \|\cdot\|)$ platí:

$$\overline{B_x(r)} = C_x(r) \equiv \{y \in V \mid \|x - y\| \leq r\}$$

pro lib. $x \in V$ a $r > 0$, viz Cvičení 2.6.

Předpokládejme, že jsou normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ na V ekvivalentní. Indukují tedy tutéž topologii na V. Uvažujme jednotkovou kouli

$$B_0^{(1)}(1) := \{y \in V \mid \|y\|_1 < 1\}$$

v prostoru $(V, \|\cdot\|_1)$. Množina $B_0^{(1)}(1)$ je otevřená v $(V, \|\cdot\|_1)$, a proto je podle předpokladu také otevřená v $(V, \|\cdot\|_2)$. Potom existuje $c > 0$ takové, že

$$B_0^{(2)}(c) := \{y \in V \mid \|y\|_2 < c\} \subset B_0^{(1)}(1).$$

Přejdeme-li v poslední inkluzi k uzávěrům v topologii indukované jak $\|\cdot\|_1$, tak $\|\cdot\|_2$ (je stejná), potom dostáváme inkluzi

$$\{y \in V \mid \|y\|_2 \leq c\} \subset \{y \in V \mid \|y\|_1 \leq 1\},$$

neboli

$$(\forall y \in V)(\|y\|_2 \leq c \;\Rightarrow\; \|y\|_1 \leq 1).$$

Pro $x = 0$ tvrzení triviálně platí. Pro $x \neq 0$ položme

$$y := c\frac{x}{\|x\|_2}.$$

Potom je $\|y\|_2 = c$ a podle odvozené implikace

$$1 \geq \|y\|_1 = c\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2},$$

neboli

$$\|x\|_2 \geq c\|x\|_1,$$

což je jedna z nerovností, kterou bylo třeba dokázat. Obdobný postup s prohozenou rolí norem $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ dokazuje druhou nerovnost.

Implikace ($\Leftarrow$): Dokážeme implikaci

$$A \subset V \text{ je otevřená v } (V, \|\cdot\|_2) \;\Rightarrow\; A \text{ je otevřená v } (V, \|\cdot\|_1).$$

Opačná implikace se potom opět dokáže analogicky. Získaná ekvivalence implikuje, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ indukují tutéž topologii na V a jsou proto ekvivalentní.

Pro $A = \emptyset$ implikace platí. Nechť $\emptyset \neq A \subset V$ je otevřená v $(V, \|\cdot\|_2)$ a $x \in A$. Potom existuje $r > 0$ tak, že

$$B_x^{(2)}(r) := \{y \in V \mid \|x-y\|_2 < r\} \subset A.$$

Nyní si stačí všimnout, že

$$B_x^{(1)}\left(\frac{r}{\tilde{c}}\right) := \left\{y \in V \;\middle|\; \|x-y\|_1 < \frac{r}{\tilde{c}}\right\} \subset B_x^{(2)}(r),$$

neboť pro $y \in B_x^{(1)}(r/\tilde{c})$ je podle předpokladu

$$\|x-y\|_2 \leq \tilde{c}\|x-y\|_1 < \tilde{c}\frac{r}{\tilde{c}} = r.$$

Celkem tedy máme

$$B_x^{(1)}\left(\frac{r}{\tilde{c}}\right) \subset B_x^{(2)}(r) \subset A,$$

a proto je množina A otevřená také v $(V, \|\cdot\|_1)$. $\square$

Poznámka: Podobné tvrzení jako Věta 2.66 neplatí pro metriky. Vlastnost

$$(\exists c, \tilde{c} > 0)(\forall x, y \in X)\,(c\rho(x,y) \leq \sigma(x,y) \leq \tilde{c}\rho(x,y))$$

se nazývá *silná ekvivalence* metrik ρ a σ na X. Silná ekvivalence metrik implikuje ekvivalenci metrik, ale ne naopak. Hlouběji se zde touto problematikou nebudeme zabývat.

Připomeňme, že topologii na $\mathbb{R}^n$ určenou Euklidovskou 2-normou jsme označovali jako *obvyklou.* Následující příklad ukazuje, že všechny p-normy jsou na $\mathbb{R}^n$ ekvivalentní. Všechny tedy indukují na $\mathbb{R}^n$ obvyklou topologii. Později dokonce ukážeme, že libovolné dvě normy na *konečnědimenzionálním* lineárním prostoru jsou ekvivalentní.

Příklad 2.67: Buď $p \geq 1$. Pro lib. $x \in \mathbb{R}^n$ je

$$\left(\max_{i \in \hat{n}} |x_i|\right)^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leq n \left(\max_{i \in \hat{n}} |x_i|\right)^p.$$

Z toho plyne, že pro $\forall x \in \mathbb{R}^n$, platí

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{n}\|x\|_\infty.$$

Tedy normy $\|\cdot\|_p$ a $\|\cdot\|_\infty$ jsou na $\mathbb{R}^n$ ekvivalentní. Protože je ekvivalence norem skutečně relace ekvivalence, speciálně je tranzitivní, jsou $\|\cdot\|_p$ a $\|\cdot\|_{p'}$ ekvivalentní na $\mathbb{R}^n$ pro libovolné $p, p' \in [1, \infty]$.

Na rozdíl od spojitosti zobrazení k definici *stejnoměrné spojitosti* již potřebujeme metriku.

Definice 2.68 (Stejnoměrná spojitost)**:** Buďte (X, ρ) a (Y, σ) metrické prostory. Zobrazení $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ nazveme *stejnoměrně spojité* (na X), právě když

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in X, \rho(x, y) < \delta)(\sigma(f(x), f(y)) < \epsilon).$$

Samozřejmě zobrazení spojité stejnoměrně je také spojité. Spojitost je ale lokální vlastností zobrazení f, kdežto stejnoměrná spojitost je vlastnost globální. Množina, na které je zobrazení definováno/uvažováno hraje důležitou roli. Rozmyslete si rozdíl na následujících jednoduchých příkladech.

Příklad 2.69: Funkce $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ je spojitá, tj. spojitá v každém bodě intervalu $(0, 1)$, ale není spojitá stejnoměrně.

Příklad 2.70: Funkce $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ je spojitá stejnoměrně.

Příklad 2.71: Funkce $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ je spojitá, ale není spojitá stejnoměrně.

Příklad 2.72: Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sin x$ je spojitá stejnoměrně.

Další fundamentální pojem v analýze je *limita zobrazení.*

Definice 2.73 (Limita zobrazení vzhledem k množině, limita zobrazení)**:** Nechť $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ je zobrazení mezi topologickými prostory, $\emptyset \neq A \subset X$ a x_0 hromadný bod A. Řekneme, že f má *limitu* $y \in Y$ *pro* $x \to x_0$ *vzhledem k množině* A, právě když

$$(\forall H_y)(\exists H_{x_0})(\forall x \in (H_{x_0} \setminus \{x_0\}) \cap A)(f(x) \in H_y).$$

Tuto skutečnost zapisujeme

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = y.$$

Je-li speciálně $A = X$, říkáme jen, že f má *limitu* $y \in Y$ *pro* $x \to x_0$ a píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y.$$

Poznámka: Všimněte si, že limitu zobrazení definujeme pouze v *hromadném bodě* množiny A.

Opět je dobré si uvědomit, že speciálně pro funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je obecná definice limity ekvivalentní klasické ϵ–δ definici známé z 1. ročníku. Obecněji pro zobrazení $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ mezi metrickými prostory má ϵ–δ definice limity

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = y$$

tvar

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A, 0 < \rho(x, x_0) < \delta)(\sigma(f(x), y) < \epsilon).$$

Věta 2.74: Buď $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ a x_0 hromadný bod X. Potom je f spojité v bodě x_0, právě když

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Důkaz. Plyne okamžitě z příslušných definic. $\square$

Limitu zobrazení a limitu posloupnosti dává v metrických prostorech do souvislosti Heineho věta.

Věta 2.75 (Heine)**:** Buďte (X, ρ), (Y, σ) metrické prostory, $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, $\emptyset \neq A \subset X$, $x_0 \in A'$ a $y \in Y$. Potom

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = y,$$

právě když

$$(\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{x_0\})(x_n \to x_0 \ \Rightarrow \ f(x_n) \to y).$$

Důkaz. Implikace ($\Rightarrow$): Předpokládejme, že

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = y$$

a uvažujme $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{x_0\}$ takovou, že $x_n \to x_0$. Zvolme $\epsilon > 0$. Z předpokladu plyne, že

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \setminus \{x_0\}, \rho(x, x_0) < \delta)(\sigma(f(x), y) < \epsilon).$$

Protože $x_n \to x_0$, musí

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\rho(x_n, x_0) < \delta),$$

a proto je také

$$(\forall n \geq n_0)(\sigma(f(x_n), y) < \epsilon).$$

Celkem tedy dostáváme

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\sigma(f(x_n), y) < \epsilon),$$

což znamená, že $f(x_n) \to y$.

Implikace ($\Leftarrow$): Předpokládejme naopak, že *neplatí*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = y.$$

Potom

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in A \setminus \{x_0\})(\rho(x, x_0) < \delta \ \wedge \ \sigma(f(x), y) \geq \epsilon).$$

Volíme-li postupně v posledním výroku $\delta := 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}$, zkonstruujeme tak posloupnost bodů $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ s vlastnostmi

$$\rho(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad \sigma(f(x_n), y) \geq \epsilon$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. První vlastnost znamená, že $x_n \to x_0$ a druhá implikuje, že není pravda, že $f(x_n) \to y$. $\square$

2.4 Kompaktnost

Definice 2.76 (Otevřené pokrytí, podpokrytí)**:** Buď (X, τ) topologický prostor. Systém otevřených množin $\mathcal{U} \subset \tau$ nazveme *otevřené pokrytí* X, právě když

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X.$$

Systém $\mathcal{U}' \subset \tau$ nazveme *podpokrytí* $\mathcal{U}$, právě když $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ a $\mathcal{U}'$ je otevřené pokrytí X.

Příklad 2.77: Systém $\mathcal{U} = \{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Systém $\{(-2n, 2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je podpokrytí $\mathcal{U}$, kdežto systém $\{(-n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ není podpokrytí $\mathcal{U}$.

Definice 2.78 (Kompaktní prostor, kompaktní množina)**:** Topologický prostor (X, τ) nazveme *kompaktní*, pokud každé otevřené pokrytí X má konečné podpokrytí, tzn.

$$(\forall \mathcal{U} \text{ otevřené pokrytí } X)(\exists n \in \mathbb{N}, \exists U_1, \dots U_n \in \mathcal{U}) \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i \supset X \right).$$

Množinu $\emptyset \neq A \subset X$ nazveme *kompaktní*, je-li (A, τ_A) kompaktní jakožto topologický podprostor (X, τ). Prázdnou množinu také řadíme mezi kompaktní množiny.

Poznámka: Rozmyslete si, že z předchozí definice vyplývá, že podmnožina A topologického prostoru (X, τ) je kompaktní, právě když

$$(\forall \{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau) \left(A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \right) (\exists n \in \mathbb{N})(\exists \alpha_1, \dots \alpha_n \in I) \left(A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \right).$$

Příklad 2.79: Z definice ihned plyne, že každá konečná množina je kompaktní. Další příklad kompaktní množiny v $\mathbb{R}$ (s obvyklou topologií) je uzavřený interval $[a, b]$, kde $-\infty < a < b < \infty$. Obecněji uzavřený n-interval $\times_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall i \in \hat{n})(a_i \leq x_i \leq b_i)\}$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^n$. Důkaz tohoto tvrzení ale není triviální a dokážeme si ho až později.

Příklad 2.80: Prostor $\mathbb{R}$ není kompaktní, neboť např. z otevřeného pokrytí $\{(-n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ nelze vybrat konečné podpokrytí $\mathbb{R}$. Podobně interval $(0,1]$ není kompaktní množina, protože z otevřeného pokrytí $\{(1/n,1] \mid n \in \mathbb{N}\}$ intervalu $(0,1]$ nelze vybrat konečné podpokrytí.

Nejprve si dokážeme několik obecných vlastností kompaktních množin. Začneme s tím, že uzavřená podmnožina kompaktního prostoru je kompaktní.

Věta 2.81: Buď (X,τ) kompaktní topologický prostor a $A \subset X$ uzavřená. Potom A je kompaktní.

Důkaz. Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí A. Potom $\mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ je otevřené pokrytí kompaktního prostoru X, a proto z něj lze vybrat konečné podpokrytí X. Tzn., že $\exists \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ konečné takové, že $\mathcal{U}' \cup \{X \setminus A\}$ je otevřené pokrytí X. Tedy $\mathcal{U}'$ je konečné podpokrytí $\mathcal{U}$ množiny A. □

Věta 2.82: Nechť (X,τ) je Hausdorffův prostor a $A \subset X$ kompaktní. Potom je A uzavřená.

Poznámka: Předpoklad, že (X,τ) je Hausdorffův, je podstatný. Příklad ilustrující neplatnost věty v T_1-prostorech ukazuje Cvičení 2.36.

Důkaz Věty 2.82. Nechť A je kompaktní. Ukážeme, že $X \setminus A$ je otevřená. Pro $A = X$ je tvrzení triviální.

