1 Funkční posloupnosti a řady

Studium *funkčních* posloupností a řad navazuje na předchozí kapitolu z analýzy věnovanou posloupnostem a řadám *číselným*. Přirozené rozšíření pojmu konvergence z číselných posloupností na posloupnosti funkcí, které budeme nazývat bodová konvergence, bude z mnoha ohledů nedostačující, což si ukážeme hned v následující části. To bude hlavní motivací pro zavedení silnějšího pojmu konvergence - tzv. konvergence stejnoměrné, jejíž studium bude hlavní předmět následujících sekcí.

V této kapitole budeme uvažovat posloupnosti komplexních funkcí f_n definovaných na neprázdné podmnožině $A \subset \mathbb{C}$, ačkoliv nám v celém kurzu půjde zejména o reálnou analýzu. Práce v komplexním oboru nebude znamenat žádnou komplikaci. Jednotlivá tvrzení by se v reálném oboru dokazovala zcela analogicky jen bychom uvažovali absolutní hodnotu reálného čísla namísto komplexního. Na druhou stranu je komplexní obor vhodný např. pro speciální případ mocninných řad, jak uvidíte v navazujícím kurzu věnovanému komplexní analýze. Řadu definic a vět bychom mohli bez velkých změn zformulovat i obecněji v metrických prostorech. S těmi se ale seznámíme až v následující kapitole, a proto volíme komplexní obor jako zcela dostačující kompromis.

1.1 Bodová konvergence a diskuze základního problému

Definice 1.1 (Limitní funkce, bodová konvergence)**:** Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost komplexních funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Předpokládejme, že pro každé $z \in A$ je posloupnost $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní. Potom funkci definovanou na A vztahem

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z), \quad z \in A,$$

nazýváme *limitní funkcí* posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na A a říkáme, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje bodově* k f na A. Tuto skutečnost značíme

$$f_n \xrightarrow{A} f.$$

Poznámka: Rozepíšeme-li definici bodové konvergence $f_n \xrightarrow{A} f$, dostáváme ekvivalenci

$$f_n \xrightarrow{A} f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall z \in A)(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon).$$

Příklad 1.2: Uvažujme $f_n(x) = (1 - x^2)^n$ a $A = [-1, 1]$. Potom

$$f_n \xrightarrow{[-1,1]} f,$$

kde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1]. \end{cases}$$

Podobně zavádíme bodovou konvergenci funkční řady.

Definice 1.3 (Součtová funkce, bodová konvergence řady)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost komplexních funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Předpokládejme, že pro každé $z \in A$ je posloupnost částečných součtů $\{s_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_n(z) := \sum_{k=1}^{n} f_k(z),$$

konvergentní. Potom funkci definovanou na A vztahem

$$s(z) := \lim_{n\to\infty} s_n(z), \quad z \in A,$$

nazýváme *součtovou funkcí* posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na A a říkáme, že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

konverguje bodově k s na A.

Příklad 1.4: Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

konverguje bodově k součtové funkci

$$s(z) = \frac{1}{1-z}$$

na množině $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

V analýze a jejích aplikacích se často vyskytuje situace, kdy chceme vyšetřit nějakou vlastnost limitní funkce f na základě známých vlastností funkcí f_n. Fundamentální problém je, zda se zachovávají vlastnosti jako je spojitost, diferencovatelnost a integrabilita. Dále vyvstává otázka, zda je nějaký vztah mezi derivacemi, resp. integrály funkcí f_n a derivací, resp. integrálem limitní funkce f v případech, kdy tyto operace mají dobrý smysl.

Již jednoduchý Příklad 1.2 ukazuje, že ani spojitost, ani diferencovatelnost se při bodové konvergenci obecně nezachovává. Totéž se týká integrability. Tyto vlastnosti se nezachovávají ani v případě bodově konvergentních řad a součtové funkce. Dokonce ani pokud jsou funkce f_n a limitní funkce f diferencovatelné nemusí být f' bodovou limitou posloupnosti f_n' a podobně pro integrál. Tyto skutečnosti ilustrují následující příklady.

Příklad 1.5: Položme

$$f_n(x) := \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pokud je $x \neq 0$, konverguje řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

jako geometrická řada s kvocientem v absolutní hodnotě menším než 1, a proto máme

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Je-li $x = 0$, potom je $f_n(0) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, a proto také $s(0) = 0$. Celkem tedy je součtová funkce

$$s(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Vidíme tedy, že součtová funkce spojitých funkcí nemusí být spojitá.

Příklad 1.6: Uvažujme nejprve funkci $f_n(x)$ definovanou pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ následovně

$$f_n(x) := \lim_{m \to \infty} \left(\cos\left((n!)\pi x\right)\right)^{2m}.$$

Pokud je $(n!)x \in \mathbb{Z}$, potom $\cos\left((n!)\pi x\right) \in \{\pm 1\}$, a proto je $f_n(x) = 1$. Je-li naopak $(n!)x \notin \mathbb{Z}$, máme $\cos\left((n!)\pi x\right) \in (-1, 1)$ a odtud plyne, že $f_n(x) = 0$.

Ukážeme, že existuje limita

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) =: f(x)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pokud je $x \notin \mathbb{Q}$, potom $(\forall n \in \mathbb{N})((n!)x \notin \mathbb{Z})$, neboli $(\forall n \in \mathbb{N})(f_n(x) = 0)$, což implikuje, že $f(x) = 0$. Je-li naopak $x \in \mathbb{Q}$, tedy $x = p/q$ pro nějaká $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, potom je $(n!)x \in \mathbb{Z}$ pro všechna $n \geq q$. Tudíž $f(x) = 1$. Zjišťujeme tedy, že limitní funkce f je známá Dirichletova funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \notin \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Omezíme-li se např. na interval $[0, 1]$, je funkce f_n riemannovsky integrabilní na $[0, 1]$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, neboť je nenulová jen v konečně mnoha bodech. Dirichletova funkce je ale příklad funkce, která není na $[0, 1]$ riemannovsky integrabilní. Z toho plyne, že se integrabilita v Riemnnově smyslu obecně nezachovává při bodové konvergenci.

Příklad 1.7: Uvažujme

$$f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Je jasné, že $f_n \xrightarrow{\mathbb{R}} f$, kde $f = 0$, tj. $f(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce f_n jsou diferencovatelné a pro jejich derivaci platí

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Odtud plyne, že i když jsou všechny funkce f_n a f diferencovatelné, $f' = 0$ není bodovou limitou f_n'. Skutečně např. pro $x = 0$ není posloupnost $\{f_n'(0)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, neboť

$$f_n'(0) = \sqrt{n} \to \infty.$$

Příklad 1.8: Položme
$$f_n(x) := nx(1-x^2)^n, \quad x \in [0,1].$$
Je-li $x \in (0,1)$, potom $f_n(x) \to 0$ např. podle podílového kritéria. Pro $x \in \{0,1\}$ je $f_n(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a proto také $f_n(x) \to 0$. Celkem tedy
$$f_n \xrightarrow{[0,1]} f,$$
kde $f = 0$ na $[0,1]$. Snadno spočítáme integrál
$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = n\int_0^1 x(1-x^2)^n\mathrm{d}x = \frac{n}{2}\int_0^1 y^n\mathrm{d}y = \frac{n}{2n+2}.$$
Odtud vidíme, že
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Poučení z předchozích příkladů je, že bodová konvergence nezachovává spojitost, diferencovatelnost , ani integrabilitu. Navíc záměny limit, derivace a limity, ani integrálu a limity nelze provádět zcela automaticky. Naším dalším cílem bude zformulovat podmínky, za kterých se uvažované vlastnosti zachovávají a bude možné provádět limitní záměny. Pro tyto účely nejprve nahradíme bodovou konvergenci silnější konvergencí, tzv. *konvergencí stejnoměrnou.*

1.2 Stejnoměrná konvergence

Definice 1.9 (Stejnoměrná konvergence)**:** Buďte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f komplexní funkce definované na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že funkční posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně* k funkci f *na množině* A, právě když
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon).$$
Tuto skutečnost značíme
$$f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f.$$
Poznámka: Pojem *stejnoměrná konvergence* je vždy svázán s množinou A. Samostatný výrok „posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně" nemá smysl, neuvedeme-li na jaké množině.

Poznámka: Uvědomte si zdánlivě nepatrný rozdíl mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí:
$$f_n \xrightarrow{A} f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall z \in A)(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon),$$
$$f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon),$$

který spočívá „pouze" v různém pořadí kvantifikátorů. V případě bodové konvergence je nalezené n_0 funkcí jak ϵ, tak z, tj. $n_0 = n_0(\epsilon, z)$. Potom nerovnost $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ platí pro fixní ϵ a z pro všechna $n \geq n_0$. Naopak v případě stejnoměrné konvergence existuje univerzální n_0, které závisí pouze na ϵ, tj $n_0 = n_0(\epsilon)$, nikoli na z. Nerovnost $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ potom platí pro každé $z \in A$ a $n \geq n_0$.

Poznámka: Stejnoměrná konvergence je silnější než bodová konvergence, tzn., že

$$f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f \quad \Rightarrow \quad f_n \overset{A}{\to} f.$$

Z toho také plyne, že pokud $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na A, musí konvergovat ke své (bodové) limitní funkci, neboť ta je určena jednoznačně, tj.

$$f_n \overset{A}{\rightrightarrows} g \quad \wedge \quad f_n \overset{A}{\to} f \quad \Rightarrow \quad f = g.$$

Následující tvrzení je jen ekvivalentní přepis definice stejnoměrné konvergence. Je to ale užitečný tvar definice, a proto si ho zformulujeme jako větu.

Věta 1.10: Buďte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f funkce definované na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Potom

$$\begin{aligned} f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) \left(\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \right) \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| = 0. \end{aligned}$$

Důkaz. Vyplývá okamžitě z ekvivalence výroků

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon)$$

a

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) \left(\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \right).$$

□

Příklad 1.11: Uvažujme posloupnost $f_n(x) := x^n$. Potom je

$$f_n \xrightarrow{[0,1)} 0,$$

ale $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje k 0 stejnoměrně na $(0, 1]$, protože

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [0,1)} |x^n| = 1 \neq 0.$$

Platí ovšem

$$f_n \overset{[0,1-\epsilon]}{\rightrightarrows} 0$$

pro libovolné $\epsilon \in (0, 1)$, neboť

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [0,1-\epsilon]} |x^n| = \lim_{n \to \infty} (1 - \epsilon)^n = 0.$$

Bolzanovo–Cauchyho kritérium konvergence má i svou stejnoměrnou variantu, která je obsahem následující věty.

Věta 1.12 (Bolzano–Cauchy)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Potom $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na A (k nějaké limitní funkci), právě když

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon).$$

Poznámka: Ekvivalentní formulace Bolzanovy–Cauchyho podmínky je

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \epsilon).$$

Důkaz Věty 1.12. Implikace ($\Rightarrow$): Předpokládejme, že $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$. Potom platí

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon/2).$$

Vezmeme-li libovolné $\epsilon > 0$ a $m, n \geq n_0$ dostaneme s použitím trojúhelníkové nerovnosti

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f(z) - f_m(z)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

pro každé $z \in A$.

Implikace ($\Leftarrow$): Předpokládejme, že platí Bolzanova–Cauchyho podmínka z věty. Potom je pro každé $z \in A$ splněno Bolzanovo–Cauchyho kritérium konvergence pro **číselnou** posloupnost $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, a tedy tato posloupnost je konvergentní, viz také Cvičení 1.1. Označme si její limitu

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z)$$

pro každé $z \in A$. Předpoklad platnosti stejnoměrné verze Bolzanova–Cauchyho podmínky je ekvivalentní výroku

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall z \in A)\left(|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \epsilon/2\right).$$

Nyní stačí poslat $p \to \infty$ v poslední nerovnosti a dostaneme tak

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)\left(|f(z) - f_n(z)| \leq \epsilon/2 < \epsilon\right),$$

což znamená, že $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$. □

Poznámka: Všimněte si, že se ve Větě 1.12 explicitně nevyskytuje výraz f pro limitní funkci. Bolzanova–Cauchyho podmínka umožňuje vyjádřit, že funkční posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na A bez použití limitní funkce.

Poznámka: Později uvidíme, že Bolzanovo-Cauchyho kritérium je ekvivalentní vyjádření tzv. *úplnosti* příslušného metrického prostoru. Věta 1.12 nám říká, že prostor omezených funkcí f na A s metrikou indukovanou normou

$$\|f\| := \sup_{z\in A} |f(z)|$$

je úplný (tzv. Banachův).

Věta 1.13: Buďte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, f, g vesměs funkce definované na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Pokud

$$f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f \quad \text{a} \quad g_n \overset{A}{\rightrightarrows} g,$$

potom platí:

1. $f_n + g_n \overset{A}{\rightrightarrows} f + g$,
2. $\alpha f_n \overset{A}{\rightrightarrows} \alpha f$,
3. $f_n g_n \overset{A}{\rightrightarrows} fg$, jsou-li f a g omezené na A.

Důkaz. Tvrzení 1. a 2. vyplývá přímo z příslušných definic a je přenecháno čtenáři jako Cvičení 1.3.

K důkazu tvrzení 3. použijeme jednu implikaci následujícího pomocného tvrzení.

Lemma 1.14: Nechť $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$, potom

$$f \text{ je omezená na } A \quad \Leftrightarrow \quad (\exists K > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \left(\sup_{n \geq n_0} \sup_{z \in A} |f_n(z)| < K \right).$$

Důkaz Lemma 1.14. Implikace ($\Rightarrow$): Položíme-li $\epsilon = 1$ v definici stejnoměrné konvergence, dostaneme z předpokladu $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$, že

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f(z)| < 1).$$

Z toho dále plyne

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z)| < 1 + |f(z)|).$$

Protože je f omezená na A, existuje $L > 0$ tak, že $\sup_{z \in A} |f(z)| < L$, a proto

$$\sup_{n \geq n_0} \sup_{z \in A} |f_n(z)| \leq 1 + \sup_{z \in A} |f(z)| < 1 + L =: K.$$

Implikace ($\Leftarrow$): Opět z předpokladu $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$ speciálně vyplývá, že

$$(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|f(z)| < 1 + |f_{m_0}(z)|).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $m_0 \geq n_0$, a tedy $\sup_{z \in A} |f_{m_0}(z)| < K$. Odtud dostaneme

$$\sup_{z \in A} |f(z)| < 1 + \sup_{z \in A} |f_{m_0}(z)| < 1 + K,$$

nebo-li f je omezená na A. $\square$

Nyní se vrátíme k důkazu 3. tvrzení Věty 1.13. Jelikož jsou f i g omezené, máme

$$(\exists L > 0) \left(\sup_{z \in A} |g(z)| < L \right)$$

a

$$(\exists K > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \left(\sup_{n \geq n_0} \sup_{z \in A} |f_n(z)| < K \right)$$

podle Lemma 1.14. Dále z předpokladů

$$f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f \quad \text{a} \quad g_n \overset{A}{\rightrightarrows} g$$

plyne

$$\begin{aligned}
&(\forall \epsilon > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_1)(\forall z \in A) \left(|f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2L} \right), \\
&(\forall \epsilon > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_2)(\forall z \in A) \left(|g_n(z) - g(z)| < \frac{\epsilon}{2K} \right).
\end{aligned}$$

Odtud pro libovolné $\epsilon > 0$, $n \geq n_3 := \max(n_0, n_1, n_2)$ a každé $z \in A$ vyvodíme

$$\begin{aligned}
|f_n(z)g_n(z) - f(z)g(z)| &= |f_n(z)\left(g_n(z) - g(z)\right) - \left(f(z) - f_n(z)\right) g(z)| \\
&\leq |f_n(z)|\,|g_n(z) - g(z)| + |f_n(z) - f(z)|\,|g(z)| \\
&\leq K \frac{\epsilon}{2K} + \frac{\epsilon}{2L} L = \epsilon,
\end{aligned}$$

což znamená, že $f_n g_n \overset{A}{\rightrightarrows} fg$. □

Příklad 1.15: Předpoklad omezenosti funkcí f a g ve 3. tvrzení Věty 1.13 nelze vypustit. Položme např.

$$f_n(x) := x \quad \text{a} \quad g_n(x) := \frac{1}{n}$$

pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Potom zřejmě

$$f_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f \quad \text{a} \quad g_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0,$$

kde $f(x) = x$, ale funkční posloupnost

$$f_n(x)g_n(x) = \frac{x}{n}$$

nekonverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ (ověřte).

Uvedeme ještě definici tzv. *lokálně stejnoměrné konvergence*. Tato konvergence je „vlastní“ prostorům analytických funkcí, se kterými se čtenář může seznámit v partiích komplexní analýzy, viz např. [6].

Definice 1.16 (Lokálně stejnoměrná konvergence)**:** Buďte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f komplexní funkce definované na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje lokálně stejnoměrně* k funkci f na množině A, právě když

$$(\forall z \in A)(\exists H_z \text{ okolí } z)\left(f_n \overset{H_z \cap A}{\rightrightarrows} f\right).$$

Poznámka: Pod pojmem okolí H_z zde rozumíme množinu $H_z = \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| < r\}$ pro nějaké $r > 0$ (otevřený kruh v $\mathbb{C}$ se středem v z a poloměrem $r > 0$).

