Matematická analýza A3 a A4

František Štampach
KM FJFI ČVUT

Abstrakt

Tento dokument obsahuje poznámky k přednášce **Matematická analýza A 3 a A 4** vyučované na FJFI ČVUT v zimním a letním semestru 2. ročníku bakalářského studia. Kurz je rozdělen do šesti hlavních částí:

1. Funkční posloupnosti a řady.
2. Topologické a metrické prostory.
3. Diferenciální počet funkcí více proměnných.
4. Teorie míry.
5. Teorie integrálu.
6. Křivkové a plošné integrály.

Tento text je průběžně aktualizován. Jeho poslední verzi si můžete stáhnout na stránkách stampach.xyz. Jakékoliv chyby, překlepy, apod. hlašte prosím na stampfra@cvut.cz. Děkuji.

Obsah

Předmluva

XXX

1 Funkční posloupnosti a řady

Studium *funkčních* posloupností a řad navazuje na předchozí kapitolu z analýzy věnovanou posloupnostem a řadám *číselným*. Přirozené rozšíření pojmu konvergence z číselných posloupností na posloupnosti funkcí, které budeme nazývat bodová konvergence, bude z mnoha ohledů nedostačující, což si ukážeme hned v následující části. To bude hlavní motivací pro zavedení silnějšího pojmu konvergence - tzv. konvergence stejnoměrné, jejíž studium bude hlavní předmět následujících sekcí.

V této kapitole budeme uvažovat posloupnosti komplexních funkcí f_n definovaných na neprázdné podmnožině $A \subset \mathbb{C}$, ačkoliv nám v celém kurzu půjde zejména o reálnou analýzu. Práce v komplexním oboru nebude znamenat žádnou komplikaci. Jednotlivá tvrzení by se v reálném oboru dokazovala zcela analogicky jen bychom uvažovali absolutní hodnotu reálného čísla namísto komplexního. Na druhou stranu je komplexní obor vhodný např. pro speciální případ mocninných řad, jak uvidíte v navazujícím kurzu věnovanému komplexní analýze. Řadu definic a vět bychom mohli bez velkých změn zformulovat i obecněji v metrických prostorech. S těmi se ale seznámíme až v následující kapitole, a proto volíme komplexní obor jako zcela dostačující kompromis.

1.1 Bodová konvergence a diskuze základního problému

Definice 1.1 (Limitní funkce, bodová konvergence)**:** Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost komplexních funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Předpokládejme, že pro každé $z \in A$ je posloupnost $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní. Potom funkci definovanou na A vztahem

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z), \quad z \in A,$$

nazýváme *limitní funkcí* posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na A a říkáme, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje bodově* k f na A. Tuto skutečnost značíme

$$f_n \xrightarrow{A} f.$$

Poznámka: Rozepíšeme-li definici bodové konvergence $f_n \xrightarrow{A} f$, dostáváme ekvivalenci

$$f_n \xrightarrow{A} f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall z \in A)(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon).$$

Příklad 1.2: Uvažujme $f_n(x) = (1 - x^2)^n$ a $A = [-1, 1]$. Potom

$$f_n \xrightarrow{[-1,1]} f,$$

kde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1]. \end{cases}$$

Podobně zavádíme bodovou konvergenci funkční řady.

Definice 1.3 (Součtová funkce, bodová konvergence řady)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost komplexních funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Předpokládejme, že pro každé $z \in A$ je posloupnost částečných součtů $\{s_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_n(z) := \sum_{k=1}^{n} f_k(z),$$

konvergentní. Potom funkci definovanou na A vztahem

$$s(z) := \lim_{n\to\infty} s_n(z), \quad z \in A,$$

nazýváme *součtovou funkcí* posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na A a říkáme, že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

konverguje bodově k s na A.

Příklad 1.4: Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

konverguje bodově k součtové funkci

$$s(z) = \frac{1}{1-z}$$

na množině $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

V analýze a jejích aplikacích se často vyskytuje situace, kdy chceme vyšetřit nějakou vlastnost limitní funkce f na základě známých vlastností funkcí f_n. Fundamentální problém je, zda se zachovávají vlastnosti jako je spojitost, diferencovatelnost a integrabilita. Dále vyvstává otázka, zda je nějaký vztah mezi derivacemi, resp. integrály funkcí f_n a derivací, resp. integrálem limitní funkce f v případech, kdy tyto operace mají dobrý smysl.