Nechť $A \neq X$ a $x \in X \setminus A$. Potom axiom T_2 implikuje

$$(\forall y \in A)(\exists H_x^{(y)}, H_y)(H_x^{(y)} \cap H_y = \emptyset),$$

kde $H_x^{(y)}$ označuje okolí x, které ovšem závisí na $y \in A$. Systém $\{H_y \mid y \in A\}$ je otevřené pokrytí A, neboť

$$A \subset \bigcup_{y \in A} H_y.$$

Jelikož je A kompaktní, existuje $n \in \mathbb{N}$ a body $y_1, \dots y_n \in A$ tak, že $\{H_{y_1}, \dots H_{y_n}\}$ je otevřené pokrytí A. Navíc máme

$$(\forall i \in \hat{n})(H_x^{(y_i)} \cap H_{y_i} = \emptyset).$$

Označme

$$H_x := \bigcap_{i=1}^{n} H_x^{(y_i)}.$$

Potom H_x je okolí x takové, že

$$(\forall i \in \hat{n})(H_x \cap H_{y_i} = \emptyset).$$

Navíc

$$H_x \cap A \subset H_x \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} H_{y_i} \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (H_x \cap H_{y_i}) = \emptyset,$$

neboli $H_x \subset X \setminus A$. □

Následuje ekvivalentní charakteristika kompaktnosti.

Věta 2.83: Topologický prostor (X, τ) je kompaktní, právě když každý systém *uzavřených* množin z X, jehož libovolný konečný podsystém má neprázdný průnik, má neprázdný průnik, tzn.

$$(\forall \mathcal{T} \subset c\tau) \left((\forall \mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ konečné }) \left(\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset \right) \Rightarrow \bigcap \mathcal{T} \neq \emptyset \right).$$

Důkaz. Dokážeme ekvivalenci pro větu obměněnou: (X, τ) je kompaktní, právě když

$$(\forall \mathcal{T} \subset c\tau) \left(\bigcap \mathcal{T} = \emptyset \Rightarrow (\exists \mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ konečné }) \left(\bigcap \mathcal{F} = \emptyset \right) \right).$$

Označme si množiny systému $\mathcal{T} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, kde $I \neq \emptyset$ je indexová množina a $B_\alpha := X \setminus A_\alpha$. Podle de Morganových zákonů je

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad X \subset \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha.$$

Je-li X kompaktní, potom $\exists n \in \mathbb{N}$ a $\exists \alpha_1, \dots \alpha_n \in I$ tak, že

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\alpha_i},$$

což je ekvivalentní

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i} = \emptyset.$$

Opačnou implikaci dokážeme obdobně. □

Důsledek 2.84 (Cantor)**:** Buď (X, τ) kompaktní topologický prostor, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost *uzavřených neprázdných* množin z X taková, že $A_{n+1} \subset A_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

Důkaz. Buď $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}$ konečná. Protože $(\forall n \in \mathbb{N})(A_{n+1} \subset A_n)$ je

$$\bigcap_{n \in \mathcal{F}} A_n = A_{\max \mathcal{F}} \neq \emptyset$$

podle předpokladu. Aplikace Věty 2.83 nyní implikuje tvrzení. □

Naším dalším cílem je tzv. sekvenční kompaktnost. Důležitou roli budou hrát posloupnosti, které obsahují konvergentní podposloupnost. My se ale nejprve na chvíli zastavíme u obecnějšího pojmu *hromadná hodnota posloupnosti.*

Definice 2.85: (Hromadná hodnota posloupnosti) Buď (X, τ) topologický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost v X. Bod $x \in X$ nazveme *hromadná hodnota* posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, právě když každé okolí x obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka: Pozor na rozdíl mezi pojmy hromadná hodnota posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a hromadný bod množiny $\cup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$. Např. posloupnost s členy $x_n = (-1)^n$ má v $\mathbb{R}$ dvě hromadné hodnoty ± 1, kdežto $\cup_{n=1}^{\infty}\{x_n\} = \{-1, 1\}$ je množina dvou izolovaných bodů.

Věta 2.86: V kompaktním prostoru (X, τ) má každá posloupnost hromadnou hodnotu.

Důkaz. Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost v X. Definujme

$$B_n := \bigcup_{k \geq n} \{x_k\}$$

a $A_n := \overline{B_n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě $B_n \neq \emptyset$ a $B_{n+1} \subset B_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a proto také $A_n \neq \emptyset$ a $A_{n+1} \subset A_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom podle Důsledku 2.84 je

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

Ukážeme, že libovolný bod

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

je hromadná hodnota posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Buď H_x libovolné okolí x. Protože

$$(\forall n \in \mathbb{N})(x \in A_n)$$

je z definice uzávěru

$$(\forall n \in \mathbb{N})(H_x \cap B_n \neq \emptyset).$$

Z posledního plyne, že H_x musí obsahovat nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, jinak by muselo existovat $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $(\forall n \geq n_0)(H_x \cap B_n = \emptyset)$. □

Věta 2.87: V kompaktním Hausdorffově prostoru je posloupnost konvergentní, právě když má právě jednu hromadnou hodnotu.

Poznámka: Předpoklad kompaktnosti X je podstatný pro platnost implikace:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ má právě jednu hromadnou hodnotu} \quad \Rightarrow \quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ konverguje,}$$

jak ukazuje jednoduchý příklad posloupnosti

$$x_n := \begin{cases} 1/n, & \text{je-li } n \text{ liché,} \\ n, & \text{je-li } n \text{ sudé,} \end{cases}$$

v $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií.

Důkaz Věty 2.87. Pokud $x_n \to x$, plyne okamžitě z definice limity, že x je hromadná hodnota $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Stačí proto ukázat, že x je jedinou hromadnou hodnotou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Uvažujme libovolný $y \in X$, $y \neq x$. Potom axiom T_2 implikuje

$$(\exists H_x, H_y)(H_x \cap H_y = \emptyset).$$

Protože H_x obsahuje všechny členy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ až na konečně mnoho výjimek, může H_y obsahovat pouze konečně mnoho členů $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, a proto y není hromadná hodnota posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Předpokládejme naopak, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje. Z Věty 2.86 plyne, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má alespoň jednu hromadnou hodnotu. Označme ji x. Protože x není limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, existuje H_x tak, že doplněk $X \setminus H_x$ obsahuje ještě nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Množina $X \setminus H_x$ je uzavřená podmnožina kompaktního prostoru X, a proto je podle Věty 2.81 také kompaktní. A tedy podle Věty 2.86 musí mít posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hromadnou hodnotu v množině $X \setminus H_x$. Celkem tedy má posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ alespoň dvě hromadné hodnoty. □

Zamysleme se nyní krátce nad rozdílem pojmů:

1. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má hromadnou hodnotu.
2. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má konvergentní podposloupnost.

V obecných topologických prostorech nejsou výroky 1. a 2. ekvivalentní. Platí pouze implikace 2. $\Rightarrow$ 1. (dokažte). Neplatnost opačné implikace ukazuje Cvičení 2.39. Nicméně v metrických prostorech už tvrzení 1. a 2. ekvivalentní jsou.

Věta 2.88: Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost v metrickém prostoru (X, ρ). Potom $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má hromadnou hodnotu, právě když $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má konvergentní podposloupnost.

Důkaz. Vzhledem k diskuzi výše stačí ukázat jednu implikaci. Předpokládejme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má hromadnou hodnotu $x \in X$. Jelikož pro každé $\epsilon > 0$ obsahuje okolí $B_x(\epsilon)$ nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, lze konvergentní podposloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$konstruovat induktivně. V prvním kroku vybereme libovolně $x_{k_1} \in B_x(1)$ a v n-tém $x_{k_n} \in B_x(1/n)$ pro nějaké $k_n > k_{n-1}$. Takto můžeme postupovat pro každé $n \geq 2$ a vybereme tak podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž členy splňují

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\rho(x, x_{k_n}) < \frac{1}{n} \right).$$

Odtud plyne $x_{k_n} \to x$. □

Definice 2.89 (Sekvenčně kompaktní prostor)**:** Topologický prostor (X, τ) nazveme *sekvenčně kompaktní*, pokud každá posloupnost v X má konvergentní podposloupnost.

V obecných topologických prostorech není kompaktní prostor sekvenčně kompaktní a neplatí ani opačná implikace. Ukázat příklady topologických prostorů, které jsou kompaktní, ale ne sekvenčně kompaktní a naopak, které jsou sekvenčně kompaktní, ale ne kompaktní, už vyžaduje hlubší znalosti z obecné topologie, které jsou nad rámec tohoto kurzu. Čtenář je může najít např. v knize [25].

Naším cílem bude ukázat, že v *metrických prostorech* již kompaktnost a sekvenční kompaktnost znamená totéž. Tato věta má v matematické analýze hluboký význam.

Věta 2.90: Metrický prostor (X, ρ) je kompaktní, právě když je sekvenčně kompaktní.

Důkaz. Předpokládejme, že (X, ρ) je kompaktní. Podle Věty 2.86, má každá posloupnost v X hromadnou hodnotu, což v metrickém prostoru znamená, že každá posloupnost má konvergentní podposloupnost, viz Věta 2.88.

Půjde tedy zejména o to, dokázat opačnou implikaci. To provedeme prostřednictvím dvou pomocných tvrzení.

Lemma 2.91 (Lebesgue)**:** Buď (X, ρ) sekvenčně kompaktní metrický prostor a $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ otevřené pokrytí X. Potom existuje $\epsilon > 0$ takové, že každá ϵ-koule je obsažena alespoň v jedné z pokrývajících množin U_α, tj.

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists \alpha \in I)(B_x(\epsilon) \subset U_\alpha).$$

Důkaz Lemma 2.91. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists x \in X)(\forall \alpha \in I)(B_x(\epsilon) \not\subset U_\alpha).$$

Volíme-li $\epsilon = 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}$, dostaneme tak posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, pro její členy platí

$$(\forall \alpha \in I)(\forall n \in \mathbb{N})(B_{x_n}(1/n) \not\subset U_\alpha). \tag{16}$$

Jelikož je (X, ρ) sekvenčně kompaktní, posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ má konvergentní podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^\infty$, jejíž limitu označme x. Protože $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí X, $(\exists \alpha_0 \in I)(x \in U_{\alpha_0})$. Množina U_{α_0} je otevřená, a proto

$$(\exists r > 0)(B_x(r) \subset U_{\alpha_0}).$$

Z toho, že $x_{k_n} \to x$, plyne

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\rho(x, x_{k_n}) < r/2).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme také předpokládat, že n_0 je dost velké, aby platilo

$$(\forall n \geq n_0)\left(\frac{1}{n} < \frac{r}{2}\right).$$

Z posledních dvou vlastností plyne inkluze $B_{x_{k_n}}(1/k_n) \subset B_x(r)$ pro každé $n \geq n_0$, neboť je-li $y \in B_{x_{k_n}}(1/k_n)$, potom

$$\rho(y, x) \leq \rho(y, x_{k_n}) + \rho(x_{k_n}, x) < \frac{1}{n} + \frac{r}{2} < r,$$

a proto $y \in B_x(r)$. Odtud vidíme, že

$$(\forall n \geq n_0)\left(B_{x_{k_n}}(1/k_n) \subset B_x(r) \subset U_{\alpha_0}\right).$$

Celkem jsme tedy našli $\alpha_0 \in I$ a index $m \in \mathbb{N}$, např. $m := k_{n_0}$, takové, že $B_{x_m}(1/m) \subset U_{\alpha_0}$, což je spor s (16). □

Lemma 2.92 (Borel)**:** Buď (X,ρ) sekvenčně kompaktní metrický prostor. Potom je X tzv. *totálně omezený*, tj.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\exists x_1, \ldots, x_n)\left(X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{x_i}(\epsilon)\right).$$

Důkaz Lemma 2.92. Buď $\epsilon > 0$. Zvolme libovolně $x_1 \in X$. Je-li $X \setminus B_{x_1}(\epsilon) \neq \emptyset$, zvolíme opět libovolně $x_2 \in X \setminus B_{x_1}(\epsilon)$. Je-li $X \setminus (B_{x_2}(\epsilon) \cup B_{x_1}(\epsilon)) \neq \emptyset$, zvolíme $x_3 \in X \setminus (B_{x_1}(\epsilon) \cup B_{x_2}(\epsilon))$, atd. Tato procedura musí po konečně mnoha krocích skončit, tj.

$$(\exists n \in \mathbb{N})\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_{x_i}(\epsilon) = \emptyset\right),$$

z čehož vyplývá tvrzení lemma. Kdyby totiž procedura neskončila po konečně mnoha krocích, zkonstruovali bychom tak posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jejíž dva libovolné členy s různým indexem jsou od sebe vzdáleny alespoň o ϵ, tj.

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n)(\rho(x_m, x_n) \geq \epsilon).$$

Taková posloupnost nemůže mít konvergentní podposloupnost (dokažte), což je spor se sekvenční kompaktností X. □

Nyní můžeme dokázat implikaci:

$$(X,\rho) \text{ sekvenčně kompaktní } \Rightarrow (X,\rho) \text{ kompaktní.}$$

Uvažujme otevřené pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sekvenčně kompaktního prostoru (X,ρ). Podle Lemma 2.91

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists \alpha \in I)(B_x(\epsilon) \subset U_\alpha).$$

Navíc podle Lemma 2.92

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\exists x_1, \ldots, x_n)\left(X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{x_i}(\epsilon)\right).$$

Označíme-li tedy $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in I$ ty indexy, pro které platí, že

$$(\forall i \in \hat{n})(B_{x_i}(\epsilon) \subset U_{\alpha_i}),$$

je systém $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_2}\}$ konečné podpokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ prostoru X. □

Všimněte si, že z Lemma 2.92 a právě dokázané Věty 2.90 vyplývá, že kompaktní podmnožina metrického prostoru musí být omezená (dokonce totálně omezená). Připomeneme-li ještě Větu 2.82 dostáváme následující tvrzení.

Věta 2.93: Buď (X, ρ) metrický prostor a $A \subset X$ kompaktní. Potom A je omezená a uzavřená.