Pokud $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$, pak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje také lokálně stejnoměrně k f na A, viz Cvičení 1.2. Naopak to neplatí. Např. posloupnost funkcí $f_n(x) = x^n$ konverguje lokálně stejnoměrně k 0 na intervalu $(0, 1)$, ale nekonverguje stejnoměrně na $(0, 1)$. Pokud je ale množina A tzv. kompaktní, tj. omezená a uzavřená (viz Věta 2.104), splývá lokálně stejnoměrná konvergence na A se stejnoměrnou konvergencí na A.

1.3 Věty o záměně

V následující větách zformulujeme podmínky za jakých se spojitost, diferencovatelnost a integrabilita přenáší z funkční posloupnosti na limitní funkci a kdy můžeme zaměňovat limity, limitu a derivaci a limitu a integrál.

Nejprve zformulujeme tzv. větu o limitě. Připomeňme si definici *limity funkce vzhledem k množině* A:

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f(z) = c \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in A, 0 < |z - z_0| < \delta)(|f(z) - c| < \epsilon).$$

Aby měla definice rozumný smysl, požadujeme navíc, aby množina $A \cap \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$ byla neprázdná pro libovolné $\delta > 0$. Jinými slovy limitu funkce vzhledem k A definujeme v tzv. *hromadném bodě* množiny A, tj. v takovém bodě $z \in \mathbb{C}$, v jehož libovolném okolí H_z leží nějaký bod z $A \setminus \{z\}$, tzn.

$$(\forall \delta > 0)(\exists w \in A)(0 < |w - z| < \delta).$$

Množinu hromadných bodů množiny A značíme A'.

Věta 1.17 (O limitě)**:** Buďte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f funkce definované na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Dále předpokládejme:

i. $z_0 \in A'$.

ii. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje limita $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f_n(z) =: a_n$.

iii. $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$.

Potom platí:

1. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.
2. Existuje limita $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f(z)$.
3. Platí rovnost: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f(z)$.

Jinými slovy lze zaměňovat pořadí limit:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f_n(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} \lim_{n\to\infty} f_n(z).$$

Důkaz. Nejprve dokážeme 1. tvrzení. Zvolme pevně $\epsilon > 0$. Z předpokladu iii. a Věty 1.12 plyne

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon).$$

Využijeme-li předpoklad ii. a pošleme $z \to z_0$ v poslední nerovnosti, dostaneme

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(|a_n - a_m| \leq \epsilon),$$

což je Bolzanova–Cauchyho podmínka konvergence číselné posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. To znamená, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.

V druhé části důkazu ověříme najednou tvrzení 2. a 3. Označme $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Podle trojúhelníkové nerovnosti máme

$$|f(z) - a| \leq |f(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - a_m| + |a_m - a|.$$

pro libovolné $m \in \mathbb{N}$. Podle předpokladu iii. lze najít nějaké pevné $m \in \mathbb{N}$ dostatečně velké tak, že

$$|f(z) - f_m(z)| < \epsilon/3$$

pro každé $z \in A$. Z již dokázaného tvrzení 1. můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že zvolené m je také dost velké, aby platilo

$$|a_m - a| < \epsilon/3.$$

Nakonec podle předpokladu ii. můžeme najít okolí H_{z_0} takové, že

$$|f_m(z) - a_m| < \epsilon/3$$

pro všechna $z \in H_{z_0} \cap A$, $z \neq z_0$. Celkem tak dostáváme, že

$$|f(z) - a| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

pro všechna $z \in H_{z_0} \cap A \setminus \{z_0\}$, což dokazuje obě tvrzení 2. a 3. □

Důsledek předchozí věty je, že stejnoměrná konvergence zachovává spojitost. Připomeňme, že o funkci f řekneme, že je *spojitá v bodě* z_0 *vzhledem k* A, pokud

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in A, |z - z_0| < \delta)(|f(z) - f(z_0)| < \epsilon).$$

Všimněte si, že pokud bod z_0 *není* hromadným bodem A (je to tzv. *izolovaný bod* A), je f automaticky spojitá v z_0 vzhledem k A.

Věta 1.18 (O spojitosti)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f jsou funkce definované na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ a $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$. Jsou-li f_n spojité v bodě $z_0 \in A$ vzhledem k A pro každé $n \in \mathbb{N}$, potom je také f spojitá v bodě z_0 vzhledem k A.

Důkaz. Podle poznámky výše, stačí uvažovat případ $z_0 \in A'$. Potom je funkce f spojitá v z_0 vzhledem k A, právě když

$$f(z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f(z).$$

Aplikujeme-li nyní Větu 1.17, jejíž předpoklad ii. je splněn díky spojitosti f_n v bodě z_0 vzhledem k A, dostaneme

$$f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = \lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f_n(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f(z).$$

$\square$

Poznámka: Vzhledem k lokálnímu charakteru spojitosti v bodě můžeme předpoklad $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$ ve Větě 1.18 nahradit $f_n \overset{H_{z_0} \cap A}{\rightrightarrows} f$, kde H_{z_0} je nějaké okolí z_0. Speciálně Věta 1.18 platí, nahradíme-li předpoklad stejnoměrné konvergence lokálně stejnoměrnou konvergencí. Platí tedy tvrzení, které lze stručně vyslovit: *„Lokálně stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá."*

Poznámka: V následujícím smyslu nelze tvrzení Věty 1.18 obrátit: Jsou-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f spojité funkce na A (vzhledem k A) a $f_n \overset{A}{\to} f$, nevyplývá z toho nutně stejnoměrná konvergence posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na A. Tuto skutečnost ilustruje Příklad 1.15. Konvergence, která zachovává spojitost a platí pro ni také obrácené tvrzení ve smyslu výše, je tzv. kvazistejnoměrná konvergence, která je slabší než konvergence stejnoměrná. My se v tomto kurzu kvazistejnoměrnou konvergencí zabývat nebudeme. Čtenář se o ní může dozvědět více ve skriptu [26]. Obrácené tvrzení platí za jistých dodatečných předpokladů i pro stejnoměrnou konvergenci, viz např. [21, Thm. 7.13].

Poznámka: Věty 1.18 a 1.12 implikují, že prostor spojitých a omezených funkcí na A vybavený normou $\|f\| := \sup_{z\in A} |f(z)|$, který se obvykle značí $C(A)$, je úplný, tedy Banachův. Vlastnostmi prostoru $C(A)$ se budete hlouběji zabývat ve funkcionální analýze.

Další věta se týká vztahu integrace a stejnoměrné konvergence. V ní se omezíme na funkce definované na uzavřeném a omezeném intervalu, neboť na těchto funkcích je vystavěná klasická teorie Riemannova integrálu.

Věta 1.19: (O integraci) Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f reálné funkce definované na $[a, b]$. Předpokládejme, že

i. $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$,

ii. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je f_n riemannovsky integrabilní na $[a, b]$.

Potom platí:

1. Limitní funkce f je riemannovsky integrabilní na $[a, b]$.

2. Platí rovnost:
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Jinými slovy lze zaměňovat pořadí limity a integrálu:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme 1. tvrzení. Připomeňme, že funkce f je riemannovsky integrabilní na $[a, b]$, právě když

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \sigma\ \delta\text{-rozdělení } [a, b])(S_\sigma(f) - s_\sigma(f) < \epsilon),$$

kde

$$S_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{m} M_i^{(f)} (x_i - x_{i-1}) \quad \text{a} \quad s_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{m} m_i^{(f)} (x_i - x_{i-1})$$

jsou horní a dolní integrální součet f při rozdělení σ,

$$M_i^{(f)} = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad \text{a} \quad m_i^{(f)} = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

a $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$ jsou body rozdělení σ.

Zvolme $\epsilon > 0$. Podle předpokladu i. existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ je

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4(b-a)} \tag{1}$$

pro každé $x \in [a, b]$. Zvolme pevně nějaké $n \geq n_0$. Podle předpokladu ii. existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolné δ-rozdělení σ intervalu $[a, b]$ platí

$$S_\sigma(f_n) - s_\sigma(f_n) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2}$$

Nerovnost (1) lze napsat ve tvaru

$$f_n(x) - \frac{\epsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\epsilon}{4(b-a)},$$

ze které plyne

$$m_i^{(f_n)} - \frac{\epsilon}{4(b-a)} \leq m_i^{(f)} \leq M_i^{(f)} \leq M_i^{(f_n)} + \frac{\epsilon}{4(b-a)}$$

pro každé $i \in \hat{m}$. Vynásobíme-li nerovnosti výrazem $(x_i - x_{i-1})$ a sečteme přes $i \in \hat{m}$, dostaneme

$$s_\sigma(f_n) - \frac{\epsilon}{4} \leq s_\sigma(f) \leq S_\sigma(f) \leq S_\sigma(f_n) + \frac{\epsilon}{4}.$$

Přeuspořádáním nerovností a využitím odhadu (2) nakonec odvodíme, že

$$S_\sigma(f) - s_\sigma(f) \leq S_\sigma(f_n) - s_\sigma(f_n) + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

což implikuje riemannovskou integrabilitu f na $[a, b]$.

Tvrzení 2. již ověříme snadno, neboť pro každé $n \geq n_0$ máme

$$\left| \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, \mathrm{d}x \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{4(b-a)}\mathrm{d}x = \frac{\epsilon}{4},$$

a proto

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

□

Poznámka: Pro ospravedlnění záměny limity a integrálu je stejnoměrná konvergence podmínka postačující nikoliv nutná. Obvyklá argumentace pro tuto záměnu v matematické literatuře používá obecnější tzv. Lebesgueovu větu. Integrál v této větě ovšem není Riemannův, a proto si tuto větu dokážeme až mnohem později ve výkladu teorie Lebesgueova integrálu (viz Věta 5.43).

Poslední věta o záměně se týká vztahu derivace a stejnoměrné konvergence.

Věta 1.20 (O derivaci)**:** Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost reálných diferencovatelných funkcí na (a, b). Předpokládejme dále, že:

i. Existuje $c \in (a, b)$ takové, že posloupnost $\{f_n(c)\}_{n=1}^\infty$ konverguje.

ii. Posloupnost $\{f_n'\}_{n=1}^\infty$ stejnoměrně konverguje na (a, b).

Potom platí:

1. Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje stejnoměrně na (a, b).

2. Limitní funkce f posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je diferencovatelná na (a, b).

3. Derivace f' je limitní funkcí posloupnosti $\{f_n'\}_{n=1}^\infty$ na (a, b), tzn.

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Důkaz. Nejdříve dokážeme tvrzení 1. Zvolme $\epsilon > 0$. Bolzanova–Cauchyho podmínka a předpoklady i. a ii. implikují, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \geq n_0$ je

$$|f_n(c) - f_m(c)| < \frac{\epsilon}{2}$$

a

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

pro všechna $x \in (a, b)$. Aplikujeme-li Lagrangeovu větu o přírůstku na funkci $f_n - f_m$, dostaneme

$$|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(t)| \leq |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)|\,|x - t| \tag{3}$$

kde $x, t \in (a, b)$ a ξ je bod ležící mezi x a t. Výraz vpravo můžeme dále odhadnout a dostaneme nerovnost

$$|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(t)| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}|x - t| < \frac{\epsilon}{2},$$

která platí pro všechna $x, t \in (a, b)$. Odtud máme

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(c)| + |f_n(c) - f_m(c)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

pro každé $m, n \geq n_0$ a $x \in (a, b)$. Tvrzení 1. tedy platí podle Věty 1.12.

V druhé části důkazu dokážeme najednou tvrzení 2. a 3. Zafixujme $x \in (a, b)$ a definujme si pomocné funkce

$$\phi_n(t) := \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \quad \text{a} \quad \phi(t) := \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

pro $t \in (a, b) \setminus \{x\}$. Jelikož jsou f_n diferencovatelné, máme

$$\lim_{t \to x} \phi_n(t) = f_n'(x)$$

pro všechny $n \in \mathbb{N}$. Nerovnost (3), kterou jsme odvodili aplikací Lagrangeovy věty, lze napsat ve tvaru

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

pro všechna $m, n \geq n_0$ a $t \in (a, b) \setminus \{x\}$. Tedy podle Věty 1.12 je posloupnost $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konvergentní na $(a, b) \setminus \{x\}$. Přihlédneme-li navíc k tomu, že $f_n \xrightarrow{(a,b)} f$, zjistíme, že

$$\phi_n \overset{(a,b)\setminus\{x\}}{\rightrightarrows} \phi.$$

Nyní již můžeme aplikovat Větu 1.17 na posloupnost $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ s $A = (a, b) \setminus \{x\}$, z čehož vyplývá, že existuje limita $\lim_{t \to x} \phi(t)$, což znamená z definice ϕ, že existuje derivace f v bodě x. Nakonec máme

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \phi(t) = \lim_{t \to x} \lim_{n \to \infty} \phi_n(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{t \to x} \phi_n(t) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x).$$

$\square$

Poznámka: Už na Příkladu 1.7 lze pozorovat, že ze stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ nelze nic usuzovat o konvergenci posloupnosti derivací $\{f_n'\}_{n=1}^\infty$. Na druhou stranu Věta 1.20 ukazuje, že naopak jistý vztah platí, jsou-li splněny předpoklady i. a ii. Věty 1.20. Tvrzení 1. Věty 1.20 představuje další kritérium stejnoměrné konvergence.

Poznámka: Tvrzení 2. a 3. Věty 1.20 zůstává v platnosti, nahradíme-li předpoklad ii. slabším požadavkem lokálně stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{f_n'\}_{n=1}^\infty$ na (a, b). Za tohoto slabšího předpokladu platí tvrzení 1. také pouze lokálně, tedy $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje lokálně stejnoměrně na (a, b).

1.4 Funkční řady

Definice 1.21 (Stejnoměrná konvergence řady)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ je posloupnost komplexních funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset C$. Řekneme, že funkční řada $\sum_{n=0}^\infty f_n$ *konverguje stejnoměrně* na množině A, právě když funkční posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ definovaná vztahem

$$s_n(z) := \sum_{k=0}^{n} f_k(z), \quad z \in A,$$

konverguje stejnoměrně na A.

Poznámka: Zcela analogicky definujeme *lokálně stejnoměrnou konvergenci* řady $\sum_{n=0}^\infty f_n$ na A.

Poznámka: Zde členy posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ indexujeme prvky $\mathbb{N}_0$ (od nuly). Občas ale budeme také indexovat prvky $\mathbb{N}$ (od jedničky). Způsob indexování je samozřejmě nepodstatný a my si ho budeme volit libovolně podle potřeby.

Příklad 1.22: Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

konverguje stejnoměrně na $A_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$, kde $r \in (0, 1)$, neboť posloupnost částečných součtů

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$

konverguje stejnoměrně na A_r. Na otevřeném jednotkovém kruhu $A := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ovšem posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ stejnoměrně nekonverguje, a proto ani řada $\sum_{n=0}^\infty z^n$ není stejnoměrně konvergentní na A. Řada $\sum_{n=0}^\infty z^n$ konverguje lokálně stejnoměrně na A (rozmyslete).

Poznatky získané v části o funkčních posloupnostech nyní můžeme aplikovat na posloupnost částečných součtů a dostaneme poměrně jednoduše odpovídající věty o funkčních řadách. První takovou větou je Bolzanovo–Cauchyho kritérium stejnoměrné konvergence funkční řady. Jednoduchý přepis vět, který bychom získali prostým nahrazením funkční posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ posloupností částečných součtů $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ by ale nebyl příliš užitečný, neboť posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ není typicky možné, na rozdíl od jednoduchého Příkladu 1.22, jednoduše vyjádřit a může být proto velmi nevhodné s ní přímo pracovat. Daleko užitečnější je zformulovat tvrzení o funkčních řadách $\sum_{n=0}^\infty f_n$ v termínech posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^\infty$, kterou v řadě sčítáme.

Věta 1.23 (Bolzano–Cauchy)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Potom řada funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na A, právě když

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall z \in A)\left(\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| < \epsilon\right).$$

Důkaz. Stačí aplikovat Větu 1.12 na posloupnost částečných součtů. □

Důsledek 1.24 (Nutná podmínka stejnoměrné konvergence)**:** Pokud řada funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na množině A, pak

$$f_n \overset{A}{\rightrightarrows} 0.$$

Důkaz. Stačí použít Větu 1.23 a položit $p = 1$. □

Příklad 1.25: Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

konverguje bodově pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, což plyne např. z Dirichletova kritéria. Ukážeme, že řada není stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 2\pi]$ pomocí Bolzanova–Cauchyho kritéria. Lze ukázat, že tato řada není stejnoměrně konvergentní na libovolném intervalu, který má neprázdný průnik s množinou $2\pi\mathbb{Z}$.