Již jednoduchý Příklad 1.2 ukazuje, že ani spojitost, ani diferencovatelnost se při bodové konvergenci obecně nezachovává. Totéž se týká integrability. Tyto vlastnosti se nezachovávají ani v případě bodově konvergentních řad a součtové funkce. Dokonce ani pokud jsou funkce f_n a limitní funkce f diferencovatelné nemusí být f' bodovou limitou posloupnosti f_n' a podobně pro integrál. Tyto skutečnosti ilustrují následující příklady.

Příklad 1.5: Položme

$$f_n(x) := \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pokud je $x \neq 0$, konverguje řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

jako geometrická řada s kvocientem v absolutní hodnotě menším než 1, a proto máme

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Je-li $x = 0$, potom je $f_n(0) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, a proto také $s(0) = 0$. Celkem tedy je součtová funkce

$$s(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Vidíme tedy, že součtová funkce spojitých funkcí nemusí být spojitá.

Příklad 1.6: Uvažujme nejprve funkci $f_n(x)$ definovanou pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ následovně

$$f_n(x) := \lim_{m \to \infty} \left(\cos\left((n!)\pi x\right)\right)^{2m}.$$

Pokud je $(n!)x \in \mathbb{Z}$, potom $\cos\left((n!)\pi x\right) \in \{\pm 1\}$, a proto je $f_n(x) = 1$. Je-li naopak $(n!)x \notin \mathbb{Z}$, máme $\cos\left((n!)\pi x\right) \in (-1, 1)$ a odtud plyne, že $f_n(x) = 0$.

Ukážeme, že existuje limita

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) =: f(x)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pokud je $x \notin \mathbb{Q}$, potom $(\forall n \in \mathbb{N})((n!)x \notin \mathbb{Z})$, neboli $(\forall n \in \mathbb{N})(f_n(x) = 0)$, což implikuje, že $f(x) = 0$. Je-li naopak $x \in \mathbb{Q}$, tedy $x = p/q$ pro nějaká $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, potom je $(n!)x \in \mathbb{Z}$ pro všechna $n \geq q$. Tudíž $f(x) = 1$. Zjišťujeme tedy, že limitní funkce f je známá Dirichletova funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \notin \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Omezíme-li se např. na interval $[0, 1]$, je funkce f_n riemannovsky integrabilní na $[0, 1]$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, neboť je nenulová jen v konečně mnoha bodech. Dirichletova funkce je ale příklad funkce, která není na $[0, 1]$ riemannovsky integrabilní. Z toho plyne, že se integrabilita v Riemnnově smyslu obecně nezachovává při bodové konvergenci.

Příklad 1.7: Uvažujme

$$f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Je jasné, že $f_n \xrightarrow{\mathbb{R}} f$, kde $f = 0$, tj. $f(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce f_n jsou diferencovatelné a pro jejich derivaci platí

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Odtud plyne, že i když jsou všechny funkce f_n a f diferencovatelné, $f' = 0$ není bodovou limitou f_n'. Skutečně např. pro $x = 0$ není posloupnost $\{f_n'(0)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, neboť

$$f_n'(0) = \sqrt{n} \to \infty.$$

Příklad 1.8: Položme
$$f_n(x) := nx(1-x^2)^n, \quad x \in [0,1].$$
Je-li $x \in (0,1)$, potom $f_n(x) \to 0$ např. podle podílového kritéria. Pro $x \in \{0,1\}$ je $f_n(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a proto také $f_n(x) \to 0$. Celkem tedy
$$f_n \xrightarrow{[0,1]} f,$$
kde $f = 0$ na $[0,1]$. Snadno spočítáme integrál
$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = n\int_0^1 x(1-x^2)^n \mathrm{d}x = \frac{n}{2}\int_0^1 y^n \mathrm{d}y = \frac{n}{2n+2}.$$
Odtud vidíme, že
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Poučení z předchozích příkladů je, že bodová konvergence nezachovává spojitost, diferencovatelnost , ani integrabilitu. Navíc záměny limit, derivace a limity, ani integrálu a limity nelze provádět zcela automaticky. Naším dalším cílem bude zformulovat podmínky, za kterých se uvažované vlastnosti zachovávají a bude možné provádět limitní záměny. Pro tyto účely nejprve nahradíme bodovou konvergenci silnější konvergencí, tzv. *konvergencí stejnoměrnou.*