Poznámka: Opačná implikace neplatí a to ani pokud omezenost nahradíme totální omezeností, viz Cvičení 2.42. Ukazuje se, že místo uzavřenosti, zde klíčovou úlohu hraje tzv. úplnost, o které bude řeč až v následující kapitole, viz Věta 2.116. Pokud se ovšem omezíme na konečnědimenzionální normované prostory, jsou kompaktní množiny právě ty současně omezené a uzavřené, viz Věta 2.104.

V další části budeme studovat, jaké důsledky má kompaktnost pro spojitá zobrazení.

Věta 2.94: Buď $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ spojité a (X, τ_X) kompaktní. Potom je $f(X)$ kompaktní.

Důkaz. Buď $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ otevřené pokrytí $f(X)$. Podle Věty 2.61 jsou vzory $f^{-1}(U_\alpha)$ otevřené pro každé $\alpha \in I$. Dále z inkluze

$$f(X) \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

plyne

$$X \subset \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha).$$

Tedy $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí X. Protože je X kompaktní, existuje konečné podpokrytí, tzn. $\exists n \in \mathbb{N}$ a $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ tak, že

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_i}),$$

neboli

$$f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}.$$

To znamená, že $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$ je konečné podpokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ prostoru $f(X)$. $\square$

Jednoduché avšak velmi zásadní pozorování je následující věta. Připomeňme, že $\mathbb{R}$ uvažujeme s obvyklou topologií, není-li řečeno jinak.

Věta 2.95: Buď f spojitá reálná funkce na kompaktním prostoru (X, τ), tedy $f : X \to \mathbb{R}$. Potom f nabývá svého infima a suprema na X, tzn.

$$(\exists x_{\min}, x_{\max} \in X) \left(f(x_{\min}) = \inf_{x \in X} f(x) \quad \text{a} \quad f(x_{\max}) = \sup_{x \in X} f(x) \right).$$

Důkaz. Podle Věty 2.94 je $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompaktní. Z Věty 2.93 víme, že $f(X)$ je omezená a uzavřená. Nyní si stačí uvědomit, že pro libovolnou omezenou a uzavřenou množinu $A \subset \mathbb{R}$ plyne z definice infima a suprema, že $\inf A \in A$ a $\sup A \in A$. Pro $A = f(X)$ tak dostaneme tvrzení věty. $\square$

Spojitost a stejnoměrná spojitost jsou na kompaktních metrických prostorech totožné pojmy.

Věta 2.96 (Cantor)**:** Buď $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ spojité zobrazení mezi metrickými prostory a (X, ρ) kompaktní. Potom f je spojité stejnoměrně.

Důkaz. Je třeba dokázat, že

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in X, \rho(x, y) < \delta)(\sigma(f(x), f(y)) < \epsilon).$$

Důkaz provedeme sporem. Tedy předpokládejme

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x, y \in X, \rho(x, y) < \delta)(\sigma(f(x), f(y)) \geq \epsilon).$$

Položíme-li $\delta = 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}$, dostaneme tak posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ a $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ takové, že

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \sigma(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon \right).$$

Jelikož je X kompaktní, Věta 2.90 implikuje, že $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ má konvergentní podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^\infty$, jejíž limitu si označme x. Vlastnost $(\forall n \in \mathbb{N})(\rho(x_n, y_n) < 1/n)$ implikuje, že také $y_{k_n} \to x$. Ze spojitosti f potom dostaneme, že $f(x_{k_n}) \to f(x)$ a $f(y_{k_n}) \to f(x)$, což je ve sporu s vlastností

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\sigma(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \geq \epsilon\right).$$

□

Cílem poslední části výkladu věnovanému kompaktnosti bude ukázat, že na *konečnědimenzionálním* normovaném prostoru je množina kompaktní, právě když je omezená a uzavřená. Důležitou ingrediencí pro odvození této věty je kompaktnost uzavřeného n-intervalu $\times_{i=1}^n [a_i, b_i]$. Jako první krok si dokážeme, že uzavřený interval $[a, b]$ je kompaktní množina v $\mathbb{R}$. Tato věta se někdy též označuje jako Heineova–Borelova, my si ale toto označení necháme pro větu mnohem obecnější.

Lemma 2.97: Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom $[a, b]$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}$.

Důkaz. Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $[a, b]$. Ukážeme, že $\mathcal{U}$ má konečné podpokrytí.

Definujme množiny

$$S := \{x \in [a, b] \mid \text{ interval } [a, x] \text{ je pokryt konečně mnoha množinami z } \mathcal{U}\}.$$

Jistě $a \in S$, neboť množina $\{a\}$ je pokryta jedinou množinou z $\mathcal{U}$, a tedy $S \neq \emptyset$. Označme $s := \sup S$. Zřejmě $a \leq s \leq b$. Ukážeme, že $s \in S$ a $s = b$, z čehož už bude plynout existence konečného podpokrytí $\mathcal{U}$ intervalu $[a, b]$.

Bod s musí být pokryt nějakou množinou $V \in \mathcal{U}$. Protože je V otevřená, existuje $\epsilon > 0$ tak, že $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subset V$. Bod $s - \epsilon$ není horní závora S, a proto musí existovat $y \in (s - \epsilon, s]$ takové, že $y \in S$. Tzn., že interval $[a, y]$ je pokryt konečně mnoha množinami z $\mathcal{U}$. Označme si je $U_1, \ldots, U_n$.

Uvažujme libovolné $z \in [a, b]$ takové, že $y \leq z < s + \epsilon$. Potom

$$[a, z] \subset [a, y] \cup (s - \epsilon, s + \epsilon) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup V.$$

Tzn., že $[a, z]$ je pokryt konečně mnoha množinami z $\mathcal{U}$, neboli $z \in S$. Z toho speciálně vyplývá, že $s \in S$ a také, že $s = b$, jinak by s nebyla horní závora S. $\square$

Abychom zobecnili předchozí větu do prostoru $\mathbb{R}^n$, musíme nejprve zavést tzv. *produktovou topologii* na kartézském součinu konečně mnoha topologických prostorů. Tuto topologii lze zavést i na kartézském součinu nekonečně mnoha topologických prostorů. V našem výkladu to ale nebudeme potřebovat.

Definice 2.98 (Produktová topologie)**:** Buďte $n \in \mathbb{N}$ a $(X_1, \tau_1), \ldots, (X_n, \tau_n)$ topologické prostory. *Produktová topologie* $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_n$ na kartézském součinu množin $X_1 \times \cdots \times X_n$ je topologie určená bází

$$\{A_1 \times \cdots \times A_n \mid A_1 \in \tau_1, \ldots, A_n \in \tau_n\}.$$

Poznámka: Korektnost definice produktové topologie, tedy že systém $\{A_1 \times \cdots \times A_n \mid A_1 \in \tau_1, \ldots, A_n \in \tau_n\}$ skutečně určuje topologii na $X_1 \times \cdots \times X_n$ plyne z Věty 2.26 (ověřte).

Není-li řečeno jinak uvažujeme na kartézském součinu konečně mnoha topologických prostorů topologii produktovou. Prostor $\mathbb{R}^n$ lze chápat jako kartézský součin n kopií $\mathbb{R}$. Obvyklá topologie na $\mathbb{R}^n$ indukovaná euklidovskou metrikou a produktová topologie určená obvyklou topologií na $\mathbb{R}$ jsou totožné, viz Cvičení 2.46. Následující tvrzení je speciální případ tzv. *Tychonovovy věty*, která platí i pro nekonečný kartézský součin topologických prostorů.

Věta 2.99 (Tychonov)**:** Kartézský součin konečně mnoha kompaktních topologických prostorů je kompaktní prostor.

Důkaz. Důkaz stačí provést pro dva kompaktní prostory (X, τ_X) a (Y, τ_Y). Tvrzení pro libovolný konečný počet prostorů pak dokážeme indukcí (rozmyslete).

Budeme potřebovat jedno pomocné tvrzení, tzv. *tubulární lemma.*

Lemma 2.100: Buďte (X, τ_X), (Y, τ_Y) topologické prostory, $K \subset Y$ kompaktní a $U \subset X \times Y$ otevřená. Potom je množina

$$V := \{x \in X \mid \{x\} \times K \subset U\}$$

otevřená v X.

Důkaz Lemma 2.100. Nechť $x \in V$. Protože je U otevřená, máme

$$(\forall y \in K)(\exists A_y \in \tau_X, B_y \in \tau_Y)((x, y) \in A_y \times B_y \subset U).$$

Systém $\{B_y \mid y \in K\}$ je otevřené pokrytí kompaktní množiny K, a proto

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\exists y_1, \ldots, y_n \in K)\,(K \subset B_{y_1} \cup \cdots \cup B_{y_n})\,.$$

Označme

$$H_x := A_{y_1} \cap \cdots \cap A_{y_n}$$

Zřejmě $x \in H_x \in \tau_X$. Dále je také

$$H_x \times K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (H_x \times B_{y_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (A_{y_i} \times B_{y_i}) \subset U,$$

a tedy $H_x \subset V$. Dokázali jsme, že libovolný bod z V leží ve V i s nějakým svým okolím, a proto je V otevřená. □

Nyní se vrátíme k samotnému důkazu Věty 2.99. Předpokládejme, že (X, τ_X) a (Y, τ_Y) jsou kompaktní topologické prostory a $\mathcal{U}$ otevřené pokrytí $X \times Y$.

Buď $x \in X$ fixní. Snadno se ověří, že zobrazení $f_x : Y \to X \times Y : y \mapsto (x, y)$ je spojité, a proto je podle Věty 2.94 množina $f_x(Y) = \{x\} \times Y$ kompaktní. Proto

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\exists U_1, \ldots, U_n \subset \mathcal{U})(\{x\} \times Y \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n).$$

Označme

$$V_x := \{x' \in X \mid \{x'\} \times Y \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n\}.$$

Potom $x \in V_x$ a podle Lemma 2.100 je V_x otevřená.

Systém $\{V_x \mid x \in X\}$ je tedy otevřené pokrytí X. Z kompaktnosti X plyne

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\exists x_1, \ldots, x_m \in X)(X \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_m}).$$

Potom

$$X \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i} \times Y.$$

Z předchozího odstavce plyne, že každá z množin $V_{x_i} \times Y$, kde $i \in \hat{m}$, je pokryta konečně mnoha množinami z $\mathcal{U}$. Sjednocením všech těchto množin dostaneme konečné podpokrytí $\mathcal{U}$ prostoru $X \times Y$. □

Kombinací Lemma 2.97 a Věty 2.99 dostaneme okamžitě následující důsledek.

Důsledek 2.101: Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ takové, že $a_i < b_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Potom $\times_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ je kompaktní podmnožina prostoru $\mathbb{R}^n$.

Nyní si ukážeme důležitou větu, ze které plyne, že všechny normy na *konečnědimenzionálním* lineárním prostoru indukují tutéž topologii. Tento fakt vzápětí použijeme v důkazu Heineovy–Borelovy věty. Nezávisle na tom má tato věta zásadní význam v analýze funkcí více proměnných.

Věta 2.102: Libovolné dvě normy na lineárním prostoru *konečné dimenze* jsou ekvivalentní.

Poznámka: Větu dokážeme pro lineární prostory nad $\mathbb{R}$. Je-li tělesem $\mathbb{C}$, postupuje se podobně. Detaily přenecháme čtenáři.

Důkaz Věty 2.102. Buď V_n lineární prostor nad $\mathbb{R}$, $\dim V_n = n \in \mathbb{N}$. Ve V_n zvolme bázi $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ a definujme normu

$$\|x\|_{\mathcal{X},\infty} := \max_{i \in \hat{n}} |x_i^{\#}(x)|, \quad x \in V_n,$$

kde $x_i^{\#}(x)$ je i-tá souřadnice x v bázi $\mathcal{X}$ (ověřte, že jde skutečně o normu na V_n).

Uvažujme dále nějakou (libovolnou) normu $\|\cdot\|$ na V_n. Ukážeme, že

$$(\exists c, \tilde{c} > 0)(\forall x \in V_n)\,(c\|x\|_{\mathcal{X},\infty} \leq \|x\| \leq \tilde{c}\|x\|_{\mathcal{X},\infty})\,.$$

Tedy že normy $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty}$ na V_n jsou ekvivalentní. Protože je relace ekvivalence norem tranzitivní, plyne odtud, že také libovolné dvě normy na V_n musí být ekvivalentní.

Jedna nerovnost plyne rovnou z obecných vlastností normy, neboť pro $x \in V_n$ máme

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i^{\#}(x)x_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i^{\#}(x)|\|x_i\| \leq \max_{j\in\hat{n}} |x_j^{\#}(x)| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| = \tilde{c}\|x\|_{\mathcal{X},\infty},$$

kde jsme označili

$$\tilde{c} := \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|.$$

Tím je jedna nerovnost dokázána. Navíc z odhadů výše také plyne, že je identické zobrazení $\mathrm{id} : (V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty}) \to (V_n, \|\cdot\|)$ spojité.

K důkazu druhé nerovnosti budeme potřebovat následující pomocné tvrzení.

Lemma 2.103: Množina

$$S := \{x \in V_n \mid \|x\|_{\mathcal{X},\infty} = 1\}$$

je kompaktní podmnožina $(V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty})$.

Důkaz Lemma 2.103. Nejprve uvažme zobrazení $\Psi : \mathbb{R}^n \to V_n$ definované vztahem

$$\Psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

pro každé $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Protože

$$\|\Psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\|_{\mathcal{X},\infty} = \max_{i\in\hat{n}} |\alpha_i| = \|(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\|_\infty,$$

je zobrazení Ψ, jakožto zobrazení z $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ do $(V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty})$, spojité.