Pokud by řada byla stejnoměrně konvergentní na $[0, 2\pi]$, potom bychom k libovolnému $\epsilon > 0$ našli $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ by platilo

$$\sup_{x \in [0,2\pi]} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin(kx)}{k}\right| < \epsilon.$$

Ukážeme, že to není možné. Položme $p := n + 2$ a $x = x_n := 1/(2n)$. Potom

$$\sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{\sin(k/(2n))}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{\sin(1/2)}{k}.$$

Úsek harmonické řady můžeme zespodu odhadnout integrálem:

$$\sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} \geq \int_{n+1}^{2n+2} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log \frac{2n+2}{n+1} = \log 2,$$

a proto pro všechna $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{\sin(k/(2n))}{k} \geq \sin(1/2) \log 2 > 0.$$

Tedy, je-li $\epsilon < \sin(1/2)\log 2$, Bolzanova–Cauchyho podmínka neplatí.

Později budeme dokonce schopni řadu sečíst. V části věnované trigonometrickým řadám uvidíme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & \text{je-li } x \in (0, 2\pi), \\ 0, & \text{je-li } x \in \{0, 2\pi\}. \end{cases}$$

Tedy součtová funkce řady není spojitá na $[0, 2\pi]$. Pokud by ale řada konvergovala stejnoměrně na $[0, 2\pi]$, potom by její součtová funkce musela být spojitá, což plyne z Věty 1.18 aplikované na posloupnost částečných součtů. To je alternativní argument dokazující, že řada ze zadaní není stejnoměrně konvergentní na $[0, 2\pi]$.

Věta 1.26 (Weierstrass)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Dále předpokládejme, že

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall z \in A)\,(|f_n(z)| \leq g_n(z))\,.$$

Potom, konverguje-li $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ stejnoměrně na A, je také $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konvergentní na A.

Poznámka: Je-li speciálně $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ číselná posloupnost funkcí nezávislých na z, tzn., že platí

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\exists M_n \geq 0)(\forall z \in A)(|f_n(z)| \leq M_n),$$

je řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konvergentní na A, pokud konverguje číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$. Toto kritérium se v literatuře objevuje pod názvem *Weierstrassův M-test*.

Důkaz Věty 1.26. Vyplývá ihned z nerovnosti

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z)$$

a Věty 1.23. □

Příklad 1.27: Vyšetříme stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-\sqrt{n}x}$$

na intervalu $[0, \infty)$. Vyšetřením průběhu funkce $f(t) := te^{-t}$ snadno zjistíme, že $0 \leq f(t) \leq f(1) = 1/e$ pro všechna $t \in [0, \infty)$. Tedy platí

$$\left| \frac{x}{n} e^{-\sqrt{n}x} \right| = \frac{f(\sqrt{n}x)}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{en^{3/2}}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, \infty)$. Jelikož majorizující číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ konverguje, je podle Věty 1.26 řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-\sqrt{n}x}$$

stejnoměrně konvergentní na $[0, \infty)$.

Příklad 1.28: Walter Rudin začíná svou knihu [22] tvrzením, že komplexní exponenciální funkce je nejdůležitější funkcí v matematice. Tato funkce je definována řadou

$$e^z \equiv \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

která konverguje bodově pro každé $z \in \mathbb{C}$. Zafixujeme-li $R > 0$, vyplývá z Weierstrassova kritéria, že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

konverguje stejnoměrně na kruhu $A_R := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$, neboť

$$\sup_{z \in A_R} \left| \frac{z^n}{n!} \right| \leq \frac{R^n}{n!}$$

a číselná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!}$$

je konvergentní. Speciálně z toho plyne, že řada z definice $\exp(z)$ konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{C}$.

Podobně se odpovídající řadou definují trigonometrické funkce

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{a} \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

pro každé $z \in \mathbb{C}$. Potom platí tzv. *Eulerův vzorec*

$$e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

jehož odvození je přenecháno čtenáři jako Cvičení 1.4.

Příklad 1.29: Slavná Riemannova zeta funkce je definovaná vztahem

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

pro $z \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Re} z > 1$, neboť pro tato z řada vpravo bodově konverguje. Obecná mocnina s komplexním argumentem, která se v definici zeta funkce objevuje, je definována vztahem

$$n^z := e^{z \log n},$$

kde exponenciální funkce s komplexním argumentem byla definována v Příkladu 1.28. Buď $r > 1$, potom pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z \geq r$, je

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} \leq \frac{1}{n^r},$$

kde jsme použili vztah $|e^w| = e^{\operatorname{Re} w}$ platný pro každé $w \in \mathbb{C}$, viz Cvičení 1.7. Z Weierstrassova kritéria potom vyplývá, že řada z definice funkce ζ konverguje stejnoměrně na polorovině $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq r\}$ pro libovolné $r > 1$. Speciálně z toho plyne, že tato řada konverguje lokálně stejnoměrně na otevřené polorovině $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$.

Riemannova zeta funkce patří mezi tzv. *Dirichletovy řady*, což jsou funkční řady tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z},$$

kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je komplexní posloupnost. Dirichletovy řady mají podobně jako např. mocninné řady mnoho speciálních vlastností. My se ovšem v tomto kurzu nebudeme studiem speciálních vlastností Dirichletových řad zabývat. Čtenář najde více např. v knize [12].

Na rozdíl od Weierstrassova kritéria, které lze aplikovat jen na (bodově) absolutně konvergentní řady lze následující kritéria Dirichleta a Abela použít i v jiných případech.

Věta 1.30: Nechť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ a $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ *monotónní* posloupnost reálných funkcí definovaných na A. Označme $s_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$. Nechť dále platí jedna z následujících podmínek

i. (Dirichlet) Posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ je tzv. *stejně omezená*, tzn.

$$(\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall z \in A)(|s_n(z)| \leq K),$$

a $g_n \overset{A}{\rightrightarrows} 0$.

ii. (Abel) Posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na A a $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ je stejně omezená.

Potom řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ konverguje stejnoměrně na A.

Důkaz. Důkaz staví na tzv. Abelově parciální sumaci. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ a $p \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k g_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} (s_k - s_{k-1}) g_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} s_k g_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} s_k g_{k+1} \\ &= s_{n+p} g_{n+p} - s_n g_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} s_k (g_k - g_{k+1}). \end{aligned} \tag{4}$$

1. Předpokládejme, že platí podmínka i. Zvolme $\epsilon > 0$. Z předpokladu $g_n \overset{A}{\rightrightarrows} 0$ plyne, že

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)\left(|g_n(z)| < \frac{\epsilon}{4K}\right).$$

Potom pro libovolné $n \geq n_0$, $p \in \mathbb{N}$ a $z \in A$ můžeme s využitím výrazu (4) odhadovat

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) g_k(z)\right| &\leq |s_{n+p}(z)||g_{n+p}(z)| + |s_n(z)||g_{n+1}(z)| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |s_k(z)||g_k(z) - g_{k+1}(z)| \\ &< K\frac{\epsilon}{4K} + K\frac{\epsilon}{4K} + K\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |g_k(z) - g_{k+1}(z)|. \end{aligned}$$

Podle předpokladu je posloupnost $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ monotónní, a proto je výraz $g_k(z) - g_{k+1}(z)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ buďto nezáporný, nebo nekladný. V každém případě z toho plyne, že

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |g_k(z) - g_{k+1}(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (g_k(z) - g_{k+1}(z)) \right| = |g_{n+1}(z) - g_{n+p}(z)|.$$

Odtud dále získáváme odhad

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) g_k(z) \right| &< \frac{\epsilon}{2} + K|g_{n+1}(z) - g_{n+p}(z)| \le \frac{\epsilon}{2} + K|g_{n+1}(z)| + K|g_{n+p}(z)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + K\,\frac{\epsilon}{4K} + K\,\frac{\epsilon}{4K} = \epsilon, \end{aligned}$$

který platí pro každé $n \ge n_0$, $p \in \mathbb{N}$ a $z \in A$, což podle Bolzanova–Cauchyho kritéria implikuje tvrzení věty.

2. Nyní předpokládejme, že platí podmínka ii. Nejprve mírně přepíšeme výraz (4) do tvaru:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k g_k = (s_{n+p} - s_n) g_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (s_k - s_n)(g_k - g_{k+1}).$$

Z předpokladu stejné omezenosti posloupnosti $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ na A plyne, že

$$(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall z \in A)\left(|g_n(z)| \le M\right),$$

Dále zvolme $\epsilon > 0$ libovolně ale pevně. Podle druhého předpokladu je $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ stejnoměrně konvergentní na A, a proto podle Věty 1.12 existuje $n_0 \in \mathbb{N}_0$ takové, že

$$|s_k(z) - s_n(z)| < \frac{\epsilon}{3M}$$

pro všechna $z \in A$ a $n, k \in \mathbb{N}_0$ taková, že $k \ge n \ge n_0$. Potom pro libovolné $n \ge n_0$, $p \in \mathbb{N}$ a $z \in A$ máme

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) g_k(z) \right| &\le |s_{n+p}(z) - s_n(z)||g_{n+p}(z)| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |s_k(z) - s_n(z)||g_k(z) - g_{k+1}(z)| \\ &< \frac{\epsilon}{3M}|g_{n+p}(z)| + \frac{\epsilon}{3M} \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |g_k(z) - g_{k+1}(z)| \\ &= \frac{\epsilon}{3M}|g_{n+p}(z)| + \frac{\epsilon}{3M}|g_{n+1}(z) - g_{n+p}(z)|. \end{aligned}$$

Poslední rovnost platí díky monotonii posloupnosti $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$. Dále využijeme stejné omezenosti $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ a dostaneme finální odhad:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) g_k(z) \right| < \frac{\epsilon}{3M}|g_{n+p}(z)| + \frac{\epsilon}{3M}\left(|g_{n+1}(z)| + |g_{n+p}(z)|\right) \le \frac{\epsilon}{3M}\,M + \frac{\epsilon}{3M}\,2M = \epsilon,$$

který platí pro každé $n \ge n_0$, $p \in \mathbb{N}$ a $z \in A$. Tvrzení věty nyní vyplývá z Bolzanova–Cauchyho kritéria. $\square$

Příklad 1.31: Ukážeme, že řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$
konverguje stejnoměrně na $[\delta, 2\pi - \delta]$, kde $\delta \in (0, \pi)$. Srovnejte s Příkladem 1.25. Použijeme Dirichletovo kritérium, kde položíme
$$f_n(x) := \sin(nx) \quad \text{a} \quad g_n(x) := \frac{1}{n}.$$
Posloupnost $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zřejmě klesající a $g_n \overset{[\delta,2\pi-\delta]}{\rightrightarrows} 0$. Stačí tedy ověřit, že posloupnost částečných součtů $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ je stejně omezená na $[\delta, 2\pi - \delta]$. Podle Cvičení 1.8 máme
$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin(xn/2)\sin(x(n+1)/2)}{\sin(x/2)}.$$
Nyní si stačí uvědomit, že pro $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ platí odhad
$$|s_n(x)| \le \frac{1}{\sin(\delta/2)},$$
který implikuje stejnou omezenost posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ na $[\delta, 2\pi - \delta]$.

Příklad 1.32: Vyšetříme ještě stejnoměrnou konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)\sin(nx)}{n}$$
na $\mathbb{R}$. Podobně jako v předchozím příkladě aplikujeme Dirichletovo kritérium s
$$f_n(x) := \sin(x)\sin(nx) \quad \text{a} \quad g_n(x) := \frac{1}{n}.$$
V tomto případě dostaneme
$$\begin{aligned} s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) &= \frac{\sin(x)}{\sin(x/2)} \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right), \end{aligned}$$
odkud plyne, že
$$|s_n(x)| \le 2.$$
pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Tedy $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stejně omezená a také ostatní předpoklady Dirichletova kritéria jsou splněny. Proto řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)\sin(nx)}{n}$$
konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Tento příklad ukazuje, srovnáme-li ho s Příkladem 1.25, že nelze postupovat tak, že bychom funkci $\sin(x)$ „vytkli" ven ze sumy a vyšetřovali řadu z Příkladu 1.25.

Podobně jako u funkčních posloupností nás také u funkčních řad zajímá, kdy je možné zaměnit např. limitu a sumu, integrál a sumu, apod. Abychom odvodili věty o záměně pro funkční řady, stačí věty o záměně pro funkční posloupnosti aplikovat na posloupnost částečných součtů funkční řady. Pro jejich důležitost si věty o záměně pro funkční řady zformulujeme.

Věta 1.33 (O limitě)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Dále předpokládejme:

i. $z_0 \in A'$.

ii. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje limita $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f_n(z) =: a_n$.

iii. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na A k součtové funkci s.

Potom platí:

1. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.
2. Existuje limita $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} s(z)$.
3. Platí rovnost: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} s(z)$.

Jinými slovy lze zaměňovat pořadí limity a sumy:

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f_n(z).$$

Důkaz. Položme

$$s_n(z) := \sum_{k=0}^{n} f_k(z) \quad \text{a} \quad A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

pro $n \in \mathbb{N}_0$ a $z \in A$. Potom z předpokladu ii. plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} s_n(z) = A_n.$$

Dále bod iii. znamená, že $s_n \overset{A}{\rightrightarrows} s$. Tvrzení věty nyní plyne z Věty 1.17. □

Věta 1.34 (O spojitosti)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ a spojitých v bodě $z_0 \in A$ vzhledem k A. Potom, pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na A, je její součtová funkce spojitá v bodě $z_0 \in A$ vzhledem k A.

Důkaz. Plyne z Věty 1.18. □

Poznámka: Věta 1.34 zůstává v platnosti i pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje lokálně stejnoměrně na A. Z toho plyne tvrzení, jež můžeme stručně vyjádřit jako: *Součtová funkce lokálně stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí je spojitá.*

Věta 1.35 (O integraci)**:** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost riemannovsky integrabilních funkcí na $[a, b]$. Nechť dále řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konverguje na $[a, b]$ k součtové funkci s. Potom je s riemannovsky integrabilní na $[a, b]$ a platí rovnost:

$$\int_a^b s(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Neboli lze zaměňovat pořadí integrálu a sumy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Stačí aplikovat Větu 1.19 na posloupnost částečných součtů. □

Věta 1.36 (O derivaci)**:** Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných diferencovatelných funkcí na (a, b). Předpokládejme dále, že:

i. Existuje $c \in (a, b)$ takové, že posloupnost řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(c)$ konverguje.

ii. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ stejnoměrně konverguje na (a, b).

Potom platí:

1. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na (a, b).

2. Součtová funkce s řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ je diferencovatelná na (a, b).

3. Derivace s' je součtovou funkcí řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ na (a, b), tzn.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Důkaz. Stačí aplikovat Větu 1.20 na posloupnost částečných součtů. □

Poznámka: Předpoklad ii. Věty 1.36 lze nahradit lokálně stejnoměrnou konvergencí $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ na (a, b). Potom místo tvrzení 1. máme pouze lokálně stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ na (a, b), ale tvrzení 2. a 3. zůstávají v platnosti beze změny.

Na závěr této sekce si ukážeme jako zajímavost, že existuje spojitá funkce na $\mathbb{R}$, která není v žádném bodě diferencovatelná. Takovou funkci je bezpochyby obtížné si představit, neboť, přestože je spojitá, její graf musí být „hodně zubatý“. I významní matematici 19. století předpokládali (např. C. F. Gauss), že množina bodů, v nichž spojitá funkce nemá derivaci, musí být v nějakém smyslu omezená. To je pravda, když předpoklad spojitosti mírně zesílíme a vezmeme např. funkce *lipschitzovské*:

$$f \text{ je } \textit{lipschitzovská} \text{ na } (a,b) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists K > 0)(\forall x, y, \in (a,b))(|f(x) - f(y)| < K|x-y|).$$

Potom množina bodů, v nichž není lipschitzovská funkce diferencovatelná, je podle Radenmacherovy věty v jistém smyslu velmi malá (Lebesgueovy míry nula).

Příkladem spojité funkce, která není nikde diferencovatelná, je tzv. Weierstrassova funkce:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos\left(b^n \pi x\right), \tag{5}$$

kde $a \in (0,1)$ a b je liché přirozené číslo takové, že $ab > 1 + 3\pi/2$. K. Weierstrass prezentoval tuto funkci v roce 1872 a její graf byl jeden z prvních studovaných fraktálů, viz Obrázek 1. Později G. H. Hardy [11] ukázal, že stačí předpokládat $a \in (0,1)$ a $b \geq 1/a$ a navíc funkci kosinus v (5) lze nahradit např. tzv. „zig-zag“ funkcí („pilou“), viz funkci ϕ v důkazu následující věty.

Věta 1.37: Existuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je spojitá, ale není v žádném bodě diferencovatelná.

Důkaz. Označme ϕ funkci definovanou na $\mathbb{R}$, která splňuje

$$\phi(x) = |x|, \qquad \text{je-li } x \in [-1,1],$$

a která je 2-periodická, tzn. $\phi(x) = \phi(x+2)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Není těžké si rozmyslet, že platí nerovnost

$$|\phi(t) - \phi(s)| \leq |s - t| \tag{6}$$

pro každé $s, t \in \mathbb{R}$. Speciálně je ϕ spojitá na $\mathbb{R}$.

Definujme

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi\left(4^n x\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Jelikož $|\phi(x)| \leq 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, řada z definice funkce f konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ podle Věty 1.26. Dále z Věty 1.34 vyplývá, že f je spojitá na $\mathbb{R}$.