1.2 Stejnoměrná konvergence

Definice 1.9 (Stejnoměrná konvergence)**:** Buďte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f komplexní funkce definované na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že funkční posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně* k funkci f *na množině* A, právě když
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon).$$
Tuto skutečnost značíme
$$f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f.$$
Poznámka: Pojem *stejnoměrná konvergence* je vždy svázán s množinou A. Samostatný výrok „posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně“ nemá smysl, neuvedeme-li na jaké množině.

Poznámka: Uvědomte si zdánlivě nepatrný rozdíl mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí:
$$f_n \xrightarrow{A} f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall z \in A)(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon),$$
$$f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon),$$

který spočívá „pouze“ v různém pořadí kvantifikátorů. V případě bodové konvergence je nalezené n_0 funkcí jak ϵ, tak z, tj. $n_0 = n_0(\epsilon, z)$. Potom nerovnost $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ platí pro fixní ϵ a z pro všechna $n \geq n_0$. Naopak v případě stejnoměrné konvergence existuje univerzální n_0, které závisí pouze na ϵ, tj $n_0 = n_0(\epsilon)$, nikoli na z. Nerovnost $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ potom platí pro každé $z \in A$ a $n \geq n_0$.

Poznámka: Stejnoměrná konvergence je silnější než bodová konvergence, tzn., že

$$f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f \quad \Rightarrow \quad f_n \overset{A}{\to} f.$$

Z toho také plyne, že pokud $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na A, musí konvergovat ke své (bodové) limitní funkci, neboť ta je určena jednoznačně, tj.

$$f_n \overset{A}{\rightrightarrows} g \quad \wedge \quad f_n \overset{A}{\to} f \quad \Rightarrow \quad f = g.$$

Následující tvrzení je jen ekvivalentní přepis definice stejnoměrné konvergence. Je to ale užitečný tvar definice, a proto si ho zformulujeme jako větu.

Věta 1.10: Buďte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f funkce definované na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Potom

$$\begin{aligned} f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) \left(\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \right) \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| = 0. \end{aligned}$$

Důkaz. Vyplývá okamžitě z ekvivalence výroků

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon)$$

a

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) \left(\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \right).$$

□

Příklad 1.11: Uvažujme posloupnost $f_n(x) := x^n$. Potom je

$$f_n \xrightarrow{[0,1)} 0,$$

ale $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje k 0 stejnoměrně na $(0,1]$, protože

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [0,1)} |x^n| = 1 \neq 0.$$

Platí ovšem

$$f_n \overset{[0,1-\epsilon]}{\rightrightarrows} 0$$

pro libovolné $\epsilon \in (0,1)$, neboť

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [0,1-\epsilon]} |x^n| = \lim_{n \to \infty} (1-\epsilon)^n = 0.$$

Bolzanovo–Cauchyho kritérium konvergence má i svou stejnoměrnou variantu, která je obsahem následující věty.

Věta 1.12 (Bolzano–Cauchy)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Potom $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje stejnoměrně na A (k nějaké limitní funkci), právě když

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon).$$

Poznámka: Ekvivalentní formulace Bolzanovy–Cauchyho podmínky je

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \epsilon).$$

Důkaz Věty 1.12. Implikace ($\Rightarrow$): Předpokládejme, že $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$. Potom platí

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon/2).$$

Vezmeme-li libovolné $\epsilon > 0$ a $m, n \geq n_0$ dostaneme s použitím trojúhelníkové nerovnosti

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f(z) - f_m(z)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

pro každé $z \in A$.

Implikace ($\Leftarrow$): Předpokládejme, že platí Bolzanova–Cauchyho podmínka z věty. Potom je pro každé $z \in A$ splněno Bolzanovo–Cauchyho kritérium konvergence pro **číselnou** posloupnost $\{f_n(z)\}_{n=1}^\infty$, a tedy tato posloupnost je konvergentní, viz také Cvičení 1.1. Označme si její limitu

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z)$$

pro každé $z \in A$. Předpoklad platnosti stejnoměrné verze Bolzanova–Cauchyho podmínky je ekvivalentní výroku

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall z \in A)\left(|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \epsilon/2\right).$$

Nyní stačí poslat $p \to \infty$ v poslední nerovnosti a dostaneme tak

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)\left(|f(z) - f_n(z)| \leq \epsilon/2 < \epsilon\right),$$

což znamená, že $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$. □

Poznámka: Všimněte si, že se ve Větě 1.12 explicitně nevyskytuje výraz f pro limitní funkci. Bolzanova–Cauchyho podmínka umožňuje vyjádřit, že funkční posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ stejnoměrně konverguje na A bez použití limitní funkce.