Zřejmě

$$\|\Psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\|_{\mathcal{X},\infty} = \max_{i\in\hat{n}} |\alpha_i| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [-1, 1]^n,$$

z čehož plyne

$$\Psi\left([-1, 1]^n\right) = \overline{B} := \{x \in V_n \mid \|x\|_{\mathcal{X},\infty} \leq 1\}.$$

Podle Důsledku 2.101 je množina $[-1, 1]^n$ kompaktní v prostoru $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, a proto je její spojitý obraz $\overline{B} = \Psi\left([-1, 1]^n\right)$ kompaktní v $(V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty})$, viz Věta 2.94.

Abychom ukázali také kompaktnost množiny S, stačí nyní dokázat, že S je uzavřená podmnožina $\overline{B}$ a aplikovat Větu 2.81. Zřejmě $S \subset \overline{B}$. Připomeneme-li si, že je norma spojitá; přesněji v tomto případě zobrazení $f : (V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty}) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definované vztahem

$$f(x) := \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty}$$

je spojité a navíc $S = f^{-1}(\{1\})$, vyplývá uzavřenost S z uzavřenosti množiny $\{1\}$ a Věty 2.61.

$\square$

Připomeňme, že identita $\mathrm{id} : (V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty}) \to (V_n, \|\cdot\|)$ i norma $\|\cdot\| : (V_n, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ jsou spojitá zobrazení. Potom podle Věty 2.95 musí spojité (složené) zobrazení $\|\mathrm{id}\| : (V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty}) \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$ nabývat svého minima na kompaktní množině S, tzn., že existuje $y_{\min} \in S$ takové, že

$$(\forall y \in S)(\|y\| \geq c),$$

kde jsme označili $c := \|y_{\min}\|$. Všimněte si, že $c > 0$, tedy $c \neq 0$, neboť $y_{\min} \neq 0$, protože $0 \notin S$.

Nyní je-li $0 \neq x \in V_n$, je vektor

$$y := \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{X},\infty}} \in S,$$

a proto

$$c \leq \|y\| = \left\| \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{X},\infty}} \right\|,$$

neboli

$$c\|x\|_{\mathcal{X},\infty} \leq \|x\|.$$

$\square$

Nyní si konečně můžeme ukázat, že v konečnědimenzionálním normovaném prostoru lze implikaci ve Větě 2.93 obrátit.

Věta 2.104 (Heine–Borel)**:** V normovaném prostoru *konečné dimenze* je množina kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.

Důkaz. Důkaz provedeme pouze pro lineární prostor nad reálným tělesem. Buď tedy $(V_n, \|\cdot\|)$ normovaný prostor nad $\mathbb{R}$, $\dim V_n = n \in \mathbb{N}$ a $A \subset V_n$. Jelikož máme Větu 2.93, stačí dokázat implikaci:

$$A \text{ omezená a uzavřená} \quad \Rightarrow \quad A \text{ kompaktní.}$$

Ukážeme, že se stačí omezit na prostor $\mathbb{R}^n$. Buď $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ báze V_n a $\Phi_{\mathcal{X}} : V_n \to \mathbb{R}^n$ souřadnicový izomorfismus

$$\Phi_{\mathcal{X}}(x) := (x_1^{\#}(x), \ldots, x_n^{\#}(x)), \quad x \in V_n.$$

Zobrazení $\Phi_{\mathcal{X}}$ je bijekce a navíc je spojité i se svojí inverzí jako zobrazení mezi V_n a $\mathbb{R}^n$ s libovolnými normami. To vyplývá z Věty 2.102 a vztahu

$$\|\Phi_{\mathcal{X}}(x)\|_\infty = \max_{i \in \hat{n}} |x_i^{\#}(x)| = \|x\|_{\mathcal{X},\infty},$$

který platí pro každé $x \in V_n$, kde $\|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty}$ je norma na V_n (jako v důkazu Věty 2.102). Jinými slovy $\Phi_{\mathcal{X}}$ je homeomorfismus z V_n do $\mathbb{R}^n$ s libovolnými normami. Odtud plyne, že

$$A \text{ je kompaktní} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\mathcal{X}}(A) \text{ je kompaktní,}$$

viz Věta 2.94 a

$$A \text{ je uzavřená} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\mathcal{X}}(A) \text{ je uzavřená,}$$

viz Věta 2.61. Platí také

$$A \text{ je omezená} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\mathcal{X}}(A) \text{ je omezená,}$$

(ověřte).

Stačí tedy uvažovat speciální případ $V_n = \mathbb{R}^n$. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je omezená a uzavřená. Z omezenosti A vyplývá, že A musí být podmnožinou nějakého n-intervalu $\times_{i=1}^n [a_i, b_i]$, který je kompaktní podle Důsledku 2.101. Protože je A navíc uzavřená, plyne z Věty 2.81, že A je kompaktní. □

Následující tvrzení je přímým důsledkem předchozích vět. Pro jeho důležitost ho ovšem zformulujeme jako větu. Toto tvrzení jako fundamentální vlastnost $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ bylo nezávisle na sobě objeveno B. Bolzanem a K. Weierstrassem.

Věta 2.105 (Bolzano–Weierstrass)**:** Každá *omezená* posloupnost v normovaném prostoru *konečné dimenze* má konvergentní podposloupnost.

Důkaz. Buď $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost z nějakého konečnědimenzionálního normovaného prostoru. Potom je množina

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$$

omezená. Jelikož je A podmnožina normovaného prostoru, je i její uzávěr $\overline{A}$ omezený (ověřte). Podle Heinovy–Borelovy věty 2.104 je $\overline{A}$ kompaktní. Dále podle Věty 2.90 je $\overline{A}$ sekvenčně kompaktní, a proto posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, jejíž členy jsou z $\overline{A}$, má konvergentní podposloupnost. □

Poznámka: Bolzanova–Weierstrassova věta neplatí v metrických prostorech ani v normovaných prostorech nekonečné dimenze, viz Cvičení 2.47

2.5 Úplnost

Celá tato část se bude týkat pouze *metrických prostorů.*

Definice 2.106 (Cauchyovská posloupnost)**:** Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ v metrickém prostoru (X, ρ) nazveme *cauchyovskou*, právě když

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(\rho(x_m, x_n) < \epsilon)$$

nebo ekvivalentně

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon).$$

Lemma 2.107: Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost v metrickém prostoru (X, ρ). Potom platí:

1. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, pak je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská.
2. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská, pak je i libovolná její podposloupnost cauchyovská.
3. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská, pak je omezená.
4. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská a má konvergentní podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, tj. $x_{k_n} \to x$ pro nějaké $x \in X$, potom $x_n \to x$.

Důkaz. 1. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, potom existuje $x \in X$ tak, že $x_n \to x$. Z definice konvergence plyne, že

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\left(\rho(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Zvolme tedy $\epsilon > 0$. Potom s použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme pro libovolné $m, n \geq n_0$ odhad

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x) + \rho(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

a tedy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.

2. Tvrzení plyne přímo z definice cauchyovské posloupnosti.

3. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Definice cauchyovské posloupnosti pro $\epsilon = 1$ implikuje existenci $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že všechny členy posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, až na konečně mnoho výjimek, leží v kouli $B_{x_{n_0}}(1)$. Taková posloupnost je nutně omezená.

4. Předpokládejme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská a $x_{k_n} \to x$. Připomeňme, že posloupnost indexů k_n u vybrané posloupnosti je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel, a proto $k_n \geq n$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Protože je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská, plyne z definice, že

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_1)\left(\rho(x_n, x_{k_n}) < \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Dále z předpokladu $x_{k_n} \to x$ máme

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_2)\left(\rho(x_{k_n}, x) < \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Nyní stačí ke zvolenému $\epsilon > 0$ položit $n_0 := \max(n_1, n_2)$ a z výroků výše dostaneme, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{k_n}) + \rho(x_{k_n}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

neboli $x_n \to x$. $\square$

Obrácená implikace z 1. tvrzení Lemma 2.107 obecně neplatí. Metrické prostory, kde tato implikace platí pro každou posloupnost, se nazývají *úplné*.

Definice 2.108 (Úplný prostor, úplná množina)**:** Metrický prostor (X, ρ) nazveme *úplný*, právě když každá cauchyovská posloupnost z X je konvergentní (tzn., že má v X limitu). Podobně množinu $A \subset X$ nazveme *úplnou*, právě když každá cauchyovská posloupnost z A má v A limitu.

Definice 2.109 (Banachův prostor, Hilbertův prostor)**:** Úplný normovaný prostor se nazývá *Banachův prostor*. Úplný pre-Hilbertův prostor se nazývá *Hilbertův prostor*.

Příklad 2.110: Normovaný prostor V *konečné dimenze* je úplný. Tedy např. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ nebo $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ s libovolnými normami jsou všechno příklady úplných prostorů. Tvrzení, že $(V, \|\cdot\|)$ je úplný není nic jiného, než jedna implikace z Bolzanovy–Cauchyovy podmínky:

$$x_n \to x \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(\|x_m - x_n\| < \epsilon).$$

Netriviální implikaci $(\Leftarrow)$ odvodíme nyní snadno z již dokázaných vět. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská posloupnost v $(V, \|\cdot\|)$, je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená podle Lemma 2.107. Potom podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty 2.105 má $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergetní podposloupnost a opět podle Lemma 2.107 musí být i posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní.

Další příklad ilustruje to, že úplnost je metrická vlastnost. Na $\mathbb{R}$ zvolíme jinou metriku než v Příkladu 2.110 a výsledný prostor již nebude úplný.

Příklad 2.111: Zobrazení $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované pro $x, y \in \mathbb{R}$ vztahem

$$\rho(x, y) := |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$$

je metrika na $\mathbb{R}$ (ověřte). Ukážeme, že metrický prostor $(\mathbb{R}, \rho)$ není úplný.

Uvažujme posloupnost s členy $x_n := n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pro $n, p \in \mathbb{N}$ máme

$$\rho(x_{n+p}, x_n) = \operatorname{arctg}(n + p) - \operatorname{arctg} n \leq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n.$$

Jelikož výraz napravo jde k nule pro $n \to \infty$, je posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská v $(\mathbb{R}, \rho)$. Na druhou stranu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ není konvergentní v $(\mathbb{R}, \rho)$. Kdyby byla konvergetní, muselo by existovat $x \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0,$$

což znamená

$$0 = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg} x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

Rovnost $\operatorname{arctg} x = \pi/2$ ovšem neplatí pro žádné $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 2.112: Prostor $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ není úplný, neboť v něm existují cauchyovské posloupnosti, které nemají limitu v $\mathbb{Q}$. Stačí vzít jakoukoliv posloupnost racionálních čísel, která konverguje k číslu iracionálnímu jako je např.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Příklad 2.113: Prostor $(\mathbb{Q}, \rho_d)$, kde ρ_d je diskrétní metrika, je úplný. Stačí si rozmyslet, že cauchyovské posloupnosti v $(\mathbb{Q}, \rho_d)$ jsou právě ty posloupnosti, které jsou od jistého indexu konstantní. Takové posloupnosti jsou konvergentní v $(\mathbb{Q}, \rho_d)$.

Následující dvě věty ukazují, že je jistý vztah mezi uzavřeností a úplností množiny.

Věta 2.114: Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $A \subset X$ úplná množina. Potom je A uzavřená.

Důkaz. Předpokládejme, že $A \neq \emptyset$, jinak je tvrzení triviální. Nechť $x \in \overline{A}$. Potom podle 2. tvrzení Věty 2.52 existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v A taková, že $x_n \to x$. Podle 1. tvrzení Lemma 2.107 je konvergetní posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská. A protože je A úplná, má $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu v A, tj. $x \in A$. Tedy $A = \overline{A}$. □

Věta 2.115: Nechť (X, ρ) je ***úplný*** metrický prostor a $A \subset X$. Je-li A uzavřená, pak je A úplná.

Důkaz. Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská posloupnost z A. Úplnost (X, ρ) implikuje, že je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, tzn. $\exists x \in X$ a $x_n \to x$. Z uzavřenosti A plyne, že limita $x \in A$. Celkem tedy má libovolná cauchyovská posloupnost z A limitu v A, a proto je A úplná. □

Dokážeme si ještě jednu větu o vztahu kompaktnosti a úplnosti metrického prostoru. Z toho, co už víme, snadno vyplývá že (X, ρ) kompaktní metrický prostor je úplný. Stačí si uvědomit, že ze sekvenční kompaktnosti (X, ρ), viz Věta 2.90, plyne, že každá cauchyovská posloupnost v (X, ρ) má konvergentní podposloupnost a aplikovat tvrzení 4. Lemma 2.107. Naopak to samozřejmě neplatí, jak ilustruje např. prostor $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, který je úplný, ale ne kompaktní. Ani dodatečný předpoklad omezenosti (X, ρ) by ještě nestačil. Klíčem k opačné implikaci je omezenost totální, viz Lemma 2.92.

Věta 2.116: Metrický prostor (X, ρ) je kompaktní právě tehdy, když je (X, ρ) úplný a totálně omezený.

Důkaz. Je-li (X, ρ) kompaktní, potom z diskuze výše už víme, že je úplný. Totální omezenost kompaktního prostoru (X, ρ) plyne přímo z Věty 2.90 a Lemma 2.92. Je třeba tedy dokázat implikaci opačnou.

Předpokládejme, že (X, ρ) je úplný a totálně omezený. V pomocném tvrzení níže ukážeme, že z totální omezenosti (X, ρ) plyne, že každá posloupnost v (X, ρ) má cauchyovskou podposloupnost. Úplnost (X, ρ) implikuje, že tato cauchyovská podposloupnost je konvergentní. To znamená, že je prostor (X, ρ) sekvenčně kompaktní, a tedy i kompaktní, jak víme z Věty 2.90.