Ukážeme, že f není diferencovatelná v žádném bodě. Zafixujme $x \in \mathbb{R}$ a $m \in \mathbb{N}$ a definujme

$$\delta_m := \pm\frac{1}{2}4^{-m},$$

kde znaménko volíme tak, aby platilo $(4^m x, 4^m x + 4^m \delta_m) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. To je vždy možné, protože $|4^m \delta_m| = 1/2$. Dále pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$\gamma_n := \frac{\phi\left(4^n(x+\delta_m)\right) - \phi\left(4^n x\right)}{\delta_m}.$$

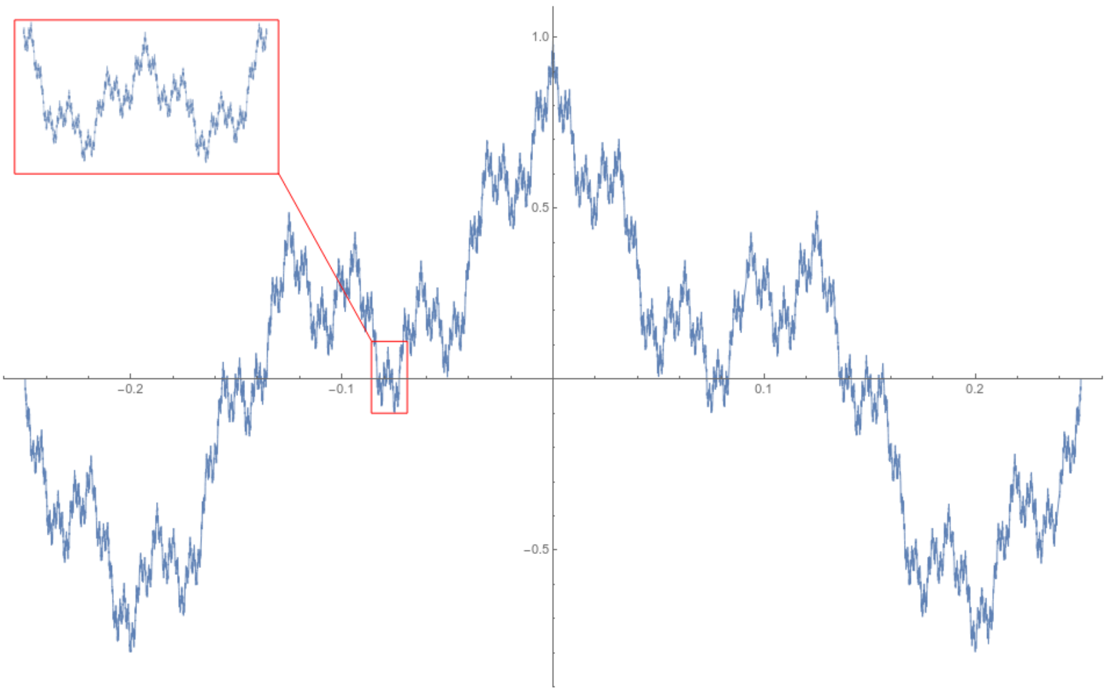
Je-li $n > m$, potom $4^n\delta_m = \pm 4^{n-m}/2$ je sudé číslo, a proto je $\gamma_n = 0$ z 2-periodičnosti funkce ϕ. Je-li $n \leq m$, máme podle (6) nerovnost $|\gamma_n| \leq 4^m$. Speciálně pro $m = n$ platí v předchozí nerovnosti dokonce rovnost $|\gamma_m| = 4^m$, což plyne z definice δ_m. Z těchto pozorování dostaneme

$$\left|\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}\right| = \left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right| \geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = \frac{3^m+1}{2}.$$

Konečně, uvážíme-li, že $\delta_m \to 0$ pro $m \to \infty$, vyplývá z odhadu výše, že

$$\limsup_{\delta\to 0}\left|\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}\right| = \infty.$$

Tedy f není diferencovatelná v bodě x. □



Obrázek 1: Graf Weierstrassovy funkce s $a = 1/2$ a $b = 4$.

1.5 Mocninné řady

Mocninné řady jsou speciální případ funkčních řad, který si zasluhuje zvláštní pozornost. *Mocninnou řadou* rozumíme funkční řadu s členy $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$, kde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$, tzn. řadu tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Čtenář by měl být v tuto chvíli již se základními vlastnostmi mocninných řad seznámen. Úvodní část tohoto výkladu bude tedy spíše opakováním. V druhé části výkladu nám půjde zejména o speciální důsledky vyplývající z partií o stejnoměrné konvergenci.

Věta 1.38 (Cauchy–Hadamard)**:** Buďte $z_0 \in \mathbb{C}$ a $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ komplexní posloupnost. Položme

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}},$$

kde speciálně klademe

$$R := \begin{cases} 0, & \text{je-li } \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \infty, \\ \infty, & \text{je-li } \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0. \end{cases}$$

Potom mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konverguje absolutně, pokud $|z-z_0| < R$ a diverguje, pokud $|z-z_0| > R$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme položit $z_0 := 0$.

Předpokládejme nejdříve, že $R \in (0,\infty)$. Uvažujme fixní $z \in \mathbb{C}$ s $|z| < R$. Označme na chvíli $r := |z|$. Protože je $r < R$, existuje $\delta > 0$ tak, že $r + \delta < R$. Jelikož máme

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R} < \frac{1}{r+\delta},$$

existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je

$$|a_n|^{1/n} < \frac{1}{r+\delta},$$

nebo-li

$$|a_n| < \frac{1}{(r+\delta)^n}.$$

Odtud máme

$$|a_n z^n| \leq \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^n,$$

a proto řada $\sum_{n=0}{}^{\infty}|a_n z^n|$ konverguje podle srovnávacího kritéria.

Nyní zafixujme $z \in \mathbb{C}$ s $|z| > R$. Potom

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R} > \frac{1}{|z|},$$

a proto existuje nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$ takových, že $|a_n||z|^n > 1$. Z toho plyne, že posloupnost s členy $a_n z^n$ nekonverguje k 0, a tudíž řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverguje.

Nakonec si stačí rozmyslet, že první část důkazu lze zreprodukovat i pokud $R = \infty$ a podobně druhou pro případ, že $R = 0$. Tím je platnost tvrzení ověřena i pro krajní hodnoty $R = 0$ a $R = \infty$. $\square$

Definice 1.39 (Poloměr konvergence, obor konvergence)**:** Číslo $R \in [0, \infty]$ z Věty 1.38 nazýváme *poloměr konvergence* mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Dále *oborem konvergence* mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ nazýváme množinu

$$B = B\left(z_0, \{a_n\}_{n=0}^{\infty}\right) := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \text{řada} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ konverguje} \right\}.$$

Z Věty 1.38 vyplývá, že obor konvergence mocninné řady splňuje

$$B_{z_0}(R) \subset B \subset \overline{B}_{z_0}(R),$$

kde jsme označili

$$B_{z_0}(R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\} \quad \text{a} \quad \overline{B}_{z_0}(R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\}.$$

V bodech na hraniční kružnici $\overline{B}_{z_0}(R) \setminus B_{z_0}(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$ mocninná řada konvergovat může, ale nemusí. V komplexním oboru je otázka konvergence mocninné řady v bodech na hraniční kružnici poměrně složitá a nad rámec tohoto kurzu, viz např. [22, Kap. 16].

Omezíme-li se jen na reálné body, je oborem konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

jeden z intervalů

$$(x_0 - R, x_0 + R), \quad [x_0 - R, x_0 + R), \quad (x_0 - R, x_0 + R] \quad \text{a} \quad [x_0 - R, x_0 + R].$$

K vyšetření konvergence mocninné řady v krajních bodech $x_0 \pm R$ je zpravidla možné použít jemnější kritéria pro konvergenci číselných řad známá z 1. ročníku. Variabilitu chování mocninných řad na hranici oboru konvergence ilustrují následující příklady.

Příklad 1.40:

a) Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ je $R = \infty$.

b) Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ je $R = 0$.

c) Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ je $R = 1$. Ve všech bodech kružnice $|z| = 1$ řada diverguje, neboť posloupnost $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ nekonverguje k nule.

d) Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ je $R = 1$. V bodě $z = 1$ řada diverguje jako harmonická řada. V bodě $z = -1$ řada konverguje např. podle Leibnitzova kritéria. Aplikací Dirichletova kritéria lze ukázat, že řada konverguje ve všech bodech kružnice $|z| = 1$ kromě bodu $z = 1$.

e) Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ je $R = 1$. Ve všech bodech kružnice $|z| = 1$ řada konverguje, neboť ji lze majorizovat konvergentní řadou $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Nyní obrátíme svou pozornost na studium stejnoměrné konvergence mocninných řad a její důsledky.

Věta 1.41: Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ s poloměrem konvergence $R > 0$ konverguje stejnoměrně na $\overline{B}_{z_0}(r)$ pro každé $0 < r < R$. Speciálně mocninná řada konverguje lokálně stejnoměrně na $B_{z_0}(R)$.

Důkaz. Zvolme $r \in (0, R)$. Potom

$$|a_n(z-z_0)^n| \leq |a_n| r^n$$

pro všechna $z \in \overline{B}_{z_0}(r)$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Z Věty 1.38 plyne, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ konverguje. Tudíž řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konverguje stejnoměrně na $\overline{B}_{z_0}(r)$ podle Weierstrassova kritéria (Věta 1.26). □

Pokud mocninná řada konverguje v bodě na hranici oboru konvergence, lze tvrzení o stejnoměrné konvergenci mocninné řady z Věty 1.41 rozšířit. V reálném oboru se tak dostáváme k následují Abelově větě.

Věta 1.42 (Abel)**:** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R \in (0, \infty)$. Konverguje-li tato řada v bodě $x_0 + R$ resp. $x_0 - R$, potom konverguje stejnoměrně na intervalu $[x_0, x_0 + R]$ resp. $[x_0 - R, x_0]$.

Důkaz. Větu dokážeme aplikací Abelova kritéria. Předpokládejme např., že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje v bodě $x_0 + R$. Potom řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konverguje. Navíc máme

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sup_{x_0 \leq x \leq x_0 + R} \frac{|x-x_0|^n}{R^n} \leq 1.$$

Nyní stačí aplikovat Abelovo kritérium na řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n.$$

□

Poznámka: Podobnou ideou jako v důkazu Věty 1.42 lze dokázat, že *mocninná řada konverguje stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině jejího oboru konvergence.*

Věta 1.43: Součtová funkce mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ s poloměrem konvergence $R > 0$ je spojitá na $B_{z_0}(R)$.

Důkaz. Věta je okamžitým důsledkem Vět 1.41 a 1.34. □

Tvrzení Věty 1.43 lze také rozšířit i na hraniční body jejího oboru konvergence. Omezíme-li se na reálné mocninné řady, dostaneme klasickou větu, které opět nese jméno Nielse Henrika Abela.

Věta 1.44 (Abel): Buď $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ mocninná řada s poloměrem konvergence $R \in (0, \infty)$. Konverguje-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ v bodě $x_0 + R$ resp. v bodě $x_0 - R$, potom její součtová funkce s je spojitá v bodě $x_0 + R$ zleva resp. v bodě $x_0 - R$ zprava, tzn.

$$s(x_0 + R) = \lim_{x \to (x_0+R)-} s(x) \quad \text{resp.} \quad s(x_0 - R) = \lim_{x \to (x_0-R)+} s(x).$$

Důkaz. Vyplývá z Abelovy Věty 1.42 a Věty 1.34. □

Poznámka: Věty 1.43 a 1.44 implikují následující tvrzení pro reálné mocninné řady: *Součtová funkce mocninné řady je spojitá na svém oboru konvergence vzhledem k tomuto oboru.* Nicméně toto tvrzení zůstává v platnosti i pro komplexní mocninné řady.

Příklad 1.45: Abelovu Větu 1.44 lze použít ke sčítání číselných řad. Připomeneme-li si známé Taylorovy rozvoje elementárních funkcí, dostaneme např. součty:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x \to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \lim_{x \to 1-} \ln(1+x) = \ln 2$$

nebo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \lim_{x \to 1-} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}.$$

Věta 1.46: Nechť s je součtová funkce mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s oborem konvergence B. Potom pro každý interval $[a, b] \subset B$ platí:

$$\int_a^b s(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(b-x_0)^{n+1} - (a-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Důkaz. Z Vět 1.41 a 1.42 vyplývá, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje stejnoměrně na libovolném intervalu $[a, b] \subset B$. Tvrzení je proto důsledek Věty 1.35. □

Věta 1.47: Součtová funkce s mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s poloměrem konvergence $R > 0$ je diferencovatelná v každém bodě $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ a platí:

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

pro každé $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Důkaz. Podle předpokladu a Věty 1.38 je

$$\limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}.$$

Odtud plyne, že poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-x_0)^n$$

je také R, neboť

$$\limsup_{n\to\infty} |(n+1)a_{n+1}|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} |n+1|^{1/n} \limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}|^{1/n} = \frac{1}{R}.$$

Potom podle Věty 1.41 řada $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ konverguje lokálně stejnoměrně na $(x_0 - R, x_0 + R)$, a proto můžeme aplikovat Větu 1.36, která již implikuje tvrzení. □

Poznámka: Věta 1.47 platí i pro komplexní mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, kde interval $(x_0 - R, x_0 + R)$ je nahrazen množinou $B_{z_0}(R)$ a derivaci $s'(z)$ chápeme v komplexním smyslu.

Mocninnou řadu můžeme tedy na vnitřku oboru konvergence derivovat člen po členu a výsledkem je opět mocninná řada se stejným poloměrem konvergence. Větu 1.47 můžeme aplikovat opakovaně a zjistíme tak, že součtová funkce s má na $(x_0 - R, x_0 + R)$ derivace všech řádů a pro n-tou derivaci platí:

$$s^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)a_k(x-x_0)^{k-n}, \qquad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Dosadíme-li $x = x_0$ do této rovnosti dostaneme vztah mezi koeficienty mocninné řady a její součtové funkce:

$$a_n = \frac{s^{(n)}(x_0)}{n!}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Funkce f, která má na intervalu (a, b) derivace všech řádů se nazývá *hladká* na (a, b) a množinu všech hladkých funkcí na (a, b) značíme $C^{\infty}(a, b)$. Součtová funkce mocninné řady je tedy hladká funkce na vnitřku oboru konvergence.

Definice 1.48 (Taylorova řada)**:** Nechť funkce f má v bodě z_0 derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou* funkce f se středem v bodě z_0.

Z předchozí diskuze je jasné, že každá mocninná řada s kladným poloměrem konvergence je Taylorovou řadou své součtové funkce. Zamysleme se nad opačným problémem, tj. zda se součtová funkce Taylorovy řady hladké funkce f se středem v x_0, která má kladný poloměr konvergence, rovná funkci f alespoň na nějakém okolí x_0. Za chvíli uvidíme na konkrétním příkladu, že to obecně pravda není. Hladkost totiž k takové vlastnosti nestačí a dostáváme se tak k pojmu *reálně analytická funkce.*

Definice 1.49 (Reálně analytická funkce)**:** Buďte $-\infty \le a < b \le \infty$ a $f \in C^{\infty}(a, b)$. Funkci f nazýváme *reálně analytickou* na (a, b), pokud ke každému $x_0 \in (a, b)$ existuje okolí H_{x_0} tak, že

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad \forall x \in H_{x_0},$$

tj. f je součtovou funkcí své Taylorovy řady se středem v x_0 na H_{x_0}. Množinu reálně analytických funkcí na (a, b) značíme $C^{\omega}(a, b)$.

Z definice je zřejmé, že $C^\omega(a,b) \subset C^\infty(a,b)$, ovšem tato inkluze není rovnost. To znamená, že existují funkce, které jsou hladké, ale nejsou reálně analytické. Ukážeme si to na následujícím klasickém příkladě.

Příklad 1.50: Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{pro } x \neq 0 \\ 0, & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Nejprve ověříme, že $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Zřejmě má f derivace všech řádů v bodech $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Stačí si tedy rozmyslet, že je tomu tak i v bodě $x = 0$. Nejprve se jednoduše matematickou indukcí ověří, že

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

kde p_n je polynom stupně $3n$ (ověřte). Ve výpočtech užijeme toho, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

(víte proč?) z čehož vyplývá, že

$$\lim_{x\to 0} p\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

pro libovolný polynom p.

Matematickou indukcí ověříme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ má f v bodě $x = 0$ derivaci řádu n a platí $f^{(n)}(0) = 0$. Je-li $n = 1$, máme

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Dále pro $n \in \mathbb{N}$ předpokládejme, že $f^{(n)}(0) = 0$. Potom

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Tím jsme dokázali, že $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Protože $f^{(n)}(0) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, je součtová funkce Taylorovy řady funkce f se středem v bodě 0 identicky nulová funkce. Funkce f ale není identicky nulová na žádném okolí bodu 0, a proto f není reálně analytická na žádném intervalu (a,b) obsahujícím bod 0. Speciálně $f \notin C^\omega(\mathbb{R})$.

Existují dokonce hladké funkce, jejichž Taylorova řada má nulový poloměr konvergence, tzn. je divergentní všude mimo svůj střed.