Poznámka: Později uvidíme, že Bolzanovo-Cauchyho kritérium je ekvivalentní vyjádření tzv. *úplnosti* příslušného metrického prostoru. Věta 1.12 nám říká, že prostor omezených funkcí f na A s metrikou indukovanou normou

$$\|f\| := \sup_{z\in A} |f(z)|$$

je úplný (tzv. Banachův).

Věta 1.13: Buďte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, f, g vesměs funkce definované na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Pokud

$$f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f \quad \text{a} \quad g_n \overset{A}{\rightrightarrows} g,$$

potom platí:

1. $f_n + g_n \overset{A}{\rightrightarrows} f + g$,

2. $\alpha f_n \overset{A}{\rightrightarrows} \alpha f$,

3. $f_n g_n \overset{A}{\rightrightarrows} fg$, jsou-li f a g omezené na A.

Důkaz. Tvrzení 1. a 2. vyplývá přímo z příslušných definic a je přenecháno čtenáři jako Cvičení 1.3.

K důkazu tvrzení 3. použijeme jednu implikaci následujícího pomocného tvrzení.

Lemma 1.14: Nechť $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$, potom

$$f \text{ je omezená na } A \quad \Leftrightarrow \quad (\exists K > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \left(\sup_{n \geq n_0} \sup_{z \in A} |f_n(z)| < K \right).$$

Důkaz Lemma 1.14. Implikace ($\Rightarrow$): Položíme-li $\epsilon = 1$ v definici stejnoměrné konvergence, dostaneme z předpokladu $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$, že

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f(z)| < 1).$$

Z toho dále plyne

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z)| < 1 + |f(z)|).$$

Protože je f omezená na A, existuje $L > 0$ tak, že $\sup_{z \in A} |f(z)| < L$, a proto

$$\sup_{n \geq n_0} \sup_{z \in A} |f_n(z)| \leq 1 + \sup_{z \in A} |f(z)| < 1 + L =: K.$$

Implikace ($\Leftarrow$): Opět z předpokladu $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$ speciálně vyplývá, že

$$(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|f(z)| < 1 + |f_{m_0}(z)|).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $m_0 \geq n_0$, a tedy $\sup_{z \in A} |f_{m_0}(z)| < K$. Odtud dostaneme

$$\sup_{z \in A} |f(z)| < 1 + \sup_{z \in A} |f_{m_0}(z)| < 1 + K,$$

nebo-li f je omezená na A. $\square$

Nyní se vrátíme k důkazu 3. tvrzení Věty 1.13. Jelikož jsou f i g omezené, máme

$$(\exists L > 0) \left(\sup_{z \in A} |g(z)| < L \right)$$

a

$$(\exists K > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \left(\sup_{n \geq n_0} \sup_{z \in A} |f_n(z)| < K \right)$$

podle Lemma 1.14. Dále z předpokladů

$$f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f \quad \text{a} \quad g_n \overset{A}{\rightrightarrows} g$$

plyne

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_1)(\forall z \in A) \left(|f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2L} \right),$$
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_2)(\forall z \in A) \left(|g_n(z) - g(z)| < \frac{\epsilon}{2K} \right).$$

Odtud pro libovolné $\epsilon > 0$, $n \geq n_3 := \max(n_0, n_1, n_2)$ a každé $z \in A$ vyvodíme

$$\begin{aligned} |f_n(z)g_n(z) - f(z)g(z)| &= |f_n(z) \left(g_n(z) - g(z)\right) - \left(f(z) - f_n(z)\right) g(z)| \\ &\leq |f_n(z)| \, |g_n(z) - g(z)| + |f_n(z) - f(z)| \, |g(z)| \\ &\leq K \frac{\epsilon}{2K} + \frac{\epsilon}{2L} L = \epsilon, \end{aligned}$$

což znamená, že $f_n g_n \overset{A}{\rightrightarrows} fg$. □

Příklad 1.15: Předpoklad omezenosti funkcí f a g ve 3. tvrzení Věty 1.13 nelze vypustit. Položme např.