Zbývá nám tedy dokázat následující pomocné tvrzení.

Lemma 2.117: V totálně omezeném metrickém prostoru (X, ρ) má každá posloupnost cauchyovskou podposloupnost.

Důkaz Lemma 2.117. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost v X. Z totální omezenosti (X, ρ) plyne, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ lze X pokrýt konečně mnoha koulemi o poloměru $1/n$, jejichž středy jsou v množině, kterou označíme S_n. Tedy

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists S_n \subset X \text{ konečná }) \left(X = \bigcup_{y \in S_n} B_y(1/n) \right)$$

Pro $n = 1$ musí existovat $y_1 \in S_1$ takové, že koule $B_{y_1}(1)$ obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Označme si jejich indexy

$$A_1 := \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B_{y_1}(1)\}.$$

Podobně, je-li $n = 2$, existuje $y_2 \in S_2$ takové, že koule $B_{y_2}(1/2)$ obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n\in A_1}$ a označme

$$A_2 := \{n \in A_1 \mid x_n \in B_{y_2}(1/2)\}.$$

Všimněte si, že $A_2 \subset A_1$. Tímto způsobem najdeme $y_k \in S_k$ a nekonečné množiny

$$A_k := \{n \in A_{k-1} \mid x_n \in B_{y_k}(1/k)\}$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$ (zde je $A_0 := \mathbb{N}$). Platí $A_{k+1} \subset A_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Nyní zvolme ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $k_n \in A_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Pro $n, p \in \mathbb{N}$ z trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\rho(x_{k_n}, x_{k_{n+p}}) \leq \rho(x_{k_n}, y_n) + \rho(y_n, x_{k_{n+p}})$$

Protože $k_n \in A_n$, je $\rho(x_{k_n}, y_n) < 1/n$. Podobně z $k_{n+p} \in A_{n+p} \subset A_n$, plyne $\rho(y_n, x_{k_{n+p}}) < 1/n$. Odtud dostáváme

$$\rho(x_{k_n}, x_{k_{n+p}}) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n},$$

z čehož už jednoduše plyne, že posloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. □

□

V poslední části kapitoly o úplnosti si dokážeme Banachovu větu o pevném bodě kontrahujícího zobrazení.

Definice 2.118 (Kontrahující zobrazení)**:** Buď (X, ρ) metrický prostor. Zobrazení $f : (X, \rho) \to (X, \rho)$ nazýváme *kontrahující*, právě když

$$(\exists q \in [0, 1))(\forall x, y \in X)\left(\rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y)\right).$$

Poznámka: Všimněte si, že kontrahující zobrazení je spojité.

Věta 2.119 (Banachova o pevném bodě)**:** Nechť (X, ρ) je *úplný* metrický prostor a $f : (X, \rho) \to (X, \rho)$ kontrahující zobrazení. Potom má f právě jeden *pevný bod*, tzn.

$$(\exists_1 x \in X)(f(x) = x).$$

Důkaz. Nejprve dokážeme existenci pevného bodu f. Zvolme libovolně $x_0 \in X$ a definujme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ rekurentně podle předpisu

$$x_n := f(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ukážeme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.

Protože pro $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq q\rho(x_{n-1}, x_n),$$

dokážeme indukcí, že

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq q^n \rho(x_0, x_1).$$

Potom s využitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme pro $n, p \in \mathbb{N}$ odhad

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_{n+p}) &\leq \sum_{i=1}^{p} \rho(x_{n+i-1}, x_{n+i}) \leq \rho(x_0, x_1) \sum_{i=1}^{p} q^{n+i-1} \leq \rho(x_0, x_1) q^n \sum_{i=0}^{\infty} q^i \\ &= \rho(x_0, x_1) \frac{q^n}{1-q},\end{aligned}$$

kde jsme využily podstatný předpoklad $q \in [0, 1)$. Odtud k libovolnému $\epsilon > 0$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby

$$\rho(x_0, x_1) \frac{q^{n_0}}{1-q} < \epsilon.$$

Potom pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ je $\rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$, a tedy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.

Prostor (X, ρ) je úplný, a proto $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nějakému $x \in X$. Protože je f spojité, neboť je kontrahující, máme také $f(x_n) \to f(x)$. Nyní stačí provést limitní přechod v rovnici $x_n = f(x_{n-1})$ pro $n \to \infty$ a dostaneme rovnost $x = f(x)$. Bod x je tedy pevným bodem f.

Pro důkaz jednoznačnosti předpokládejme, že existují $x, y \in X$ takové, že $x = f(x)$ a $y = f(y)$. Potom

$$\rho(x, y) = \rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y).$$

Je-li $x \neq y$, potom $\rho(x, y) \neq 0$ a poslední nerovnost implikuje $q \geq 1$, což je ve sporu s předpokladem. Proto musí být $x = y$. □

Banachova věta o pevném bodě má v matematice mnoho aplikací. Také idea důkazu je pro aplikace podstatná. Všimněte si, že z důkazu plyne, že „iniciační bod“ x_0 lze volit zcela libovolně a přesto se iterováním

$$f^{(n)}(x_0) = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n\text{krát}}(x_0)$$

limitně blížíme k pevnému bodu zobrazení f. Tato jednoduchá myšlenka se používá např. v iteračních metodách numerické analýzy nebo k důkazu existence a jednoznačnosti řešení různorodých úloh (parciálně diferenciální rovnice, integrální rovnice, nelineární problémy), kdykoliv můžeme studovaný problém formulovat jako rovnost $f(x) = x$ s kontrahujícím zobrazením f na úplném prostoru.

Ne vždy ale pracujeme s kontrahujícím zobrazením. Dnes existuje řada zobecnění či rozšíření Banachovy věty o pevném bodě a také další věty implikující existenci pevného bodu zobrazení. Spolu s Banachovou větou patří mezi nejznámější takové výsledky ještě *Brouwerova věta o pevném bodě*. Jelikož je tato věta jedním z nejdůležitějších výsledků analýzy a topologie 1. poloviny 20. století, větu si zde zformulujeme. Nicméně její důkaz je velice netriviální a zcela jistě nad rámec tohoto kurzu, a proto jej neuvádíme. Lze ho najít např. v [1].

Věta 2.120 (Brouwerova o pevném bodě)**:** Buď $(V, \|\cdot\|)$ normovaný konečnědimenzionální prostor (nad $\mathbb{R}$) a $K \subset V$ *kompaktní* a *konvexní* množina. Potom každé *spojité* zobrazení $f : K \to K$ má pevný bod.

Poznámka: Připomeňme, že množina $K \subset V$ je konvexní, právě když

$$(\forall x, y \in K)(\forall \lambda \in [0,1])(\lambda x + (1-\lambda)y \in K).$$

Pevný bod zobrazení z Brouwerovy věty nemusí být jediný. Zobecnění Brouwerovy věty, kde je předpoklad konečné dimenze nahrazen úplností $(V, \|\cdot\|)$, je známé jako *Schauderova věta o pevném bodě.*

2.6 Souvislost

Nakonec se ještě jednou vrátíme k obecným topologickým prostorům a prostudujeme některé vlastnosti týkající se tzv. souvislosti prostorů.

Definice 2.121 (Obojetná množina, souvislý prostor)**:** Buď (X, τ) topologický prostor. Množina $A \subset X$ se nazývá *obojetná*, je-li současně otevřená i uzavřená. Prostor (X, τ) nazveme *souvislý*, právě když jediné obojetné podmnožiny X jsou $\emptyset$ a X.

Definice 2.122 (Souvislá množina)**:** Buď (X, τ) topologický prostor. Množinu $\emptyset \neq A \subset X$ nazveme *souvislou*, právě když (A, τ_A) je souvislý jakožto topologický podprostor (X, τ). Prázdná množina je souvislá.

Příklad 2.123: Prostor $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií τ je souvislý, ale důkaz tohoto tvrzení uvedeme později, viz Lemma 2.128. Množina $A = [0,1) \cup (2,3]$ není souvislá, neboť množiny $[0,1)$ a $(2,3]$ jsou obojetné v topologii podprostoru (A, τ_A).

Příklad 2.124: Je-li X množina obsahující alespoň 2 prvky a τ_d diskrétní topologie na X, potom (X, τ_d) není souvislý, neboť každá podmnožina X je obojetná.

Souvislost prostoru lze vyjádřit několika alternativními způsoby, viz také Cvičení 2.49.

Lemma 2.125: Buď (X, τ) topologický prostor. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. (X, τ) *není* souvislý,
2. $(\exists A, B \in \tau)(A, B \neq \emptyset)(A \cap B = \emptyset \ \wedge \ A \cup B = X)$,
3. $(\exists A, B \in c\tau)(A, B \neq \emptyset)(A \cap B = \emptyset \ \wedge \ A \cup B = X)$.

Důkaz. Dokážeme jen ekvivalenci 1. $\Leftrightarrow$ 2. Pro důkaz ekvivalence 2. $\Leftrightarrow$ 3. stačí použít to, že doplněk otevřené množiny je uzavřená množina a naopak.

Předpokládejme, že (X, τ) není souvislý. Potom existuje obojetná množina $A \subset X$ taková, že $A \neq \emptyset$, ani $A \neq X$. Položme $B := X \setminus A$. Potom $A \in \tau$ a $B \in \tau$, protože A je také uzavřená. Zřejmě také $A \cap B = \emptyset$ a $A \cup B = X$, čímž dostáváme tvrzení 2.

Naopak předpokládáme-li platnost výroku 2., je množina $A \in \tau$ a také $A = X \setminus B \in c\tau$, protože $B \in \tau$. Tedy A je obojetná. Navíc $A \neq \emptyset$ a $A = X \setminus B \neq X$, protože $B \neq \emptyset$. Z toho plyne, že (X, τ) není souvislý. $\square$

Věta 2.126: Buď (X, τ) topologický prostor a $A_\alpha \subset X$ *souvislé* množiny pro každé $\alpha \in I$, kde $I \neq \emptyset$ je indexová množina libovolné mohutnosti. Je-li

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset,$$

potom

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \quad \text{je souvislá.}$$

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že množina $A := \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$ není souvislá. Podle Lemma 2.125 existují *neprázdné* množiny B, C otevřené v (A, τ_A) a takové, že

$$B \cap C = \emptyset \quad \text{a} \quad B \cup C = A.$$

Potom $A_\alpha = (A_\alpha \cap B) \cup (A_\alpha \cap C)$, kde $\alpha \in I$. Protože jsou B a C otevřené v (A, τ_A) nadmnožiny A, jsou množiny $A_\alpha \cap B$ a $A_\alpha \cap C$ otevřené také v topologickém podprostoru $(A_\alpha, \tau_{A_\alpha})$. Jelikož je A_α souvislá musí být alespoň jedna z disjunktních množin $A_\alpha \cap B$, nebo $A_\alpha \cap C$ prázdná, jinak bychom dostali spor s tvrzením 2. Lemma 2.125. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A_\alpha \cap C = \emptyset$. Potom $A_\alpha \subset B$. Uvědomte si, že platí-li inkluze $A_\alpha \subset B$ pro jedno $\alpha \in I$, musí platit pro všechna $\alpha \in I$. Kdy totiž existovali $\alpha, \alpha' \in I$ tak, že $A_\alpha \subset B$ a $A_{\alpha'} \subset C$, byl by $A_\alpha \cap A_{\alpha'} = \emptyset$, což je ve sporu s předpokladem $\cap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$. Máme tedy

$$A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \subset B.$$

Odtud ovšem plyne, že $C = A \setminus B = \emptyset$, což je spor. □

Věta 2.127: Buď (X, τ) topologický prostor, $A \subset X$ a $A \subset B \subset \overline{A}$. Je-li A souvislá, potom je i B souvislá.

Důkaz. Větu stačí dokázat pro speciální případ $B = \overline{A}$. K tomu si stačí uvědomit, že B je uzávěr A v topologii (B, τ_B), protože je $B = B \cap \overline{A}$. Proto uvažujeme-li namísto (X, τ) prostor (B, τ_B) a víme-li, že uzávěr souvislé množiny je souvislý, dokážeme souvislost množiny B.

Ve zbytku důkazu ukážeme, že $\overline{A}$ je souvislá za předpokladu, že A je souvislá. K tomu opět použijeme Lemma 2.125 tentokrát formulaci z tvrzení 3. Pro spor předpokládejme, že

$$(\exists B, C \in c\tau_{\overline{A}})(B, C \neq \emptyset)(B \cap C = \emptyset \ \wedge \ B \cup C = \overline{A}).$$

Uvědomte si, že množina B je uzavřená v $(\overline{A}, \tau_{\overline{A}})$, tj. $B \in c\tau_{\overline{A}}$, právě když je B uzavřená v (X, τ), tj. $B \in c\tau$.

Z předpokladu $B \neq \emptyset$ plyne, že existuje nějaké $b \in B$. Protože $B = \overline{A} \setminus C \subset X \setminus C$ a $C \in c\tau$, existuje $H_b \subset X \setminus C$. Tudíž $H_b \cap C = \emptyset$.

Protože je také $b \in \overline{A}$, máme $H_b \cap A \neq \emptyset$. Vezměme nějaké $x \in H_b \cap A$. Protože $H_b \cap C = \emptyset$, je $x \notin C$, a proto $x \in A \cap B$. Celkem jsme tedy dokázali, že $A \cap B \neq \emptyset$. Analogickým postupem, který vychází z předpokladu $C \neq \emptyset$, se ukáže, že také $A \cap C \neq \emptyset$.

Nyní si stačí uvědomit, že neprázdné množiny $A \cap B, A \cap C \in c\tau_A$ a tvoří rozklad A, tj.