Příklad 1.51: Funkce definovaná vztahem

$$f(x) := \int_0^\infty e^{-t} \cos(xt^2) \mathrm{d}t$$

je hladká na $\mathbb{R}$. K ověření tohoto tvrzení potřebujeme tzv. Větu o derivaci, která uvádí postačující podmínku pro záměnu derivace a integrálu a bude dokázána až mnohem později (viz Věta 5.48). Nicméně z této věty vyplývá, že f má na $\mathbb{R}$ derivace všech řádu a vzorec pro n-tou derivaci dostaneme derivováním funkce v integrálu podle x. Vyjde nám

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \int_0^\infty t^{4n} e^{-t} \cos(xt^2) \mathrm{d}t$$

a

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^\infty t^{4n+2} e^{-t} \sin(xt^2) \mathrm{d}t$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je $f^{(2n+1)}(0) = 0$ a

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \int_0^\infty t^{4n} e^{-t} \mathrm{d}t = (-1)^n (4n)!,$$

kde poslední rovnost lze ověřit integrací per partes. Proto Taylorova řada f se středem v bodě 0 je mocninná řada

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (4n)!}{(2n)!} x^{2n},$$

jejíž poloměr konvergence je 0, neboť

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(2n)!}} = \infty,$$

(ověřte).

Jak tedy poznat, jestli je zadaná hladká funkce reálně analytická? Opravdu užitečný aparát nabízí teorie funkcí komplexní proměnné, který je mimo rámec tohoto kurzu. Další možnost nabízí Taylorova věta, kterou čtenář zná z 1. ročníku. Předpokládejme pro jednoduchost, že f je daná hladká funkce na $\mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{R}$. Předpokládejme dále, že Taylorova řada funkce f se středem v bodě x_0 má poloměr konvergence $R > 0$. Z Taylorovy věty plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ je

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x),$$

kde T_n je n-tý částečný součet Taylorovy řady (Taylorův polynom)

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

a R_{n+1} je zbytek v Taylorově vzorci po n-tém Taylorově polynomu. Odtud plyne, že pro $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ je

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

právě když $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$. V konkrétních případech lze využít např. Langrangeova tvaru zbytku

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

kde ξ je bod ležící na spojnici bodů x a x_0 k ověření, že $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$. Tento postup by měl být znám z 1. ročníku. Lze tak získat Taylorovy řady elementárních funkcí, viz Cvičení 1.9.

Nakonec si uvedeme jednu charakteristiku reálně analytických funkcí. Dokážeme si však jen jednu implikaci, kterou lze jednoduše ukázat prostředky reálné analýzy. Obvyklý důkaz druhé implikace používá tzv. Cauchyův integrální vzorec, který je klasickým výsledkem z komplexní analýzy, avšak mimo rámec tohoto kurzu, viz např. [22].

Věta 1.52: Buďte $-\infty \le a < b \le \infty$ a $f \in C^\infty(a,b)$. Potom $f \in C^\omega(a,b)$, právě když

$$(\forall x_0 \in (a,b))(\exists H_{x_0} \text{ okolí } x_0)(\exists C > 0)(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left(\sup_{x\in H_{x_0}} |f^{(n)}(x)| \le C^{n+1} n!\right).$$

Poznámka: Alternativně můžeme podmínku z Věty 1.52 vyjádřit také takto:

$$(\forall [\alpha,\beta] \subset (a,b))(\exists C > 0)(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left(\sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f^{(n)}(x)| \le C^{n+1} n!\right).$$

Důkaz postačující podmínky z Věty 1.52. Uvažujme $f \in C^\infty(a,b)$ a zvolme libovolné $x_0 \in (a,b)$. Podle předpokladu pak existuje $H_{x_0} \subset (a,b)$ okolí x_0 a konstanta $C > 0$ tak, že

$$\sup_{x\in H_{x_0}} |f^{(n)}(x)| \le C^{n+1} n!$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Ukážeme, že f je součtovou funkcí své Taylorovy řady se středem v x_0 na okolí bodu x_0.

Nejprve si všimneme, že Taylorovo řada funkce f se středem v x_0 má kladný poloměr konvergence, neboť její n-tý člen můžeme odhadnout

$$\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right| \le C^{n+1}|x-x_0|^n.$$

Ze srovnávacího kritéria potom plyne, že pro každé $x \in H_{x_0}$ splňující $|x-x_0| < 1/C$ je Taylorova řada funkce f se středem v x_0 konvergentní. Její poloměr konvergence je tedy alespoň $1/C$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že

$$H_{x_0} \subset \left(x_0 - \frac{1}{2C}, x_0 + \frac{1}{2C}\right),$$

jinak bychom vzali menší okolí H_{x_0} tak, aby to platilo.

Podle diskuze nad tvrzením nyní stačí ukázat, že pro každé $x \in H_{x_0}$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0,$$

kde R_{n+1} je zbytek v Taylorově vzorci po n-tém Taylorově polynomu funkce f. K tomu použijeme Lagrangeův tvar zbytku:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

kde ξ je bod ležící na spojnici bodů x a x_0. Je-li $x \in H_{x_0}$, potom také $\xi \in H_{x_0}$ a navíc $|x - x_0| < 1/(2C)$. Proto můžeme odhadovat

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \leq \frac{C^{n+2}(n+1)!}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2C}\right)^{n+1} = \frac{C}{2^{n+1}}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a $x \in H_{x_0}$. Jelikož výraz napravo konverguje k nule pro $n \to \infty$, je také $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ pro všechna $x \in H_{x_0}$. □

Uveďme už jen jako poznámku několik tvrzení, které dokreslují komplikovanost vztahu hladkých a reálně analytických funkcí. Zaujatý čtenář najde důkazy v uvedených referencích.

Poznámka: 1. Už v roce 1895 E. Borel dokázal, že existuje hladká funkce s libovolně předepsanou posloupností derivací v jednom bodě. Tzn., že k libovolné posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ existuje funkce $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ taková, že $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(f^{(n)}(0) = a_n)$. Jednoduchý důkaz lze nalézt např. v článku [20]. Toto tvrzení dává tušit, že je mnoho hladkých funkcí, které nejsou reálně analytické.

2. Příklad 1.51 ukazuje hladkou funkci, jejíž Taylorova řada se středem v bodě 0 má nulový poloměr konvergence. Existuje příklad hladké funkce, jejíž Taylorova řada se středem v libovolném $x_0 \in \mathbb{R}$ má nulový poloměr konvergence. S pomocí Baireovy věty byl příklad zkonstruován v [17], více explicitní konstrukci lze najít v [5].

3. Z postačujících podmínek uveďme zajímavou *Bernsteinovu větu*: Je-li $f \in C^\infty(a, b)$ a

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall x \in (a, b))(f^{(n)}(x) \geq 0),$$

potom $f \in C^\omega(a, b)$. Odtud např. plyne, že $f(x) = \exp(x)$ je reálně analytická na $\mathbb{R}$. Bersteinovu větu lze zobecnit tak, že pokud pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ nemění $f^{(n)}$ znaménko na (a, b) (ale znaménka mohou být různá pro různá n), potom $f \in C^\omega(a, b)$. Elementární důkaz lze najít v [16].

4. Příklad 1.50 ukazuje hladkou funkci f, jejíž Taylorova řada se středem v bodě 0 má kladný poloměr konvergence, ale nekonverguje k f na žádném okolí 0. Pro jakýkoliv jiný střed $x_0 \neq 0$ by již shoda na nějakém okolí x_0 nastala. Ukazuje se, že je-li pro každé $x_0 \in (a, b)$ poloměr konvergence Taylorovy řady $f \in C^\infty(a, b)$ se středem v x_0 kladný, potom existuje podinterval $(c, d) \subset (a, b)$ takový, že $f \in C^\omega(c, d)$. S pomocí Bairovy věty lze potom ukázat, že množina středů x_0, v nichž se součtová funkce Taylorovy řady $f \in C^\infty(a, b)$ liší od f na každém okolí x_0, je všude řídká podmnožina (a, b), tj. její uzávěr má prázdný vnitřek [3, str. 192].

5. Pokud bychom zkoumali v Příkladu 1.50 poloměr konvergence R jako funkci středu $R = R(x_0)$, zjistili bychom, že $R(x_0) \to 0$ pro $x_0 \to 0$. Pokud ale pro $f \in C^\infty(a, b)$ platí, že

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a, b))(R(x) \geq \delta),$$

je $f \in C^\omega(a,b)$. Toto tvrzení pravděpodobně jako první vyslovil A. Pringsheim již v roce 1893. Ovšem předložil důkaz s netriviální chybou. Nicméně tvrzení je pravdivé a korektní důkazy byly později nalezeny. Jeden takový důkaz i zobecnění této věty najde čtenář v článku [4].

Ve Cvičení 1.5 jsme naznačili, že řady (ne nutně mocninné) lze mezi sebou násobit. Na závěr této části si ukážeme, že mocninné řady můžeme za jistých předpokladů také dělit. Uvažujme dvě mocninné řady obě s kladným poloměrem konvergence:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{a} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Součtové funkce f a g jsou tedy definovány na nějakých kruzích se středem v počátku. Předpokládejme dále, že $g(0) \neq 0$, tzn. $b_0 \neq 0$. Potom je funkce

$$h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$$

dobře definovaná na nějakém okolí počátku. Navíc lze ukázat, že h je součtovou funkcí své Taylorovy řady, která má kladný poloměr konvergence. Elegantní argument k důkazu tohoto tvrzení je opět předmětem komplexní analýzy, kde se ukazuje jednoduchý vztah mezi možností rozvoje funkce do Taylorovy řady a komplexní diferencovatelností. Zde přijmeme jako fakt, že funkci h lze na okolí počátku napsat ve tvaru mocninné řady

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

s kladným poloměrem konvergence. Naším cílem bude najít vztah pro neznámé koeficienty c_n.

Dosadíme-li do rovnosti $f(z) = g(z)h(z)$ příslušné mocninné řady, dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} b_m c_{n-m} \right) z^n.$$

Jelikož koeficienty mocninné řady s kladným poloměrem konvergence jsou určeny jednoznačně (její součtovou funkcí), vyplývá z poslední rovnice, že koeficienty u odpovídajících mocnin z musí být stejné, tj.

$$a_n = \sum_{m=0}^{n} b_m c_{n-m}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{7}$$

Rovnice (7) určuje koeficienty c_n rekurzivně:

$$c_n = \frac{1}{b_0} \left(a_n - \sum_{m=1}^{n} b_m c_{n-m} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

protože $b_0 \neq 0$ podle předpokladu. Napočítáme-li první tři koeficienty, dostaneme

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{b_0}, \\ c_1 &= \frac{1}{b_0}\left(a_1 - b_1 c_0\right) = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2}, \\ c_2 &= \frac{1}{b_0}\left(a_2 - b_1 c_1 - b_2 c_0\right) = \frac{a_0 b_1^2 - a_0 b_0 b_2 - a_1 b_0^2 b_1 + a_2 b_0^2}{b_0^3}. \end{aligned}$$

Snadno se ověří, že c_n je obecně funkcí koeficientů $a_0, \ldots, a_n$ a $b_0, \ldots, b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Ve vzácných případech, je možné najít explicitní vzorec pro c_n, většinou ale zůstane u rekurzivní formule. Ukážeme si to na následujícím příkladě.

Příklad 1.53: Najdeme Taylorovu řadu funkce

$$h(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

dodefinovanou spojitě v počátku, tj. $h(0) = 1$. Funkci h lze chápat jako převrácenou funkci

$$g(z) := \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

a proto v předchozím výkladu o dělení mocninných řad položíme $f(z) := 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Odtud pro koeficienty Taylorových řad funkcí f a g se středem v počátku dostaneme

$$a_n = \delta_{n,0} \quad \text{a} \quad b_n = \frac{1}{(n+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Dosadíme-li do rovnice (7), vyjde nám, že $c_0 = 1$ a

$$0 = \sum_{m=0}^{n} \frac{c_{n-m}}{(m+1)!} = \sum_{m=0}^{n} \frac{c_m}{(n-m+1)!}, \quad \text{je-li } n \in \mathbb{N}.$$

Napíšeme-li $c_n = B_n/n!$, dostaneme posloupnost $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ určenou rekurentně rovnicemi

$$B_0 = 1 \quad \text{a} \quad \sum_{m=0}^{n} \binom{n+1}{m} B_m = 0 \quad \text{pro } n \in \mathbb{N},$$

neboli

$$B_0 = 1 \quad \text{a} \quad B_{n+1} = -\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n+1}{m} B_m \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Členy posloupnosti $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou tzv. *Bernoulliova čísla*:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad \text{atd.}$$

Celkem je tedy

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

na nějakém okolí počátku. Bez bližší znalosti asymptotického chování B_n pro $n \to \infty$, nemůžeme určit poloměr nalezené mocninné řady z Věty 1.38. Jednoduchou odpověď nabídne opět až komplexní analýza, odkud vyplyne, že poloměr konvergence je roven absolutní hodnotě nenulového řešení rovnice $e^z = 1$, které je nejblíž počátku. Tato řešení jsou $\pm 2\pi\mathrm{i}$, a proto je hledaný poloměr konvergence roven 2π.

Příklad 1.54: Předchozí příklad můžeme využít k nalezení Taylorova rozvoje funkce

$$f(z) = \frac{z}{2} \coth \frac{z}{2},$$

dodefinovanou spojitě v počátku hodnotou $f(0) = 1$, neboť

$$\frac{z}{2} \coth \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \left(\frac{2}{e^z - 1} + 1 \right) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2}.$$

Odtud a z výsledku předchozího příkladu dostaneme

$$f(z) = \frac{z}{2} \coth \frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n + \frac{z}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

a tato rovnost platí na kruhu $|z| < 2\pi$. Protože je funkce f sudá, musí být koeficienty její Taylorovy řady u lichých mocnin z rovny nule (rozmyslete). A proto z rozvoje f plyne, že $B_{2n+1} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Celkem tedy

$$\frac{z}{2} \coth \frac{z}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \tag{8}$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 2\pi$.

1.6 Trigonometrické řady

Definice 1.55 (Trigonometrické řady)**:** Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou reálné posloupnosti a $T > 0$. Řadu tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right)$$

nazýváme *trigonometrická řada s periodou* $2T$.

Poznámka: Všimněte si, že pokud trigonometrická řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, je její součtová funkce periodická s periodou $2T$. Při studiu trigonometrických řad se často omezíme na speciální případ $T = \pi$, neboť rozdíl mezi obecným a tímto speciálním případem není zásadní a vzorce pro $T = \pi$ mají jednodušší tvar.

Analýzu trigonometrických řad inicioval Jean-Baptiste Joseph Fourier na počátku 19. století. Ve svém článku z roku 1822 hledal řešení rovnice vedení tepla právě ve tvaru trigonometrické řady. V tomto článku se také objevila obecná domněnka, že každou periodickou a spojitou funkci lze rozvinout v trigonometrickou řadu. Protože ani základní pojmy jako funkce, spojitost, integrál, atd. nebyly v této době ještě jasně ukotveny, nebyly ani Fourierovy závěry dokázány zcela rigorózně. Nicméně Fourierova práce a jeho myšlenky odstartovaly výzkum, který má dnes mnoho aplikací a který přispěl zásadním způsobem k formování moderní analýzy.

Naším hlavním cílem bude vyjasnit si, co to znamená rozvinout funkci v trigonometrickou řadu a alespoň částečně vysvětlit, jaké funkce lze rozvíjet.

Nejprve najdeme vztah mezi koeficienty a_n a b_n trigonometrické řady a její součtovou funkcí F - tzv. *Eulerovy vzorce*. Pro tento účel předpokládejme, že trigonometrická řada s periodou 2π konverguje stejnoměrně na $[-\pi, \pi]$ k součtové funkci F. Máme tedy

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{9}$$

pro $x \in [-\pi, \pi]$. Předpoklad stejnoměrné konvergence trigonometrické řady použijeme později pro ospravedlnění záměny integrálu a sumy. Nejprve ale budeme potřebovat následující jednoduché integrální identity.

Lemma 1.56: Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x = \pi\delta_{m,n}.$$

a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0.$$

Důkaz. Je přenechán čtenáři jako Cvičení 1.10. □

Vynásobíme-li obě strany rovnice (9) funkcí $\cos(mx)$, kde $m \in \mathbb{N}_0$ a integrujeme od $-\pi$ do π, dostaneme

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} & F(x)\cos(mx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\sin(nx)\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

Záměnu integrálu a sumy ospravedlňuje předpoklad stejnoměrné konvergence a Věta 1.35. Protože skoro všechny integrály napravo jsou nulové podle Lemma 1.56, výraz se značně zjednoduší. Pro každé $m \in \mathbb{N}_0$ tak dostaneme rovnost

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(mx)\mathrm{d}x = \pi a_m,$$

neboli první Eulerovy vzorce:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(mx)\mathrm{d}x, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Zcela analogickým postupem, kdy vynásobíme (9) funkcí $\sin(mx)$, kde $m \in \mathbb{N}$, a zintegrujeme od $-\pi$ do π, odvodíme druhé Eulerovy vzorce:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(mx)\mathrm{d}x, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Odvození Eulerových vzorců lze jednoduše zobecnit na případ s obecnou periodou $T > 0$. Toto pozorování je motivací pro následující definici *Fourierovy řady* funkce. Pro zestručnění zápisu si ještě označme symbolem $\mathcal{R}(a,b)$ prostor funkcí, které mají absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na intervalu (a,b).