$$f_n(x) := x \quad \text{a} \quad g_n(x) := \frac{1}{n}$$

pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Potom zřejmě

$$f_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f \quad \text{a} \quad g_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0,$$

kde $f(x) = x$, ale funkční posloupnost

$$f_n(x) g_n(x) = \frac{x}{n}$$

nekonverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ (ověřte).

Uvedeme ještě definici tzv. *lokálně stejnoměrné konvergence*. Tato konvergence je „vlastní“ prostorům analytických funkcí, se kterými se čtenář může seznámit v partiích komplexní analýzy, viz např. [6].

Definice 1.16 (Lokálně stejnoměrná konvergence)**:** Buďte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f komplexní funkce definované na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje lokálně stejnoměrně* k funkci f na množině A, právě když

$$(\forall z \in A)(\exists H_z \text{ okolí } z)\left(f_n \overset{H_z \cap A}{\rightrightarrows} f\right).$$

Poznámka: Pod pojmem okolí H_z zde rozumíme množinu $H_z = \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| < r\}$ pro nějaké $r > 0$ (otevřený kruh v $\mathbb{C}$ se středem v z a poloměrem $r > 0$).

Pokud $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$, pak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje také lokálně stejnoměrně k f na A, viz Cvičení 1.2. Naopak to neplatí. Např. posloupnost funkcí $f_n(x) = x^n$ konverguje lokálně stejnoměrně k 0 na intervalu $(0, 1)$, ale nekonverguje stejnoměrně na $(0, 1)$. Pokud je ale množina A tzv. kompaktní, tj. omezená a uzavřená (viz Věta 2.104), splývá lokálně stejnoměrná konvergence na A se stejnoměrnou konvergencí na A.

1.3 Věty o záměně

V následující větách zformulujeme podmínky za jakých se spojitost, diferencovatelnost a integrabilita přenáší z funkční posloupnosti na limitní funkci a kdy můžeme zaměňovat limity, limitu a derivaci a limitu a integrál.

Nejprve zformulujeme tzv. větu o limitě. Připomeňme si definici *limity funkce vzhledem k množině* A:

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f(z) = c \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in A, 0 < |z - z_0| < \delta)(|f(z) - c| < \epsilon).$$

Aby měla definice rozumný smysl, požadujeme navíc, aby množina $A \cap \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$ byla neprázdná pro libovolné $\delta > 0$. Jinými slovy limitu funkce vzhledem k A definujeme v tzv. *hromadném bodě* množiny A, tj. v takovém bodě $z \in \mathbb{C}$, v jehož libovolném okolí H_z leží nějaký bod z $A \setminus \{z\}$, tzn.

$$(\forall \delta > 0)(\exists w \in A)(0 < |w - z| < \delta).$$

Množinu hromadných bodů množiny A značíme A'.

Věta 1.17 (O limitě)**:** Buďte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f funkce definované na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Dále předpokládejme:

i. $z_0 \in A'$.

ii. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje limita $\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f_n(z) =: a_n$.

iii. $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$.

Potom platí:

1. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.

2. Existuje limita $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in A}} f(z)$.

3. Platí rovnost: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in A}} f(z)$.

Jinými slovy lze zaměňovat pořadí limit:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in A}} f_n(z) = \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in A}} \lim_{n\to\infty} f_n(z).$$

Důkaz. Nejprve dokážeme 1. tvrzení. Zvolme pevně $\epsilon > 0$. Z předpokladu iii. a Věty 1.12 plyne

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon).$$

Využijeme-li předpoklad ii. a pošleme $z \to z_0$ v poslední nerovnosti, dostaneme

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(|a_n - a_m| \leq \epsilon),$$

což je Bolzanova–Cauchyho podmínka konvergence číselné posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. To znamená, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.