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{a} \quad (A \cap B) \cap (A \cap C) = \emptyset.$$

To je ale spor s tím, že A je souvislá. $\square$

Už v kapitole o kompaktnosti jsme si mohli uvědomit, že k důkazu důležitých vět (Heine–Borel, atd.) bylo důležitou ingrediencí dokázat kompaktnost uzavřeného intervalu. I v této části bude podstatné nejprve ukázat, že interval je souvislou množinou v $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Zanedlouho si ukážeme dokonce víc, viz Věta 2.131. Začneme tím, že si dokážeme souvislost $\mathbb{R}$.

Lemma 2.128: Prostor $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií je souvislý.

Důkaz. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je obojetná. Ukážeme, že je-li $A \neq \emptyset$, potom musí být $A = \mathbb{R}$. Přesněji dokážeme, že vezmeme-li libovolné $c \in \mathbb{R}$, potom $c \in A$.

Buď tedy $A \neq \emptyset$ a zvolme $c \in \mathbb{R}$. Pro spor předpokládejme, že $c \notin A$. Protože $A \neq \emptyset$, existuje nějaké $a \in A$. Tedy $a \neq c$. Předpokládejme, že $a < c$. V případě $a > c$ by se postupovalo analogicky.

Definujme

$$S := \{x \in A \mid x < c\} \equiv A \cap (-\infty, c).$$

Množina $S \neq \emptyset$, protože $a \in S$. Dále označme

$$s := \sup S.$$

Zřejmě $s \leq c$.

Protože $c \notin A$, můžeme psát $S = A \cap (-\infty, c]$. Z toho plyne, že S je uzavřená, neboť A je uzavřená. A proto $s \in \overline{S} = S$, z čehož plyne $s < c$.

Protože S je, jako průnik dvou otevřených množin A a $(-\infty, c)$, také otevřená a $s \in S$, existuje $\epsilon > 0$ tak, že $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subset S$. Z toho ovšem plyne, že např. prvek $s + \epsilon/2 \in S$, což je ve sporu s tím, že $s = \sup S$. $\square$

Další věta ukazuje, že spojitý obraz souvislé množiny musí být souvislý.

Věta 2.129: Nechť $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ je spojité zobrazení mezi topologickými prostory a (X, τ_X) je souvislý. Potom $f(X)$ je souvislá množina.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $f(X)$ není souvislá. Podle Lemma 2.125 musí existovat $\emptyset \neq B, C \subset f(X)$ otevřené v $(f(X), \tau_{f(X)})$ takové, že

$$B \cap C = \emptyset \quad \text{a} \quad B \cup C = f(X).$$

Ze spojitosti f plyne, že množiny $f^{-1}(B)$ a $f^{-1}(C)$ jsou otevřené v (X, τ_X), viz Věta 2.61. Skutečně jelikož $B \in \tau_{f(X)}$, existuje $\tilde{B} \in \tau_Y$ tak, že $B = \tilde{B} \cap f(X)$, z čehož plyne $f^{-1}(B) = f^{-1}(\tilde{B})$ a $f^{-1}(\tilde{B}) \in \tau_X$ díky spojitosti f. Podobně je $f^{-1}(C) \in \tau_X$. Dále platí:

$$f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C) = \emptyset \quad \text{a} \quad f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C) = X.$$

Nakonec musí být také obě množiny $f^{-1}(B)$ a $f^{-1}(C)$ neprázdné, protože B, C jsou neprázdné podmnožiny $f(X)$. To je ovšem spor s předpokladem souvislosti (X, τ_X) podle Lemma 2.125. $\square$

Důsledek 2.130: Jsou-li (X, τ_X) a (Y, τ_Y) homeomorfní topologické prostory, potom

$$(X, \tau_X) \text{ je souvislý} \quad \Leftrightarrow \quad (Y, \tau_Y) \text{ je souvislý.}$$

Nyní už můžeme ukázat, že intervaly jsou souvislé podmnožiny $\mathbb{R}$. Dokonce jiné souvislé podmnožiny než intervaly v $\mathbb{R}$ neexistují. Ve speciálním případě prostoru $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií máme tedy jednoduchou charakterizaci souvislých množin.

Věta 2.131: Množina $A \subset \mathbb{R}$ je souvislá, právě když je A interval.

Poznámka: Poznamenejme, že intervalem v $\mathbb{R}$ rozumíme všechny množiny typu

$$(a, b), \ [a, b), \ (a, b], \ [a, b],$$

kde $a \leq b$, a také všechny jejich (polo)nekonečné varianty. Speciálně také jednobodová množina je interval.

Důkaz Věty 2.131. 1) Předpokládejme nejprve, že $A \subset \mathbb{R}$ je interval. Ukážeme, že A je souvislá.

Je-li A jednobodová, nebo prázdná množina, je tvrzení triviální. Dále stačí uvažovat A otevřený interval, tzn. $A = (a, b)$, kde $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Souvislost všech ostatních typů potom dostaneme aplikací Věty 2.127.

Prostory (a, b) a $\mathbb{R}$ (s obvyklými topologiemi) jsou homeomorfní. Jeden příklad homeomorfismu $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, pokud jsou $a, b \in \mathbb{R}$, je funkce

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\pi \frac{x - b}{b - a} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $b = \infty$, pak lze volit homeomorfismus $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ např. $f(x) = \ln(x - a)$ a podobně pro případ $a = -\infty$ a $b \in \mathbb{R}$ (najděte příklad homeomorfismu). Potom Lemma 2.128 spolu s Důsledkem 2.130 implikují souvislost intervalu (a, b).

2) Naopak předpokládejme, že $A \subset \mathbb{R}$ není interval. Potom existují $x, y \in A$, $x < y$ a bod $z \notin A$ tak, že $x < z < y$. Položme

$$B_1 := A \cap (-\infty, z) \quad \text{a} \quad B_2 := A \cap (z, +\infty).$$

Potom $B_1, B_2 \neq \emptyset$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B_1 \cup B_2 = A$ a obě množiny B_1 a B_2 jsou otevřené v podprostoru (A, τ_A). To podle Lemma 2.125 znamená, že A není souvislá. □

S předpokladem souvislosti můžeme ještě doplnit tvrzení Věty 2.95.

Věta 2.132: Reálná spojitá funkce na kompaktním souvislém topologickém prostoru nabývá svého minima, maxima i všech hodnot mezi nimi.

Důkaz. Je-li $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ spojitá (topologie na $\mathbb{R}$ je opět obvyklá) a (X, τ) souvislý, potom podle Vět 2.129 a 2.131 je $f(X)$ interval. Navíc protože je (X, τ) kompaktní, musí být podle Vět 2.94 a 2.104 interval $f(X)$ omezený a uzavřený, z čehož ihned plyne tvrzení věty. □

V dalším si ukážeme, že každý topologický prostor se rozkládá na sjednocení svých maximálních souvislých částí - tzv. *komponent souvislosti.*

Definice 2.133 (Komponenta souvislosti)**:** Buď (X, τ) topologický prostor. Neprázdná množina $S \subset X$ se nazývá *komponenta souvislosti* prostoru (X, τ), právě když platí:

1. S je souvislá.

2. Je-li $A \subset X$ souvislá a $A \supset S$, potom $S = A$.

Příklad 2.134: Následující množiny chápeme jako topologické podprostory $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Prostor $X = [0, 1) \cup (1, 2]$ má dvě komponenty souvislosti $[0, 1)$ a $(1, 2]$. Komponentami souvislosti prostoru $Y = \cup_{n \in \mathbb{Z}}[2n, 2n + 1]$ jsou množiny $[2n, 2n + 1]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Příklad 2.135: Komponentami souvislosti prostoru (X, τ_d), kde τ_d je diskrétní topologie na množině $X \neq \emptyset$, jsou právě všechny jednobodové množiny.

Následující věta shrnuje vlastnosti komponent souvislosti.

Věta 2.136: Buď (X, τ) topologický prostor. Potom platí:

1. Každý bod $x \in X$ leží právě v jedné komponentě souvislosti (X, τ).

2. Dvě různé komponenty souvislosti (X, τ) jsou disjunktní.

3. Komponenty souvislosti (X, τ) jsou uzavřené množiny.

4. Prostor (X, τ) je souvislý, právě když má jedinou komponentu souvislosti.

5. Je-li $\emptyset \neq A \subset X$ souvislá, potom existuje právě jedna komponenta souvislosti S taková, že $A \subset S$.

Důkaz. 1. Buď $x \in X$. Označme

$$\mathcal{S} := \{ A \subset X \mid x \in A \ \wedge \ A \text{ je souvislá} \}.$$

Potom jistě $\mathcal{S} \neq \emptyset$, neboť $\{x\} \in \mathcal{S}$. Sjednocení $S := \cup \mathcal{S}$ je souvislá množina podle Věty 2.126. Navíc je jednoduché ověřit, že S je komponenta souvislosti obsahující bod x. Nechť také $T \subset X$ je komponenta souvislosti (X, τ) obsahující x. Potom $T \in \mathcal{S}$, a proto $T \subset S$. Z vlastnosti 2. z definice komponenty souvislosti T pak ale plyne, že $T = S$.

2. Je přímým důsledkem tvrzení 1.

3. Vyplývá z Věty 2.127 a definice komponenty souvislosti.

4. Zřejmé.

5. Jelikož je $A \neq \emptyset$, můžeme zvolit $a \in A$. Podle 1. tvrzení má (X, τ) komponentu souvislosti $S \subset X$ obsahující a. Množina $A \cup S$ je souvislá podle Věty 2.126. Potom z definice komponenty souvislosti S plyne, že $A \cup S = S$, neboli $A \subset S$. To, že je množina S určená jednoznačně, plyne opět z tvrzení 1. $\square$

Předchozí věta má následující důsledek.

Důsledek 2.137: Každý topologický prostor lze napsat jako sjednocení svých komponent souvislosti, tj. sjednocení maximálních souvislých uzavřených množin, které jsou po dvou disjunktní.

Definice 2.138 (Oblast)**:** Otevřená a souvislá podmnožina topologického prostoru se nazývá *oblast.*

Nakonec se ještě seznámíme s jednou silnější vlastností než je souvislost, a to tzv. *křivkovou souvislostí.*

Definice 2.139 (Křivka, stopa křivky)**:** *Křivka* v topologickém prostoru (X, τ) je spojité zobrazení $\varphi : [a, b] \to X$, kde $-\infty < a < b < \infty$. Obor hodnot φ se nazývá *stopa křivky* a značí $[\varphi]$.

Poznámka: Všimněte si, že stopa křivky $[\varphi]$ je souvislá množina, neboť je to spojitý obraz souvislé množiny $[a, b]$, viz Věty 2.129 a 2.131.

Definice 2.140 (Křivkově souvislý prostor, křivkově souvislá množina)**:** Topologický prostor (X, τ) nazýváme *křivkově souvislý* (nebo také *dráhově souvislý*), právě když každé dva body v X lze spojit křivkou, tzn.

$$(\forall x, y \in X)(\exists \varphi \text{ křivka v } (X, \tau))(x, y \in [\varphi]).$$

Analogicky množinu $\emptyset \neq A \subset X$ nazveme *křivkově souvislou*, právě když je (A, τ_A) křivkově souvislý topologický podprostor (X, τ). Prázdná množina je křivkově souvislá.

Věta 2.141: Křivkově souvislý topologický prostor (X, τ) je souvislý.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že (X, τ) je křivkově souvislý, ale není souvislý. Potom podle Lemma 2.125 existují otevřené a neprázdné množiny $A, B \subset X$ takové, že $A \cap B = \emptyset$ a $A \cup B = X$. Zvolme $a \in A$ a $b \in B$. Jelikož je (X, τ) je křivkově souvislý, existuje křivka φ v (X, τ) spojující body a a b.

Stopu φ lze rozložit na $[\varphi] = (A \cap [\varphi]) \cup (B \cap [\varphi])$, kde množiny $A \cap [\varphi]$ a $B \cap [\varphi]$ jsou otevřené v $([\varphi], \tau_{[\varphi]})$, neprázdné, neboť $a \in A \cap [\varphi]$ a $b \in B \cap [\varphi]$, a také disjunktní. To je ovšem spor se souvislostí $[\varphi]$. □

Intervaly jsou zřejmě křivkově souvislé množiny, a proto podle Věty 2.131 pojmy souvislá množina a křivkově souvislá množina znamenají totéž v prostoru $\mathbb{R}$. Obecně ale implikaci ve Větě 2.141 nelze obrátit, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 2.142 (Topologická sinusoida)**:** V $\mathbb{R}^2$ s obvyklou topologií uvažujme množinu

$$S := (0, 0) \cup \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in (0, 1] \right\},$$

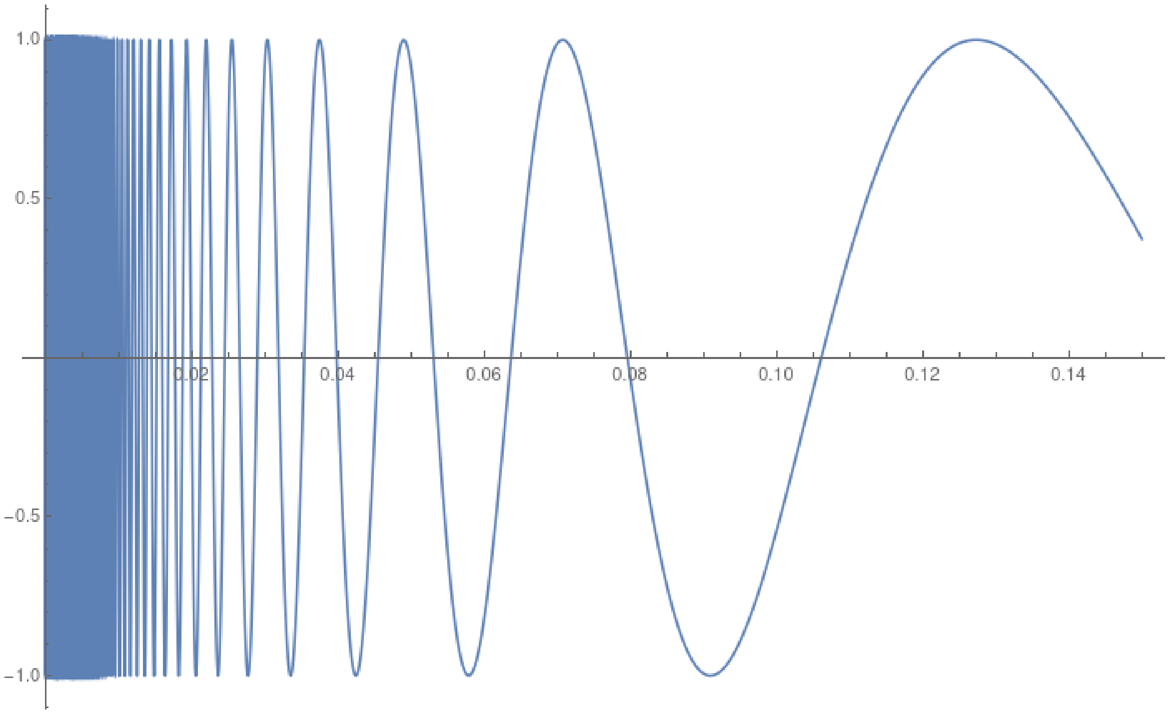
viz Obrázek 5.