Definice 1.57 (Fourierova řada)**:** Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b)$, kde $a,b \in \mathbb{R}$ a $b-a = 2\pi$. Trigonometrickou řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

s koeficienty a_n a b_n určenými Eulerovými vzorci:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

nazýváme *Fourierova řada funkce f na intervalu* (a,b).

Poznámka: Fourierova řada funkce $f \in \mathcal{R}(a,b)$ na obecném omezeném intervalu (a,b) délky $b-a = 2T > 0$ je trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{n\pi x}{T}\right),$$

kde

$$a_n = \frac{1}{T}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\mathrm{d}x, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_n = \frac{1}{T}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\mathrm{d}x, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poznámka (Komplexní formulace)**:** Někdy se používá komplexní formulace trigonometrické řady ve tvaru dvojitě nekonečné sumy

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{\mathrm{i}k\pi x}{T}},$$

kde $c_k \in \mathbb{C}$. Protože

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{T}} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{T}} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-\frac{ik\pi x}{T}}$$
$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + c_{-k}) \cos \frac{k\pi x}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{i}\,(c_k - c_{-k}) \sin \frac{k\pi x}{T},$$

je mezi koeficienty a_k, b_k a c_k jednoduchý vztah:

$$c_0 = 2a_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

a naopak

$$a_0 = \frac{c_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - \mathrm{i}b_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + \mathrm{i}b_k}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Eulerovy vzorce pak mají kompaktní podobu

$$c_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-\frac{ik\pi x}{T}} \mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ačkoliv je komplexní formulace elegantní, my v tomto textu budeme striktně používat jen reálnou formulaci.

Při odvozování Eulerových vzorců jsme pozorovali, že stejnoměrně konvergentní trigonometrická řada na $[-\pi, \pi]$ (či obecněji na $[a, b]$) je Fourierovou řadou své součtové funkce. Přirozeně se nabízí minimálně dvě otázky: Jaké jsou to vlastně funkce, jejichž Fourierova řada bodově/stejnoměrně konverguje na $[-\pi, \pi]$? A je v takovém případě součtová funkce konvergentní Fourierovy řady rovna původní funkci? Účelem další části textu bude zodpovědět tyto otázky alespoň částečně.

Věta 1.58 (Dirichlet)**:** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $b - a = 2\pi$ a $f \in \mathcal{R}(a, b)$ je 2π-periodická. Potom máme:

1. Pro n-tý částečný součet F_n Fourierovy řady funkce f na (a, b) platí:

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x - t) \mathrm{d}t$$

   pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, kde

$$D_n(t) := \frac{\sin\left((n + 1/2)t\right)}{\sin\left(t/2\right)}$$

   je tzv. *Dirichletovo jádro.*

2. Fourierova řada f na (a, b) konverguje v bodě $x \in \mathbb{R}$ k číslu $s \in \mathbb{R}$, právě když

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\pi} \left(\frac{f(x + t) + f(x - t)}{2} - s \right) D_n(t) \mathrm{d}t = 0.$$

Důkaz. 1. Podle Cvičení 1.8 je

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin(tn/2)\cos(t(n+1)/2)}{\sin(t/2)} = \frac{\sin((n+1/2)t) - \sin(t/2)}{2\sin(t/2)},$$

neboli

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{1}{2} D_n(t). \tag{10}$$

Nyní pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ dostáváme přímým výpočtem, že

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b (\cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx))\, f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(x-t))\right) f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Ve výpočtu jsme využili identitu (10) a fakt, že pro integrabilní 2π-periodickou funkci g platí rovnost

$$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\mathrm{d}t.$$

2. Rovnost z tvrzení 1. můžeme dále upravit do tvaru

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau) D_n(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

a využijeme-li opět toho, že integrand je 2π-periodická funkce, dostaneme

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau) D_n(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Vezmeme-li také do úvahy, že D_n je sudá funkce, můžeme výraz ještě dále upravit

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} f(x+t) D_n(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} f(x-t) D_n(-t)\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left(f(x+t) + f(x-t)\right) D_n(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Integrováním rovnice (10) snadno ověříme, že

$$\int_0^{\pi} D_n(t)\mathrm{d}t = \pi.$$

Celkem tedy získáváme pro každé $x, s \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ rovnost

$$F_n(x) - s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s\right) D_n(t)\mathrm{d}t,$$

z čehož plyne tvrzení 2. $\square$

Tvrzení 2. Věty 1.58 převádí vyšetřování konvergence Fourierovy řady na analýzu limity integrálu s Dirichletovým jádrem. K této analýze budeme potřebovat jedno pomocné, ale důležité tvrzení, které je speciálním případem věty známé jako *Riemannovo–Lebesgueovo lemma.*

Lemma 1.59 (Riemann)**:** Nechť $-\infty \leq a < b \leq \infty$ a $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Potom platí:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0.$$

Důkaz. Dokážeme tvrzení s funkcí sinus. Druhé tvrzení s funkcí kosinus se dokáže analogicky.

1) Nejprve předpokládejme, že $a, b \in \mathbb{R}$ a f je riemannovsky integrabilní na $[a,b]$. Zvolme $\epsilon > 0$. Potom existuje dělení σ intervalu $[a,b]$ tak, že

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - s_\sigma(f) < \frac{\epsilon}{2},$$

kde $s_\sigma(f)$ je dolní integrální součet f při rozdělení σ. Nyní můžeme zavést po částech konstantní funkci

$$s(x) := \sum_{i=1}^{k} m_i^{(f)} \chi_{[x_{i-1},x_i)}(x),$$

kde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ jsou body z rozdělení σ, $m_i^{(f)} = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i)} f(x)$ a $\chi_{[c,d)}$ značí charakteristickou funkci intervalu $[c,d)$. Pro takovou funkci zřejmě platí $s(x) \leq f(x)$ pro každé $x \in [a,b]$ a

$$s_\sigma(f) = \int_a^b s(x)\mathrm{d}x.$$

Odtud dostáváme nerovnost

$$\int_a^b |f(x) - s(x)|\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b s(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - s_\sigma(f) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tvrzení věty platí pro funkci s, neboť

$$\int_a^b s(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} m_i^{(f)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i^{(f)} \left(\cos(nx_{i-1}) - \cos(nx_i)\right)$$

a výraz na pravé straně konverguje k nule pro $n \to \infty$. Proto existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$(\forall n \geq n_0)\left(\left|\int_a^b s(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| < \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Nakonec dostáváme

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x) - s(x)| \underbrace{|\sin(nx)|}_{\leq 1} \mathrm{d}x + \left|\int_a^b s(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

pro každé $n \geq n_0$, z čehož plyne tvrzení věty.

2) Nyní předpokládejme, že $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ absolutně konverguje jako nevlastní Riemannův integrál s jediným kritickým bodem b. To lze předpokládat bez újmy na obecnosti, jinak bychom integrál rozložili na součet konečně mnoha integrálů tohoto typu a větu aplikovali na každý sčítanec.

Zvolme $\epsilon > 0$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\int_c^b |f(x)|\mathrm{d}x < \frac{\epsilon}{2}.$$

Podle již dokázaného bodu 1) je

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^c f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = 0,$$

a proto existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\left|\int_a^c f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Celkem tedy pro každé $n \geq n_0$ dostáváme

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_a^c f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_c^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Věta 1.60: Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $b - a = 2\pi$ a $f \in \mathcal{R}(a, b)$ je 2π-periodická. Potom Fourierova řada funkce f na (a, b) konverguje v bodě x k číslu $s \in \mathbb{R}$, právě když existuje $c \in (0, \pi)$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^c \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s\right) \operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2}\right) \sin(nt)\mathrm{d}t = 0.$$

Poznámka: Z tvrzení plyne tzv. *Riemannova věta o lokalizaci*: Konvergence Fourierovy řady funkce f i hodnota jejího součtu v bodě x závisí pouze na průběhu funkce f v bezprostředním okolí bodu x.

Důkaz Věty 1.60. Dirichletovo jádro můžeme zapsat ve tvaru

$$D_n(t) = \sin(nt)\operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(nt).$$

Z předpokladu vyplývá, že pro libovolné $x, s \in \mathbb{R}$ má funkce

$$t \mapsto \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s$$

absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na $(0, \pi)$, a proto podle Lemma 1.59 platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s \right) \cos(nt) \mathrm{d}t = 0.$$

Proto podle Věty 1.58 Fourierova řada funkce f na (a, b) konverguje v bodě x k číslu $s \in \mathbb{R}$, právě když

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s \right) \operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2}\right) \sin(nt) \mathrm{d}t = 0.$$

Ještě jednou můžeme aplikovat Lemma 1.59 tentokrát na funkci

$$t \mapsto \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s \right) \operatorname{cotg} \frac{t}{2},$$

která má absolutně konvergentní Riemannův integrál na intervalu (c, π) pro libovolné $c \in (0, \pi)$. Odtud plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^{\pi} \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s \right) \operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2}\right) \sin(nt) \mathrm{d}t = 0$$

pro každé $c \in (0, \pi)$ a tudíž k tomu, aby Fourierova řada funkce f na (a, b) konvergovala v bodě x k číslu $s \in \mathbb{R}$ je nutné a stačí, aby existovalo $c \in (0, \pi)$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{c} \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s \right) \operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2}\right) \sin(nt) \mathrm{d}t = 0.$$

□

Věta 1.60 charakterizuje funkce jejichž Fourierova řada konverguje v nějakém bodě. Nicméně čtenář může vnímat toto tvrzení jen jako jisté přeformulování základního problému, které stále nedává zcela jasnou představu o tom, jaké to tedy vlastně jsou funkce, jejichž Fourierova řada bodově konverguje.

Následující *Diniho kritérium* je postačující podmínka bodové konvergence Fourierovy řady, která je již snadno aplikovatelná pro poměrně širokou třídu funkcí chovajících se „rozumně“ na okolí bodu x. Např. funkce $f \in \mathcal{R}(a, b)$, pro kterou existují čísla $c > 0$, $L > 0$ a $\alpha \in (0, 1]$ takové, že platí

$$(\forall t \in (0, c)) \left(|f(x+t) + f(x-t) - 2s| \leq Lt^{\alpha} \right),$$

vyhovují předpokladům Diniho kritéria, a proto Fourierova řada funkce f konverguje v bodě x k číslu s.

Věta 1.61 (Dini)**:** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $b - a = 2\pi$ a $f \in \mathcal{R}(a, b)$ je 2π-periodická. Existují-li $c \in (0, \pi)$ a $s \in \mathbb{R}$ tak, že konverguje integrál

$$\int_0^{c} \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2s|}{t} \mathrm{d}t,$$

potom Fourierova řada funkce f na (a, b) konverguje v bodě x k číslu s.

Důkaz. Z předpokladu věty vyplývá, že konverguje také integrál

$$\int_0^c |f(x+t)+f(x-t)-2s| \operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t = \int_0^c \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2s|}{t} t \operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t,$$

protože funkce $t \mapsto t \operatorname{cotg}(t/2)$ je omezená riemannovsky integrabilní funkce na intervalu $(0, c)$. Aplikací Lemma 1.59 odtud dostaneme, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^c \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s\right) \operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2}\right) \sin(nt) \mathrm{d}t = 0$$

a tvrzení plyne z Věty 1.60. □

V dalším výkladu ještě více omezíme množinu studovaných funkcí f s cílem získat snadno aplikovatelnou postačující podmínku pro bodovou konvergenci Fourierovy řady funkce f v termínech spojitosti a diferencovatelnosti f. Před tím si ještě vyjasníme dva pojmy.

Definice 1.62 (Po částech spojitá funkce)**:** Řekneme, že funkce f je na omezeném intervalu $[a, b]$ *po částech spojitá*, právě když existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ intervalu $[a, b]$ takové, že

1. f je spojitá na (x_{i-1}, x_i) pro každé $i \in \hat{n}$.
2. Existují konečné jednostranné limity

   $$f(x_i+) := \lim_{x\to x_i+} f(x) \quad \text{a} \quad f(x_i-) := \lim_{x\to x_i-} f(x),$$

   pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ a také $f(a+)$ a $f(b-)$.

Jak jsme již pozorovali, součtová funkce konvergentní trigonometrické řady s periodou $2T$ je $2T$-periodická funkce. To se odrazilo v předpokladech Vět 1.58, 1.60 a 1.61, kde jsme uvažovali 2π-periodické funkce, neboť jsme pro jednoduchost vzali $T = \pi$. Abychom mohli odvozená tvrzení použít i na funkce definované na omezeném intervalu, pomáháme si periodickým prodloužením. Toto prodloužení ještě navíc jistým způsobem regularizujeme v bodech nespojitosti. Důvod tohoto kroku se vyjasní ve Větě 1.64.

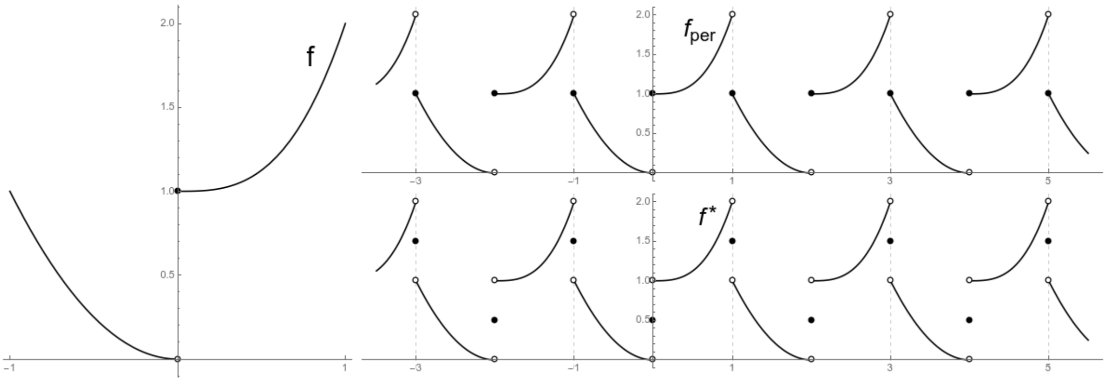
Definice 1.63 (Peridociké a regularizované periodické prodloužení)**:** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a f je funkce definovaná na $[a, b)$. *Periodickým prodloužením* f rozumíme funkci $f_{per} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$f_{per}(x) := f\left(x - \left[\frac{x-a}{b-a}\right](b-a)\right), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

kde $[y]$ je dolní celá část reálného čísla y. Je-li navíc f po částech spojitá na $[a, b]$, definujeme *regularizované periodické prodloužení* $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vztahem

$$f^*(x) := \frac{1}{2}\left(f_{per}(x+) + f_{per}(x-)\right).$$

Komplikovaně vypadající vzorce z předchozí definice mají jednoduchý význam. Graf funkce f_{per} vznikne „nakopírováním“ grafu funkce f definované na $[a, b)$ do každého intervalu $[a + n(b-a), b + n(b-a))$, $n \in \mathbb{Z}$. Graf regularizovaného periodického prodloužení f^* se liší od grafu f_{per} pouze v bodech nespojitosti f_{per}, kde hodnota funkce f^* je průměrem jednostranných limitních hodnot v tomto bodě, viz Obr. 2.



Obrázek 2: Graf funkce f (vlevo), jejího periodického prodloužení f_{per} (vpravo nahoře) a jejího regularizovaného periodického prodloužení f^* (vpravo dole).

Věta 1.64 (O bodové konvergenci Fourierovy řady)**:** Nechť funkce f má po částech spojitou derivaci na omezeném intervalu $[a, b]$. Potom Fourierova řada funkce f na (a, b) konverguje na $\mathbb{R}$ k funkci f^*.

Důkaz. Důkaz provedeme ve speciálním případě, kdy $b - a = 2\pi$. Modifikace pro obecnou situaci je přenechána čtenáři.

1) Nejprve ukážeme, že z předpokladu věty vyplývá, že je f po částech spojitá funkce na $[a, b]$ a tudíž má na $[a, b]$ absolutně konvergentní Riemannův integrál. Podle předpokladu má f po částech spojitou derivaci na $[a, b]$, což znamená, že existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ intervalu $[a, b]$ takové, že

1. f je spojitě diferencovatelná na (x_{i-1}, x_i) pro každé $i \in \hat{n}$.
2. Existují konečné jednostranné limity $f'(x_i\pm)$ pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ a také konečné jednostranné limity $f'(a+)$ a $f'(b-)$.

První bod implikuje, že f je spojitá na intervalu (x_{i-1}, x_i) pro každé $i \in \hat{n}$. Stačí tedy ukázat existenci a konečnost jednostranných limit v bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Zvolme pevně $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Zaměříme se např. na pravé okolí bodu x_i. Jelikož je f' spojitá na (x_i, x_{i+1}) a existují konečné limity $f'(x_i+)$ a $f'(x_{i+1}-)$, je f' omezená na (x_i, x_{i+1}), neboli

$$\sup_{x_i < x < x_{i+1}} |f'(x)| =: K < \infty.$$

Aplikujeme-li Lagrangeovu větu o přírůstku, dostaneme pro libovolné $y, z \in (x_i, x_{i+1})$ odhad

$$|f(y) - f(z)| = |f'(\xi)||y - z| \leq K|y - z|,$$

kde ξ je číslo mezi y a z. Nyní když k libovolnému $\epsilon > 0$ zvolíme $0 < \delta < \epsilon/K$, dostaneme pro každé y a z z pravého okolí bodu x_i takové, že $|y - z| < \delta$ nerovnost $|f(y) - f(z)| < \epsilon$. To je Bolzanova–Cauchyho podmínka implikující existenci a konečnost $f(x_i+)$. Analogicky se ověří existence a konečnost $f(x_i-)$ i okrajové případy $f(a+)$ a $f(b-)$.