Množina S je souvislá. To je vidět např. z toho, že část

$$S_0 = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in (0, 1] \right\}$$

je spojitý obraz souvislého intervalu $(0, 1]$, a tedy souvislá a $S_0 \subset S \subset \overline{S}$, kde

$$\overline{S} = \{0\} \times [-1, 1] \cup \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in (0, 1] \right\},$$



Obrázek 5: Topologická sinusoida.

viz Věta 2.127.

Na druhou stranu S není křivkově souvislá, protože bod $(0,0)$ nelze v S spojit křivkou s žádným z bodů z S_0. Předpokládejme, že bod $(0,0)$ je možné spojit s nějakým bodem $(a, \sin(1/a))$ v S, tzn., že existuje $\varphi : [0,1] :\to S$ je spojité takové, že $\varphi(0) = (0,0)$ a $\varphi(1) = (a, \sin(1/a))$. Potom i každý bod $(x, \sin(1/x))$, kde $0 < x < a$, musí ležet v $[\varphi]$, jinak by $[\varphi]$ nebyla souvislá.

Položme

$$K_n := [\varphi] \cap \left\{ (x, 1) \;\middle|\; 0 \le x \le \frac{1}{n} \right\}$$

Protože $[\varphi]$ je kompaktní (je to spojitý obraz kompaktní množiny $[0,1]$) a K_n jsou uzavřené neprázdné množiny takové, že $K_{n+1} \subset K_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, plyne z Cantorovy věty (Důsledek 2.84), že

$$K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset.$$

Z definice K_n plyne, že K nemůže obsahovat žádný bod z $\mathbb{R}^2$, který má kladnou první složku. Jediný bod v $[\varphi]$, který nemá pozitivní první složku je $(0,0)$, a proto $K = \{(0,0)\}$. Na druhou stranu z definice množin K_n plyne, že druhá složka musí být limitou konstantní posloupnosti $y_n = 1$ pro $n \to \infty$. A tedy druhá složka bodu $(0,0)$ by měla být 1, což je spor.

Definice 2.143 (Lokálně křivkově souvislý prostor, lokálně křivkově souvislá množina)**:** Topologický prostor (X, τ) nazveme *lokálně křivkově souvislý*, právě když

$$(\forall x \in X)(\exists H_x \text{ křivkově souvislé}).$$

Množina $\emptyset \neq A \subset X$ je ***lokálně křivkově souvislá***, právě když je (A, τ_A) lokálně křivkově souvislý topologický prostor. Prázdná množina je lokálně křivkově souvislá.

Zřejmě křivkově souvislý prostor je také lokálně křivkově souvislý. Naopak to ovšem neplatí. Lokálně křivkově souvislý prostor nemusí být totiž ani souvislý, uvažte např. množinu $A = (-1, 1) \setminus \{0\}$ v $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Ani souvislost neimplikuje lokálně křivkovou souvislost, jak ukazuje příklad topologické sinusoidy, viz Příklad 2.142, kde bod $(0, 0)$ nemá žádné křivkově souvislé okolí. Platí ale následující tvrzení.

Věta 2.144: Je-li (X, τ) souvislý a lokálně křivkově souvislý topologický prostor, potom je (X, τ) křivkově souvislý.

Důkaz. Buď $p \in X$. Označme S_p množinu všech bodů z X, které lze spojit s p křivkou (tzv. komponenta křivkové souvislosti). Ukážeme, že S_p je obojetná. Potom, protože $S_p \neq \emptyset$, neboť $p \in S_p$, plyne ze souvislosti (X, τ), že $S_p = X$. Tudíž každý bod z x lze spojit s p křivkou, a proto také každé dva body z X lze spojit křivkou tranzitivně přes p.

Zbývá tedy dokázat, že S_p je obojetná. Nejprve ukážeme, že S_p je otevřená. Buď $x \in S_p$. Potom existuje H_x křivkově souvislé okolí x, protože (X, τ) je lokálně křivkově souvislý. Vezměme libovolně $u \in H_x$. Potom u lze spojit s x křivkou. Také x lze spojit s p křivkou, což plyne z toho, že $x \in S_p$. Celkem tedy je možné u spojit s p křivkou opět tranzitivně přes x, a proto $u \in S_p$. Protože jsme u volili z H_x libovolně, je $H_x \subset S_p$.

Nakonec dokážeme, že S_p je také uzavřená. Buď $y \in \overline{S_p}$ a H_y křivkově souvislé okolí y. Protože $H_y \cap S_p \neq \emptyset$, existuje nějaké $v \in H_y \cap S_p$. Toto v lze spojit křivkou jak s y, tak s p, a proto lze spojit křivkou také y a p. Neboli $y \in S_p$, a protože bylo y voleno libovolně, je $\overline{S_p} \subset S_p$. Tedy $\overline{S_p} = S_p$. $\square$

Věta 2.144 má jeden speciální důsledek pro oblasti v normovaných prostorech, který se nám bude později hodit.

Důsledek 2.145: Je-li $(V, \|\cdot\|)$ normovaný prostor a $A \subset V$ oblast, potom je A křivkově souvislá. Speciálně oblast v $\mathbb{R}^n$ je křivkově souvislá množina.

Důkaz. Stačí ukázat, že otevřená podmnožina normovaného prostoru je lokálně křivkově souvislá. Tvrzení potom plyne z Věty 2.144.

Nechť je tedy A otevřená a neprázdná množina v V (jinak triviální). Buď $x \in A$. Potom existuje $r > 0$ tak, že $B_x(r) \subset A$. Protože je koule $B_x(r)$ konvexní, viz Cvičení 2.5, lze v ní každé dva body spojit speciální křivkou, totiž úsečkou. Z toho plyne, že A je lokálně křivkově souvislá. $\square$

Z toho, co už nyní víme, si můžeme dokázat speciální případ tvrzení, které představuje velmi silný topologický výsledek, viz Věta 2.147.

Věta 2.146: Prostory $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ nejsou homeomorfní.

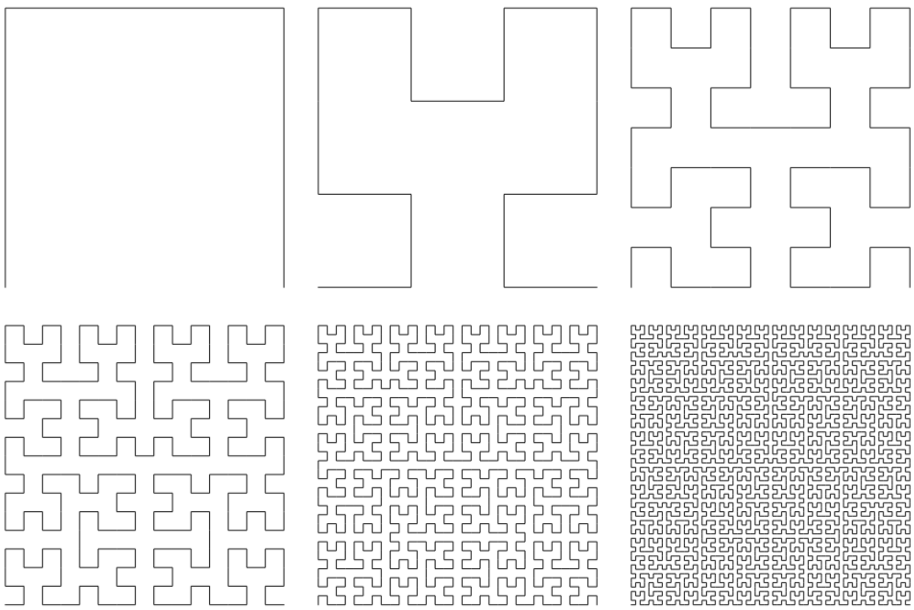
Důkaz. Předpokládejme naopak, že $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ jsou homeomorfní a označme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ homeomorfismus. Z prostoru $\mathbb{R}$ vyjměme nějaký pevně zvolený bod $a \in \mathbb{R}$. Prostor $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ není souvislý, protože to není interval, viz Věta 2.131. Na druhou stranu $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(a)\}$ je souvislý, protože je křivkově souvislý (rozmyslete), viz Věta 2.141. Nakonec si stačí uvědomit, že zobrazení f zúžené na $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ je homeomorfismem prostorů $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ a $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(a)\}$. To je ale spor s Větou 2.130. $\square$

Ideu důkazu Věty 2.146 lze jednoduše rozšířit na prostory $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ s $n \geq 2$. Intuitivně lze očekávat, že ani $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ nebudou homeomorfní, pokud $m \neq n$. To je skutečně pravda, ale důkaz tohoto tvrzení vyžaduje mnohem sofistikovanější metody, konkrétně tzv. Větu o invarianci domén v $\mathbb{R}^n$, kterou dokázal Brouwer v roce 1912 s využitím Věty 2.120. Důkaz může čtenář najít např. v [15].

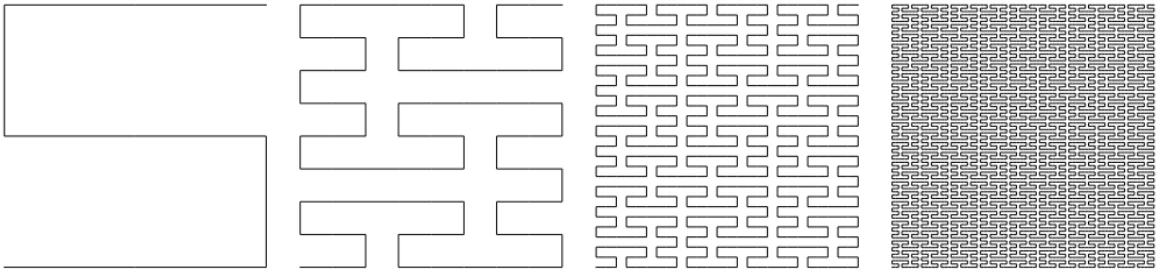
Věta 2.147: Jsou-li $m, n \in \mathbb{N}$ a $m \neq n$, potom prostory $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ nejsou homeomorfní.

Podobně jako ve Větě 2.146 dokážeme, že $[0,1]$ a $[0,1] \times [0,1]$ nejsou homeomorfní, viz Cvičení 2.52. Tzn., že neexistuje spojitá bijekce z $[0,1]$ na $[0,1] \times [0,1]$, protože takové zobrazení by už musel být homeomorfismus, neboť $[0,1]$ je kompaktní, viz Cvičení 2.43.

Jen pro zajímavost poznamenejme na závěr, že existují spojitá zobrazení $\varphi : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$, která jsou surjektivní; tedy křivky, které zcela vyplní čtverec $[0,1] \times [0,1]$. Tyto křivky jsou definovány jako limity určitých specifickým způsobem konstruovaných posloupností křivek a patří mezi ně např. Hilbertova nebo Peanova křivka, viz Obrázky 6 a 7. Z předchozího odstavce plyne, že tyto křivky nemohou být v žádném případě injektivní.



Obrázek 6: Prvních šest iterací konstrukce Hilbertovy křivky.



Obrázek 7: Prvních čtyři iterace konstrukce Peanovy křivky.

2.7 Cvičení

Cvičení 2.1: Dokažte, že v normovaném prostoru $(V, \|\cdot\|)$ platí nerovnost

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

pro všechny $x, y \in V$. Z této nerovnosti plyne spojitost normy jakožto zobrazení $(V, \|\cdot\|) \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$.

Cvičení 2.2: Ukažte detailně, že zobrazení $\|\cdot\|_p$ z Příkladu 2.2 splňují vlastnosti z definice normy. Trojúhelníkovou nerovnost ukažte jen pro speciální případy $p = 2$ a $p = \infty$.

Cvičení* 2.3: Dokažte trojúhelníkovou nerovnost pro $\|\cdot\|_p$ na $\mathbb{C}^n$, je-li $p \in [1, \infty)$.
(Hint: 1. Využijte homogenity $\|\cdot\|_p$ a ukažte, že stačí dokázat nerovnost

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|_p \leq 1, \quad \text{pro} \quad \|x\|_p = 1, \|y\|_p = 1 \ \text{ a } \ \lambda \in [0, 1].$$

2. Dokažte nerovnost $|\lambda t + (1 - \lambda)s|^p \leq \lambda|t|^p + (1-\lambda)|s|^p$ pro $t, s \in \mathbb{R}$ a $\lambda \in [0, 1]$, která plyne z konvexnosti funkce $f(t) := |t|^p$, a aplikujte ji k důkazu nerovnosti z kroku 1.)

Cvičení 2.4: Ukažte, že pokud je $p \in (0, 1)$, zobrazení $\|\cdot\|_p$ nesplňuje trojúhelníkovou nerovnost.

Cvičení 2.5: Dokažte, že r-koule $B_x(r)$ se středem $x \in V$ v normovaném prostoru $(V, \|\cdot\|)$ je konvexní množina, tzn. pro $\forall u, v \in B_x(r)$ a $\forall \lambda \in [0, 1]$ je $\lambda u + (1 - \lambda)v \in B_x(r)$.

Cvičení 2.6: V metrickém prostoru (X, ρ) můžeme definovat uzavřenou kouli o poloměru $r > 0$ se středem $x \in X$ vztahem $C_x(r) := \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq r\}$. Ukažte, že rovnost $C_x(r) = \overline{B_x(r)}$ obecně neplatí v metrickém prostoru, ale platí v prostorech normovaných.
(Hint: Uvažujte diskrétní metriku.)

Cvičení 2.7: Ukažte, že diskrétní topologie τ_d je indukována diskrétní metrikou ρ_d.

Cvičení 2.8: Dokažte Větu 2.29.

Cvičení 2.9: Dokončete důkaz Věty 2.31.

Cvičení 2.10: Najděte příklad ilustrující, že inkluze $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$ může být striktní.

Cvičení 2.11: Dokončete důkaz Věty 2.34.

Cvičení 2.12: Najděte příklad ilustrující, že inkluze $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ může být striktní.

Cvičení 2.13: Ukažte, že mezi množinami $\overline{A^\circ}$ a $\left(\overline{A}\right)^\circ$ neplatí ani jedna inkluze.

Cvičení 2.14: Dokažte inkluze $\partial(A\cup B) \subset \partial A\cup\partial B$ a $\partial(A\cap B) \subset \partial A\cap\partial B$ a najděte příklady ilustrující neplatnost opačných inkluzí.

Cvičení 2.15: Uvažujte dvouprvkovou množinu $X = \{a, b\}$ s triviální topologií τ_0 a $A = \{a\}$. Určete A'. Všimněte si, že A' není uzavřená.

Cvičení 2.16: Uvažujte topologii na $\mathbb{R}$ tvořenou množinami $\{(x, \infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$ spolu s $\emptyset$ a $\mathbb{R}$. Určete A°, $\overline{A}$ a A' pro jednobodovou množinu $A = \{a\}$ a pro interval $A = (a, b)$.

Cvičení 2.17: Uvažujte topologii τ na $X = \mathbb{R}$ danou systémem lokálních bází $\beta_x = \{U_\epsilon(x) \mid \epsilon > 0\}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, kde

$$U_\epsilon(x) := \{x\} \cup (-\epsilon, \epsilon).$$

Nejprve ověřte, že (X, τ) je T_0-prostor. Poté pro $A = \{0\}$ ukažte, že $A' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a že tato množina není uzavřená v (X, τ).

Cvičení 2.18: Ukažte, že v obecném topologickém prostoru neplatí inkluze $(A')' \subset A'$.
(Hint: Uvažujte tříprvkovou množinu $X = \{a, b, c\}$ s triviální topologií τ_0.)

Cvičení 2.19: Ukažte, že $X = \{a, b\}$ s triviální topologií τ_0 není T_0-prostor.

Cvičení 2.20: Ukažte, že $X = \{a, b\}$ s topologií $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ je T_0-prostor, ale není T_1-prostor.

Cvičení 2.21: Ukažte, že $X = \mathbb{R}$ s topologií $\tau_{fin} = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R} \setminus F \mid F \subset \mathbb{R} \text{ konečná}\}$ je T_1-prostor, ale není T_2-prostor.

Cvičení* 2.22: Uvažujte topologii τ na $X = \mathbb{R}$ určenou bází

$$\beta = \{U \subset \mathbb{R} \mid U = (a, b) \text{ nebo } U = (a, b) \setminus K, a < b\}.$$

kde $K := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ukažte, že (X, τ) je T_2-prostor. Dále ukažte, že K je uzavřená množina v (X, τ) a že pro bod $x = 0$ a množinu K neplatí axiom oddělitelnosti T_3. Tzn., že (X, τ) není T_3-prostor.

Cvičení 2.23** (Moorova polorovina s tečnými kruhy)**:** Uvažujte polorovinu $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ s topologií τ určenou lokálními bázemi v každém bodě $(x, y) \in X$ následovně:

- Pro $(x, y) \in X$ s $y > 0$ je $U_\epsilon(x, y) := B_{(x,y)}(\epsilon)$, $0 < \epsilon < y$.
- Pro $(x, 0) \in X$ je $U_\epsilon(x) := \{(x, 0)\} \cup B_{(x,\epsilon)}(\epsilon)$, $\epsilon > 0$.

Ukažte, že (X, τ) je T_3-prostor, ale není T_4-prostor.

Cvičení 2.24: Dokažte, že topologický prostor (X, τ) je Hausdorffův, právě když pro každé $x \in X$ platí:

$$\{x\} = \bigcap_{H_x} \overline{H_x}.$$

Cvičení* 2.25: Dokažte, že topologický prostor (X, τ) je regulární, právě když

$$(\forall x \in X)(\forall H_x)(\exists H'_x) \left(\overline{H'_x} \subset H_x\right).$$

Cvičení 2.26: Na množině $X = \mathbb{N}$ uvažujte topologii $\tau = \emptyset \cup \{\{n, n+1, n+2, \dots\} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Rozhodněte, pro která $n \in \mathbb{N}$ je $\{n\}$ uzavřená a určete $\overline{\{n\}}$. Je (X, τ) T_0-prostor, resp. T_1-prostor?

Cvičení 2.27: Uvažujte $\mathbb{R}^2$ s obvyklou topologií. Spočítejte A' a $(A')'$ pro množinu

$$A := \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Cvičení 2.28: Dokončete důkaz Věty 2.52.

Cvičení 2.29: Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A, B \subset X$ uzavřené a disjunktní množiny. Je pravda, že $d(A, B) > 0$?
Hint: Uvažujte např. $X = \mathbb{R}^2$ s euklidovskou metrikou ρ_2 a množiny

$$A = \mathbb{R} \times \{0\} \quad \text{a} \quad B = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) \,\middle|\, x > 0 \right\}.$$

Cvičení 2.30: Dokažte Větu 2.56.

Cvičení 2.31: Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $A \subset X$. Dokažte, že zobrazení $f : X \to \mathbb{R}$ definované vztahem $f(x) := d(x, A) \equiv \inf\{\rho(x, y) \mid y \in A\}$ je spojité.

Cvičení 2.32: Uvažujme identické zobrazení $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$, tj. $f(x) = x$, kde d označuje diskrétní metriku. Rozhodněte o spojitosti f a f^{-1}.

Cvičení 2.33: Uvažujte intervaly $(0, 1), [0, 1), (0, 1], [0, 1]$ jakožto topologické podprostory $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Pro každou dvojici intervalů rozhodně, zda jsou homeomorfní.
(Hint: Pro dvojici $[0, 1)$ a $(0, 1]$ zkoumejte zobrazení $f(x) = 1 - x$.)

Cvičení 2.34: Ukažte, že $\mathbb{R}$ a interval (a, b) vybavené obvyklou topologií, kde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, jsou homeomorfní topologické prostory.

Cvičení 2.35: Ukažte, že otevřený jednotkový kruh v $\mathbb{R}^2$ a otevřený čtverec $(0, 1) \times (0, 1)$ jsou homeomorfní (jakožto topologické podprostory $\mathbb{R}^2$ s obvyklou topologií).

Cvičení 2.36: Uvažujte $X = \mathbb{Z}$ s topologií $\tau_{fin} = \{\mathbb{Z} \setminus F \mid F \subset \mathbb{Z} \text{ konečná}\}$. Ukažte, že libovolná množina z $(\mathbb{Z}, \tau_{fin})$ je kompaktní, kdežto uzavřené množiny jsou jen podmnožiny konečné.

Cvičení 2.37: Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A, B \subset X$ kompaktní množiny. Dokažte, že

1. $A \cup B$ je kompaktní,
2. $A \cap B$ je kompaktní za předpokladu, že (X, τ) je T_2-prostor.

(Hint: V důkazu 2. tvrzení použijte Větu 2.81.)

Cvičení 2.38: Uvažujte množinu $X = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$ s topologií definovanou následovně:

$$U \subset X \text{ je otevřená} \overset{\text{def}}{\iff} U \subset \mathbb{Z}, \text{ nebo } X \setminus U \text{ je konečná.}$$

Dokažte, že množiny $A := \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ and $B := \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ jsou kompaktní, ale $A \cap B$ kompaktní není.

Cvičení 2.39: Uvažujte množinu $X = \{0\} \cup \mathbb{N}^2$ s topologií τ určenou lokální bází následovně. Pro $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ je $\beta_{(m,n)} := \{(m, n)\}$, neboli všechny body $\mathbb{N}^2$ jsou izolované. Systém β_0 okolí 0 tvoří množiny

$$\{0\} \cup \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N} \setminus F, F \subset \mathbb{N} \text{ konečná }, n \geq N_m, N_m \in \mathbb{N}\}.$$

Vhodným očíslováním prvků $\mathbb{N}^2$ definujte posloupnost v (X, τ), jejíž jedinou hromadnou hodnotou je 0, ale která nemá žádnou konvergentní podposloupnost.

Cvičení 2.40: Přímo z definice kompaktnosti dokažte, že kompaktní metrický prostor je nutně omezený.

Cvičení 2.41: Najděte příklad metrického prostoru, který je omezený, ale není totálně omezený.
(Hint: Uvažujte nekonečnou množinu s diskrétní metrikou.)

Cvičení* 2.42: Uvažujte $X = \mathbb{Q}$ jako topologický podprostor $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Ukažte, že množina $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ je uzavřená a totálně omezená, avšak není kompaktní v X.

Cvičení 2.43: Buď $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ spojité, (X, τ_X) kompaktní a (Y, τ_Y) Hausdorffův. Dokažte, že

1. je-li $A \subset X$ uzavřená, potom je $f(A)$ uzavřená,
2. je-li f bijekce, je f homeomorfismus.

Cvičení 2.44: Ověřte vlastnosti kartézského součinu množin:

1. $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,
2. $(A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Na konkrétním příkladu ukažte, že v druhém tvrzení neplatí rovnost.

Cvičení 2.45: Nechť β_X a β_Y jsou báze topologických prostorů (X, τ_X) a (Y, τ_Y). Dokažte, že

$$\beta_X \times \beta_Y = \{U \times V \mid U \in \beta_X, V \in \beta_Y\}$$

je báze $(X \times Y, \tau_X \otimes \tau_Y)$

Cvičení 2.46: Ukažte, že produktová topologie na $\mathbb{R}^n$ (chápáno jako kartézský součin prostorů $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií) a obvyklá topologie na $\mathbb{R}^n$ jsou totožné.

Cvičení 2.47: Ukažte, že Bolzanova–Weierstrassova věta neplatí v metrických prostorech ani v normovaných prostorech nekonečné dimenze.
(Hint: a) Uvažujte např. $\mathbb{R}$ s diskrétní metrikou a posloupnost $\{n\}_{n=1}^{\infty}$. b) Uvažujte lineární prostor omezených posloupností s normou $\|x\| := \max_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$ a v něm posloupnost $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $(e_n)_i := \delta_{i,n}$ (Kroneckerovo delta).)

Cvičení 2.48: Ukažte na příkladě, že ani předpoklad kompaktnosti, ani předpoklad konvexnosti, nelze z Brouwerovy věty o pevném bodě vynechat.

Cvičení 2.49: Dokažte, že (X, τ) není souvislý, právě když existují neprázdné množiny $A, B \subset X$ takové, že
$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset \quad \text{a} \quad A \cup B = X.$$

Cvičení 2.50: Nechť U je otevřená množina v $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Dokažte, že

1. U je spočetné sjednocení otevřených intervalů,
2. U je spočetné sjednocení uzavřených intervalů,
3. U je spočetné sjednocení polootevřených intervalů, tj. intervalů typu $(a, b]$, nebo $[a, b)$.

(Hint: 1. Pro $x \in U \cap \mathbb{Q}$ definujte I_x jako sjednocení otevřených intervalů $(a, b) \subset U$ obsahujících x a ukažte, že I_x je otevřený interval ležící v U. Pro $x \in U \setminus \mathbb{Q}$ ukažte, že existuje $y \in U \cap \mathbb{Q}$ tak, že $x \in I_y$. Potom $U = \cup_{x \in U \cap \mathbb{Q}} I_x$. 2. Ukažte, že každý otevřený interval je spočetným sjednocením uzavřených intervalů a použijte bod 1. 3. Postupujte analogicky jako v bodě 2.)

Cvičení 2.51: Předpokládejme, že v prostoru (X, τ) je dána množina $A \subset X$ a křivka φ, které spojuje vnitřní a vnější bod A, tzn. $A^\circ \cap [\varphi] \neq \emptyset$ a $(X \setminus A)^\circ \cap [\varphi] \neq \emptyset$. Dokažte, že φ protíná hranici A, tj. $\partial A \cap [\varphi] \neq \emptyset$.

Cvičení 2.52: Dokažte, že interval $[0, 1]$ a čtverec $[0, 1] \times [0, 1]$ nejsou homeomorfní.