2) Uvažujme stále dělení $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ intervalu $[a, b]$ a $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ pevné. Je-li $x \in (x_{i-1}, x_i)$, potom je f spojitě diferencovatelná na okolí x, a proto můžeme opět aplikovat Langrangeovu větu o přírůstku, která implikuje

$$(\exists \delta > 0)(\exists L > 0)(\forall y \in (x - \delta, x + \delta))(|f(y) - f(x)| \leq L|x - y|).$$

Jinými slovy dostáváme, že pro všechna $t \in (0, \delta)$ platí

$$|f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)| \leq |f(x + t) - f(x)| + |f(x - t) - f(x)| \leq 2Lt.$$

Odtud plyne, že je splněno Diniho kritérium z Věty 1.61 pro bod x a $s = f(x)$, a proto Fourierova řada funkce f na (a, b) konverguje v bodě x k $f(x)$.

Zbývá vyšetřit konvergenci Fourierovy řady funkce f v bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Uvažujme nějaké $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ a zaměřme se na pravé okolí bodu x_i. Podle bodu 1) důkazu existují konečné limity $f(x_i+)$ a $f(x_{i+1}-)$, a tudíž je f spojitá na $[x_i, x_{i+1}]$ (vzhledem k $[x_i, x_{i+1}]$) a diferencovatelná na (x_i, x_{i+1}). Můžeme tedy znovu aplikovat Lagrangeovu větu o přírůstku a dostaneme

$$(\forall y \in (x_i, x_{i+1}))\left(|f(y) - f(x_i+)| \leq K_+(y - x_i)\right),$$

kde $K_+ := \sup_{x_i < \xi < x_{i+1}} |f'(\xi)| < \infty$. Ananlogicky pro levé okolí x_i najdeme $K_- > 0$ takové, že

$$(\forall y \in (x_{i-1}, x_i))\left(|f(y) - f(x_i-)| \leq K_-(x_i - y)\right),$$

Z toho vyplývá, že existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $t \in (0, \delta)$ platí

$$\begin{aligned} |f(x_i + t) + f(x_i - t) - f(x_i+) - f(x_i-)| &\leq |f(x_i + t) - f(x_i+)| + |f(x_i - t) - f(x_i-)| \\ &\leq (K_- + K_+)t. \end{aligned}$$

Odtud a z Diniho kriteria vyplývá, že Fourierova řada f na (a, b) konverguje také v bodě x_i k průměru $\left(f(x_i-) + f(x_i+)\right)/2$.

Nakonec zbývá vyřešit konvergenci Fourierovy řady v krajních bodech a a b. K tomu stačí uvažovat periodické prodloužení f_{per} funkce f a postupem stejným jako v předchozím odstavci ukázat existenci čísel $L_- > 0$ a $L_+ > 0$ takových, že pro $t > 0$ dostatečně malá je

$$|f_{per}(a + t) - f_{per}(a+)| = |f(a + t) - f(a+)| \leq L_+ t$$

a

$$|f_{per}(a - t) - f_{per}(a-)| = |f(b - t) - f(b-)| \leq L_- t$$

a dále opět aplikací Diniho kritéria vyvodíme, že Fourierova řada f na (a, b) konverguje také v bodě $x = a$ tentokrát k průměru $\left(f(a+) + f(b-)\right)/2$. Podobně pro bod b. $\square$

V důkazu Věty 1.64 jsme viděli, že předpoklad f má po částech spojitou derivaci na $[a,b]$ implikuje, že f je po částech spojitá na $[a,b]$. Je-li funkce f s po částech spojitou derivací dokonce spojitá na $[a,b]$, dá se ukázat, že její Fourierova řada konverguje lokálně stejnoměrně na (a,b) k f, viz např. [13, Věta 185]. Přidáme-li ještě předpoklad $f(a)=f(b)$ dostaneme už stejnoměrnou konvergenci Fourierovy řady funkce f na celém $\mathbb{R}$, což je obsahem Jordanovy věty, kterou dokážeme později (Věta 1.67).

Věta 1.64 ukazuje, že Fourierova řada funkce f konverguje jak v bodech spojitosti f, tak i v bodech nespojitosti f 1. druhu za předpokladu, že má f derivaci spojitou alespoň po částech. Pomocí Diniho kritéria se dá dokonce ukázat, že Fourierova řada spojité funkce f konverguje v bodech, kde je f diferencovatelná. Naopak příklad Weierstrassovy funkce ukazuje, viz (5) a Obr. 1, že diferencovatelnost funkce není nutnou podmínkou pro konvergenci její Fourierovy řady.

Čtenář by se mohl domnívat, že už samotná spojitost funkce by mohla stačit pro bodovou konvergenci její Fourierovy řady. Že tomu tak není, ukázal již du Bois-Reymond v roce 1873, který našel příklad spojité funkce, jejíž Fourierova řada diverguje v jednom bodě. Jednodušší příklad později předložil L. Fejér. Dokonce lze nekonstruktivně dokázat pomocí tzv. Bairovy věty, že existuje spojitá funkce, jejíž Fourierova řada diverguje na nespočetné husté podmnožině (a,b), viz [22, Věta 5.12].

Na druhou stranu L. Carleson dokázal v roce 1966, že Fourierova řada spojité funkce (dokonce kvadraticky integrabilní v Lebesgueově smyslu) konverguje skoro všude na $[a,b]$. Termín „skoro všude“ má exaktní význam, který si ale budeme moci vysvětlit až mnohem později. Nyní nám stačí mít povědomí o tom, že množina, na níž je Fourierova řada spojité funkce divergentní, je v jistém smyslu značně omezená. Carleson svým důkazem vyřešil dlouho otevřený problém postulovaný N. N. Luzinem v roce 1915.

Ilustrujme si nyní aplikaci Věty 1.64 na jednoduchém příkladě.

Příklad 1.65: Spočítáme Fourierovu řadu funkce $f(x)=x$ na $(-\pi,\pi)$. Podle Eulerových vzorců máme

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\mathrm{d}x=0,\qquad \forall n\in\mathbb{N}_0,$$

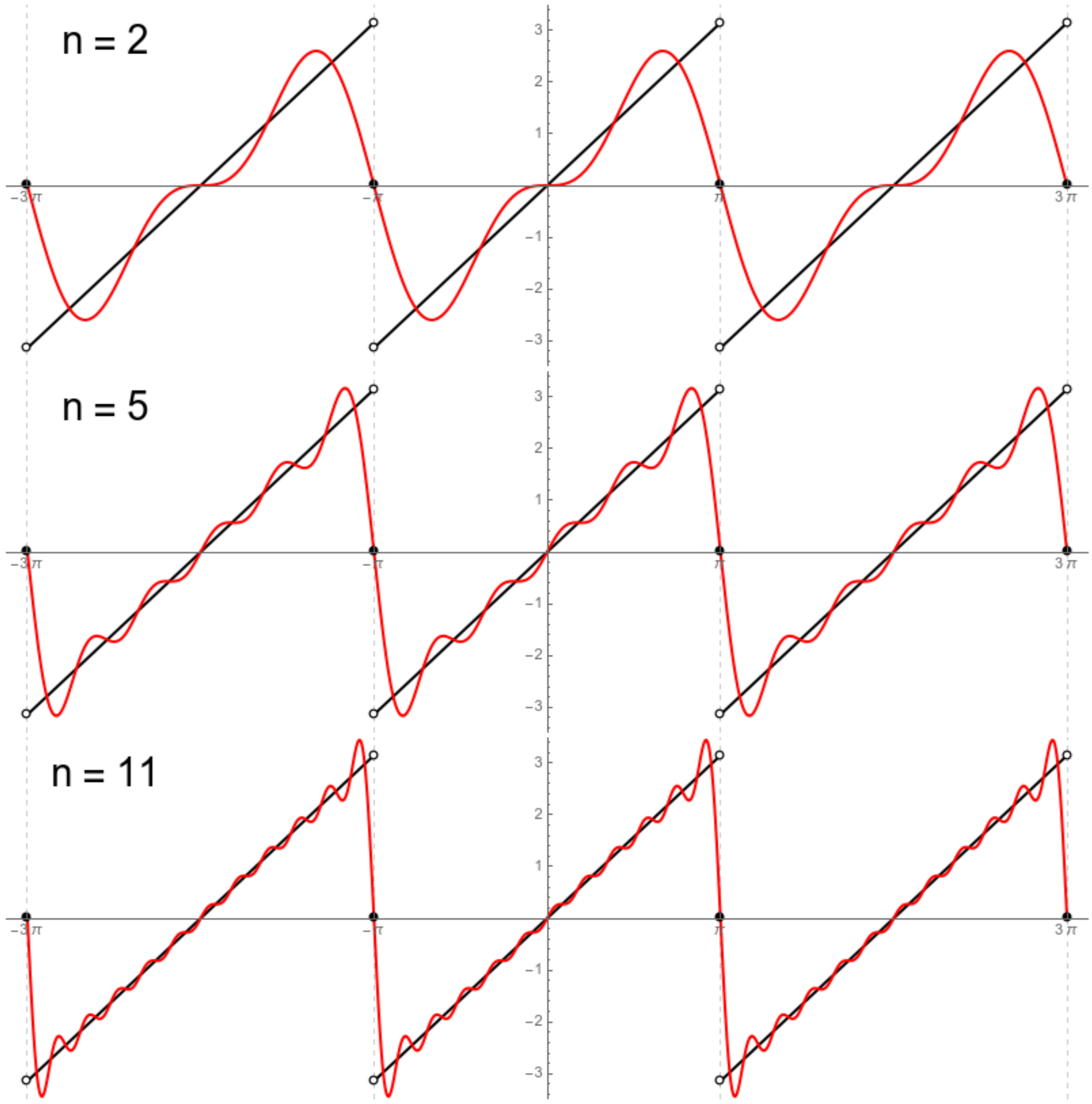
neboť integrujeme lichou funkci přes symetrický interval okolo počátku. Dále integrací per partes najdeme

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{x}{n}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\mathrm{d}x\right)=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

pro každé $n\in\mathbb{N}$. Protože f splňuje předpoklady Věty 1.64, dostáváme rovnost

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx),\qquad \forall x\in(-\pi,\pi). \tag{11}$$

Řada (11) konverguje dokonce lokálně stejnoměrně na $(-\pi,\pi)$. V krajních bodech $x=\pm\pi$ konverguje Fourierova řada (11) k průměru $(f(-\pi)+f(\pi))/2=0$, což lze také ověřit přímo. Součtová funkce řady (9) na $\mathbb{R}$ je rovna regularizovanému periodickému prodloužení funkce $f(x)=x$, viz Obrázek 3



Obrázek 3: Částečné součty Fourierovy řady funkce $f(x) = x$ na $(-\pi, \pi)$.

Nyní si odvodíme jednu důležitou nerovnost. Pro její a pozdější potřebu si označíme $\mathcal{R}^2(a,b)$ množinu funkcí $f \in \mathcal{R}(a,b)$, pro které zobecněný Riemannův integrál

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

konverguje.

Věta 1.66 (Bessel)**:** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in \mathcal{R}^2(a,b)$. Potom koeficienty Fourierovy řady funkce f na (a,b) splňují *Besselovu nerovnost*:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \le \frac{2}{b-a} \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Označme F_n n-tý částečný součet Fourierovy řady funkce f na (a,b). Důkaz provedeme pro speciální případ $b-a=2\pi$. Modifikace postupu pro obecnou situaci je přenechána čtenáři.

Upravíme tzv. ***střední kvadratickou odchylku*** f a F_n na (a,b):

$$0 \leq \int_a^b (f(x)-F_n(x))^2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2\int_a^b f(x)F_n(x)\mathrm{d}x + \int_a^b F_n^2(x)\mathrm{d}x.$$

Využijeme-li 2π-periodičnosti trigonometrických funkcí a identit z Lemma 1.56, dostaneme

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)F_n(x)\mathrm{d}x &= \frac{a_0}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^n \left(a_k\int_a^b f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x + b_k\int_a^b f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x\right)\\ &= \pi\frac{a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^n \left(a_k^2+b_k^2\right)\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\int_a^b F_n^2(x)\mathrm{d}x &= \frac{a_0^2}{4}\int_a^b \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^n \left(a_k^2\int_a^b \cos^2(kx)\mathrm{d}x + b_k^2\int_a^b \sin^2(kx)\mathrm{d}x\right)\\ &= \pi\frac{a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^n \left(a_k^2+b_k^2\right).\end{aligned}$$

Tedy pro kvadratickou odchylku máme

$$0 \leq \int_a^b (f(x)-F_n(x))^2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - \pi\frac{a_0^2}{2} - \pi\sum_{k=1}^n \left(a_k^2+b_k^2\right),$$

z čehož vyplývá nerovnost

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k^2+b_k^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

platná pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nyní stačí poslat $n \to \infty$. $\square$

Poznámka: Zopakujme důkaz Věty 1.66 s tím rozdílem, že funkci F_n nahradíme obecným trigonometrickým polynomem (s periodou 2π) stupně nejvýše n, tj. funkcí tvaru

$$T_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n c_k\cos(kx) + d_k\sin(kx),$$

kde $\{c_k\}_{k=0}^n, \{d_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$. Potom, je-li $b - a = 2\pi$, dostaneme

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (f(x) - T_n(x))^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2\pi \left(\frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k c_k + b_k d_k) \right) + \pi \left(\frac{c_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) \right) \\
&= \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + \pi \left(\frac{(a_0 - c_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^n \left((a_k - c_k)^2 + (b_k - d_k)^2 \right) \right) - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \right) \\
&\geq \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \right) = \int_a^b (f(x) - F_n(x))^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\int_a^b (f(x) - T_n(x))^2 \,\mathrm{d}x \geq \int_a^b (f(x) - F_n(x))^2 \,\mathrm{d}x,$$

přičemž rovnost platí, právě když $a_k = c_k$ pro všechna $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ a $b_l = d_l$ pro všechna $l \in \hat{n}$. Jinými slovy, vidíme, že mezi všemi trigonometrickými polynomy T_n stupně nejvýše n, má n-tý částečný součet Fourierovy řady F_n funkce f nejmenší kvadratickou odchylku od f.

Poznámka: Všimněte si, že z Besselovy věty 1.66 plyne, že $a_n, b_n \to 0$ pro $f \in \mathcal{R}^2(a, b)$, což je tvrzení Riemannova lemma 1.59. Riemannovo lemma je ovšem obecnější tvrzení, neboť $\mathcal{R}^2(a, b) \subsetneqq \mathcal{R}(a, b)$ pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Nakonec se ukáže, že Besselova nerovnost platí dokonce jako rovnost pro funkce z $\mathcal{R}^2(a, b)$. Než se k této tzv. *Parsevalově rovnosti* dostaneme, dokážeme si Jordanovu větu o stejnoměrné konvergenci Fourierovy řady.

Věta 1.67 (Jordanova o stejnoměrné konvergenci Fourierovy řady)**:** Nechť funkce f definovaná na omezeném intervalu $[a, b]$ splňuje:

i. $f(a) = f(b)$.

ii. f je spojitá na $[a, b]$.

iii. f má po částech spojitou derivaci na $[a, b]$.

Potom Fourierova řada funkce f na (a, b) konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ k f_{per}.

Důkaz. Větu dokážeme pro případ $b - a = 2\pi$. Označme $x_0 := a < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m := b$ všechny body nespojitosti derivace f'. Integrací per partes dostaneme pro koeficienty

Fourierovy řady f na (a,b):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi n}\sum_{i=1}^m \left([f(x)\sin(nx)]_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{\pi n}\left(f(b)\sin(nb) - f(a)\sin(na)\right) - \frac{1}{\pi n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

První člen v kulatých závorkách je roven nule, neboť $f(a) = f(b)$ a $b - a = 2\pi$. Dostáváme tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ rovnost

$$a_n = -\frac{1}{\pi n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)\mathrm{d}x =: -\frac{b_n'}{n},$$

kde b_n' je příslušný koeficient Fourierovy řady funkce f' na (a,b). Analogicky se pro každé $n \in \mathbb{N}$ dokáže rovnost

$$b_n = \frac{1}{\pi n}\int_a^b f'(x)\cos(nx)\mathrm{d}x =: \frac{a_n'}{n}.$$

Nyní pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ můžeme odhadnout n-tý člen Fourierovy řady funkce f na (a,b) následovně:

$$|a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n| = \frac{|a_n'|}{n} + \frac{|b_n'|}{n} \leq \frac{1}{2}\left(|a_n'|^2 + \frac{1}{n^2} + |b_n'|^2 + \frac{1}{n^2}\right),$$

kde jsme použili nerovnost $\alpha\beta \leq (\alpha^2+\beta^2)/2$, která platí pro libovolné $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Z předpokladu iii. plyne, že $f' \in \mathcal{R}^2(a,b)$, a proto je podle Besselovy nerovnosti (Věta 1.66) výraz napravo v odhadu výše n-tý člen konvergentní číselné řady. Tvrzení věty nyní vyplývá z Weierstrassova kritéria (Věta 1.26). □

Poznámka: Uvědomte si, že z Věty 1.34 víme, že součtová funkce stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí je spojitá, a proto je předpoklad $f(a) = f(b)$ v Jordanově větě nezbytný pro stejnoměrnou konvergenci Fourierovy řady funkce f na celém $\mathbb{R}$. Na druhou stranu pokud předpoklad $f(a) = f(b)$ vynecháme, potom platí, že Fourierova řada f na (a,b) konverguje *lokálně stejnoměrně* na (a,b) k f, viz např. [13, Věta 185].

Množinu funkcí $\mathcal{R}^2(a,b)$ můžeme vybavit zobrazením $\|\cdot\|_2 : \mathcal{R}^2(a,b) \to [0,\infty)$ definovaným pro $f \in \mathcal{R}^2(a,b)$ vztahem

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Zobrazení $\|\cdot\|_2$ není norma, nýbrž pouze *seminorma* na $\mathcal{R}^2(a,b)$, tzn., že splňuje:

1. $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall f \in \mathcal{R}^2(a,b))(\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \|f\|_2)$,
2. $(\forall f, g \in \mathcal{R}^2(a,b))(\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2)$,

avšak **neplatí** implikace $\|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = 0$ pro $f \in \mathcal{R}^2(a,b)$. Důkaz první vlastnosti je zřejmý. Důkaz trojúhelníkové nerovnosti plyne ze Schwarzovy nerovnosti pro bilineární formu

$$(f,g)_2 := \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x, \quad f, g \in \mathcal{R}^2(a,b),$$

viz Cvičení 1.11.

Věta 1.68 (Parseval)**:** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in \mathcal{R}^2(a,b)$. Potom koeficienty Fourierovy řady funkce f na (a,b) splňují *Parsevalovu rovnost*:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Větu opět dokážeme pro speciální případ $b - a = 2\pi$. Důkaz provedeme v několika krocích. V důkazu Věty 1.66 jsme pro každé $n \in \mathbb{N}$ ukázali, že

$$\|f - F_n\|_2^2 = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \right).$$

Tudíž Parsevalova rovnost platí, právě když $\lim_{n\to\infty} \|f - F_n\|_2 = 0$. Naším cílem je dokázat právě tuto limitu.

1) Nejprve předpokládejme, že f je riemannovsky integrabilní funkce na $[a,b]$. Podle definice Riemannova integrálu musí být f omezená na $[a,b]$, tzn., že existuje $K > 0$ tak, že

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\epsilon > 0$ a dělení $\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$S_f(\sigma) - s_f(\sigma) < \frac{\epsilon^2}{8K},$$

kde $s_f(\sigma)$ a $S_f(\sigma)$ jsou dolní a horní integrální součty f při rozdělení σ. Definujme po částech lineární funkci g na $[a,b]$, jejíž graf je lomená čára spojující body $(x_i, f(x_i))$ pro $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, tzn.

$$g(x) := f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})$$

pro $x \in [x_{i-1}, x_i]$ a $i \in \hat{m}$. Potom pro střední kvadratickou odchylku f a g dostaneme

$$\int_a^b (f(x) - g(x))^2 \,\mathrm{d}x \leq 2K \int_a^b |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x \leq 2K \left(S_f(\sigma) - s_f(\sigma)\right) < \frac{\epsilon^2}{4}. \tag{12}$$

V první nerovnosti jsme odhadli $|f(x)-g(x)| \le |f(x)|+|g(x)| \le K+K=2K$ pro každé $x \in [a,b]$. Nerovnost $(\forall x \in [a,b])(|g(x)| \le K)$ plyne z nerovnosti $(\forall x \in [a,b])(|f(x)| \le K)$ a definice g. Druhá nerovnost v (12) platí, neboť

$$(\forall i \in \hat{m})(\forall x \in [x_{i-1},x_i])\left(|f(x)-g(x)| \le M_i^{(f)} - m_i^{(f)}\right),$$

kde

$$M_i^{(f)} = \sup_{x \in [x_{i-1},x_i]} f(x) \quad \text{a} \quad m_i^{(f)} = \inf_{x \in [x_{i-1},x_i]} f(x).$$

Jelikož nás bude zajímat střední kvadratická odchylka f a F_n na (a,b), můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $f(a)=f(b)$, neboť změníme-li integrovanou funkci v jednom bodě, nemá to vliv na hodnotu Riemannova integrálu. Potom také $g(a)=g(b)$ a navíc je g spojitá na $[a,b]$ a její derivace je spojitá po částech na $[a,b]$. Tedy g splňuje předpoklady Jordanovy věty 1.67, a tudíž

$$F_n^{(g)} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g,$$

kde $F_n^{(g)}$ označuje n-tý částečný součet Fourierovy řady funkce g na (a,b). Odtud plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \ge n_0$ je

$$\sup_{x \in [a,b]} \left|g(x) - F_n^{(g)}(x)\right| < \frac{\epsilon}{2\sqrt{b-a}}.$$

Z toho plyne pro kvadratickou odchylku g a $F_n^{(g)}$ odhad:

$$\int_a^b \left(g(x) - F_n^{(g)}(x)\right)^2 \mathrm{d}x \le \frac{\epsilon^2}{4}. \tag{13}$$

Celkem z (12) a (13) a také z poznámky za Větou 1.66 dostáváme odhad

$$\|f-F_n\|_2 \le \|f-F_n^{(g)}\|_2 \le \|f-g\|_2 + \|g-F_n^{(g)}\|_2 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

platný pro všechna $n \ge n_0$, z čehož plyne $\lim_{n\to\infty} \|f-F_n\|_2 = 0$.

2) Nechť $f \in \mathcal{R}^2(a,b)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že bod b je jediný kritický bod f na $[a,b]$, tzn., že f je riemannovsky integrabilní na $[a,c]$ pro libovolné $c \in (a,b)$ a existuje konečná limita

$$\lim_{c\to b+} \int_a^c f(x)\mathrm{d}x.$$

Z toho plyne, že i f^2 je riemannovsky integrabilní na $[a,c]$ pro libovolné $c \in (a,b)$ a také existuje konečná limita

$$\lim_{c\to b+} \int_a^c f^2(x)\mathrm{d}x,$$

neboť podle předpokladu je $f \in \mathcal{R}^2(a,b)$.

Zvolme $\epsilon > 0$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\int_c^b f^2(x)\mathrm{d}x < \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Neboli pro pomocnou integrabilní funkci

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & x \in [a, c], \\ 0, & x \in (c, b], \end{cases}$$

máme $\|f - g\|_2 < \epsilon/2$. Nyní podle již dokázaného bodu 1) a poznámky za Větou 1.66 najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\|f - F_n\|_2 \leq \|f - F_n^{(g)}\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - F_n^{(g)}\|_2 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

a tudíž $\lim_{n\to\infty} \|f - F_n\|_2 = 0$. □

Parsevalova rovnost nám umožňuje najít součty zajímavých číselných řad, které bychom jinak určovali jen velmi obtížně. Např. můžeme tak určit součet řady převrácených hodnot kvadrátů přirozených čísel, což je úloha známá jako *Basilejský problém*, k níž se váže zajímavá historie.

Příklad 1.69: V Příkladu 1.65 jsme spočítali koeficienty

$$a_n = 0 \quad \text{a} \quad b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Fourierovy řady funkce $f(x) = x$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. V tomto případě má Parsevalova rovnost tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Odtud najdeme řešení Basilejského problému:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Tuto odpověď našel L. Euler v roce 1734 a vyřešil tak dlouho otevřený problém z roku 1650!

Příklad 1.70: Spočítejme Fourierovu řadu funkce $f(x) = x^2$ na $(-\pi, \pi)$. Zřejmě

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(nx)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

neboť integrujeme lichou funkci přes interval symetrický kolem počátku. Dále přímým výpočtem se ověří, že

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3} \quad \text{a} \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Odtud podle Věty 1.64 vyplývá rovnost

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Funkce $f(x) = x^2$ dokonce vyhovuje předpokladům Jordanovy věty 1.67, a proto nalezená Fourierova řada konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ k periodickému prodloužení funkce $f(x) = x^2$ na $[-\pi, \pi]$. Dosadíme-li do poslední rovnosti $x = \pi$, najdeme opět součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

Dále z Parsevalovy rovnosti dostaneme:

$$\frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \mathrm{d}x = \frac{2\pi^4}{5},$$

z čehož plyne, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Jiný způsob nalezení tohoto součtu nabízí Cvičení 1.12

V předchozím dvou příkladech jsme určili hodnoty $\zeta(2)$ a $\zeta(4)$, kde ζ je Riemannova zeta funkce, neboť

$$\zeta(2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Čtenáře by mohlo napadnout, že k nalezení dalších hodnot $\zeta(6), \zeta(8), \ldots$ bychom mohli použít Parsevalovy rovnosti pro koeficienty Fourierovy řady funkcí $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, ... na $(-\pi, \pi)$. To je sice pravda, ale postup se rychle komplikuje a těžko bychom tímto způsobem našli obecný vzorec pro $\zeta(2k)$, kde $k \in \mathbb{N}$.

K odvození obecného vzorce pro $\zeta(2k)$, kde $k \in \mathbb{N}$, vyjdeme z Fourierovy řady funkce $f(x) = \cosh \alpha x$ na $(-\pi, \pi)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr. Přímým výpočtem a z Věty 1.64 dostaneme rovnost

$$\cosh \alpha x = \frac{\sinh \alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha}{\pi}\sinh(\alpha\pi)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2}\cos(nx),$$

která platí pro všechna $x \in [-\pi, \pi]$. Detaily výpočtu jsou přenechány čtenáři jako Cvičení 1.13. Položíme-li $x = \pi$ a píšeme-li z místo α, dostaneme rovnost

$$\pi z \coth \pi z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 + n^2}. \tag{14}$$

Z našeho postupu vyplývá, že rovnost platí pro všechna $z \in \mathbb{R}$. Dá se ale ukázat, že platí dokonce pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{i}\mathbb{Z}$. Uvažujme dále pouze $z \in \mathbb{C}$, pro která je $|z| < 1$. Potom platí:

$$\pi z \coth \pi z = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{n^2}} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\left(\frac{z^2}{n^2}\right)^k = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\zeta(2k)z^{2k}.$$

Prohození pořadí řad lze ospravedlnit díky absolutní konvergenci dvojité řady. Rigorózní argument uvidíme mnohem později u tzv. Fubiniho věty (viz Věta 5.66) a na tomto místě ho prostě akceptujme. Nyní stačí poslední rovnost srovnat s Taylorovou řadou (8), odkud dostaneme finální vzorec:

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Poznámka: Rozvoj (14) lze přepsat do tvaru

$$\pi z \coth \pi z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z}{z + \mathrm{i}n}.$$

Využijeme-li vztahů $\sinh(iz) = \mathrm{i} \sin z$ a $\cosh(iz) = \cos z$ platných pro všechna $z \in \mathbb{C}$, dostaneme podobný rozvoj

$$\pi z \operatorname{cotg} \pi z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z}{z + n}$$

pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Tyto rozvoje představují zobecnění rozkladu racionální lomené funkce na parciální zlomky. Funkce, které lze tímto způsobem rozvíjet jsou tzv. *meromorfní funkce* a jejich rozvoje v „nekonečné řady parciálních zlomků“ se nazývají *Mittag-Lefflerovy rozvoje*. Více o těchto rozvojích najde čtenář v klasických učebnicích komplexní analýzy.

Poznámka: Žádný vzorec podobný (15) pro hodnoty $\zeta(2n+1)$, kde $n \in \mathbb{N}$, není znám. V matematice existuje řada otevřených problémů týkající se nějakým způsobem funkce ζ. Vynecháme-li slavnou *Riemannovu hypotézu*, je to např. otázka iracionality čísel $\zeta(n)$, $n \geq 2$. Všimněte si, že ze vztahu (15) plyne, že číslo $\zeta(2n)$ je racionální násobek čísla π^{2n}. Dobře známý výsledek z teorie čísel je, že číslo π je tzv. transcendetní iracionální číslo, z čehož plyne, že π^k je iracionální pro libovolné $k \in \mathbb{N}$, a tudíž také čísla $\zeta(2n)$ jsou iracionální pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Daleko obtížnější je otázka iracionality čísel $\zeta(2n+1)$. Jen pro zajímavost uveďme dnešní stav této problematiky. Zatím se ví, že je iracionální pouze $\zeta(3)$, což dokázal R. Apéry v roce 1978 a číslo $\zeta(3)$ se proto dnes nazývá *Apéryho konstanta*. Mnoho lidí se pokusilo rozšířit Apéryho výsledek i na další hodnoty $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots$, ale doposud nikdo neuspěl. V roce 2000 T. Rivoal dokázal, že v posloupnosti $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots$ je nekonečně mnoho čísel iracionálních. W. Zudilin dokázal v roce 2001, že z čísel $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ je alespoň jedno iracionální. Další výsledky a reference lze nalézt v článcích W. Zudilina.

1.7 Cvičení

Cvičení 1.1: Dokažte Bolzanovo–Cauchyho kritérium konvergence pro **komplexní** (číselné) posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ konverguje} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(|a_n - a_m| < \epsilon)$$

s využitím známého Bolzanova–Cauchyho kritéria konvergence pro reálné posloupnosti.

Cvičení 1.2: Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí na množině A. Dokažte, že potom také $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na libovolné podmnožině $B \subset A$.

Cvičení 1.3: Dokažte 1. a 2. tvrzení Věty 1.13.

Cvičení 1.4: Dokažte, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z.$$

Cvičení 1.5: Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou komplexní posloupnosti. Dokažte, že, pokud jsou řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolutně konvergentní, potom také tzv. *součinová řada* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, kde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

je absolutně konvergentní a platí rovnost

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Cvičení 1.6: Dokažte, že

$$e^{w+z} = e^w e^z, \quad \forall w, z \in \mathbb{C}.$$

Speciálně $e^{-z} = 1/e^z$.
(Hint: Použijte Cvičení 1.5.)

Cvičení 1.7: Dokažte, že pro $z \in \mathbb{C}$ platí: $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.
(Hint: Použijte Cvičení 1.6 a z Eulerova vzorce odvoďte, že $|e^{\mathrm{i}y}| = 1$ pro $y \in \mathbb{R}$.)

Cvičení 1.8: Dokažte identity:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin(xn/2) \sin(x(n+1)/2)}{\sin(x/2)}$$

a

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(xn/2) \cos(x(n+1)/2)}{\sin(x/2)},$$

kde $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
(Hint: Můžete využít vztahů: $\sin(kx) = \operatorname{Im} e^{\mathrm{i}kx}$ a $\cos(kx) = \operatorname{Re} e^{\mathrm{i}kx}$).

Cvičení 1.9: Ověřte následující rovnosti:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad \forall x \in \begin{cases} [-1,1], & \text{je-li } a > 0, \\ (-1,1], & \text{je-li } -1 < a \le 0, \\ (-1,1), & \text{je-li } a \le -1; \end{cases}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad \forall x \in (-1,1];$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-1/2}{n} x^{2n+1}, \quad \forall x \in [-1,1].$$

Cvičení 1.10: Dokažte Lemma 1.56.
(Hint: Využijte identit: $2\sin\alpha\sin\beta = -\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$, $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$, $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$, $2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$ a $2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha$).

Cvičení 1.11: Dokažte, že zobrazení definované pro funkce z $\mathcal{R}^2(a,b)$ vztahy

$$(f,g)_2 := \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \|f\|_2 := \sqrt{(f,f)_2}$$

splňuje Schwarzovu nerovnost $|(f,g)_2| \le \|f\|_2\|g\|_2$ a trojúhelníkovou nerovnost $\|f+g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2$.
(Hint: Aplikujte obvyklý postup pro důkaz Schwarzovy a trojúhelníkové nerovnosti pro skalární součin a indukovanou normu známý z lineární algebry a uvědomte si, že platnost implikace $\|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = 0$ není pro důkaz třeba.)

Cvičení 1.12: Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = |x|$ na $(-\pi,\pi)$ a s pomocí Parsevalovy rovnosti určete součet řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Cvičení 1.13: Ověřte následující Fourierovy rozvoje:

$$e^{\alpha x} = \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2}{\pi}\sinh(\alpha\pi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2+n^2}\left(\alpha\cos(nx) - n\sin(nx)\right), \quad x \in (-\pi,\pi),$$

$$\cosh(\alpha x) = \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha}{\pi}\sinh(\alpha\pi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2+n^2}\cos(nx), \quad x \in [-\pi,\pi],$$

$$\sinh(\alpha x) = \frac{2}{\pi}\sinh(\alpha\pi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{\alpha^2+n^2}\sin(nx), \quad x \in (-\pi,\pi),$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr.


Tati, existuje Bůh?
Ještě ne.