V druhé části důkazu ověříme najednou tvrzení 2. a 3. Označme $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Podle trojúhelníkové nerovnosti máme

$$|f(z) - a| \leq |f(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - a_m| + |a_m - a|.$$

pro libovolné $m \in \mathbb{N}$. Podle předpokladu iii. lze najít nějaké pevné $m \in \mathbb{N}$ dostatečně velké tak, že

$$|f(z) - f_m(z)| < \epsilon/3$$

pro každé $z \in A$. Z již dokázaného tvrzení 1. můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že zvolené m je také dost velké, aby platilo

$$|a_m - a| < \epsilon/3.$$

Nakonec podle předpokladu ii. můžeme najít okolí H_{z_0} takové, že

$$|f_m(z) - a_m| < \epsilon/3$$

pro všechna $z \in H_{z_0} \cap A$, $z \neq z_0$. Celkem tak dostáváme, že

$$|f(z) - a| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

pro všechna $z \in H_{z_0} \cap A \setminus \{z_0\}$, což dokazuje obě tvrzení 2. a 3. $\square$

Důsledek předchozí věty je, že stejnoměrná konvergence zachovává spojitost. Připomeňme, že o funkci f řekneme, že je *spojitá v bodě* z_0 *vzhledem k* A, pokud

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in A, |z - z_0| < \delta)(|f(z) - f(z_0)| < \epsilon).$$

Všimněte si, že pokud bod z_0 *není* hromadným bodem A (je to tzv. *izolovaný bod* A), je f automaticky spojitá v z_0 vzhledem k A.

Věta 1.18 (O spojitosti)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f jsou funkce definované na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ a $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$. Jsou-li f_n spojité v bodě $z_0 \in A$ vzhledem k A pro každé $n \in \mathbb{N}$, potom je také f spojitá v bodě z_0 vzhledem k A.

Důkaz. Podle poznámky výše, stačí uvažovat případ $z_0 \in A'$. Potom je funkce f spojitá v z_0 vzhledem k A, právě když

$$f(z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f(z).$$

Aplikujeme-li nyní Větu 1.17, jejíž předpoklad ii. je splněn díky spojitosti f_n v bodě z_0 vzhledem k A, dostaneme

$$f(z_0) = \lim_{n \to \infty} f_n(z_0) = \lim_{n \to \infty} \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f_n(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} \lim_{n \to \infty} f_n(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f(z).$$

□

Poznámka: Vzhledem k lokálnímu charakteru spojitosti v bodě můžeme předpoklad $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$ ve Větě 1.18 nahradit $f_n \overset{H_{z_0} \cap A}{\rightrightarrows} f$, kde H_{z_0} je nějaké okolí z_0. Speciálně Věta 1.18 platí, nahradíme-li předpoklad stejnoměrné konvergence lokálně stejnoměrnou konvergencí. Platí tedy tvrzení, které lze stručně vyslovit: „*Lokálně stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá.*“

Poznámka: V následujícím smyslu nelze tvrzení Věty 1.18 obrátit: Jsou-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f spojité funkce na A (vzhledem k A) a $f_n \overset{A}{\to} f$, nevyplývá z toho nutně stejnoměrná konvergence posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na A. Tuto skutečnost ilustruje Příklad 1.15. Konvergence, která zachovává spojitost a platí pro ni také obrácené tvrzení ve smyslu výše, je tzv. kvazistejnoměrná konvergence, která je slabší než konvergence stejnoměrná. My se v tomto kurzu kvazistejnoměrnou konvergencí zabývat nebudeme. Čtenář se o ní může dozvědět více ve skriptu [27]. Obrácené tvrzení platí za jistých dodatečných předpokladů i pro stejnoměrnou konvergenci, viz např. [22, Thm. 7.13].

Poznámka: Věty 1.18 a 1.12 implikují, že prostor spojitých a omezených funkcí na A vybavený normou $\|f\| := \sup_{z \in A} |f(z)|$, který se obvykle značí $C(A)$, je úplný, tedy Banachův. Vlastnostmi prostoru $C(A)$ se budete hlouběji zabývat ve funkcionální analýze.

Další věta se týká vztahu integrace a stejnoměrné konvergence. V ní se omezíme na funkce definované na uzavřeném a omezeném intervalu, neboť na těchto funkcích je vystavěná klasická teorie Riemannova integrálu.

Věta 1.19: (O integraci) Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f reálné funkce definované na $[a, b]$. Předpokládejme, že

i. $f_n \xrightarrow[]{[a,b]} f$,

ii. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je f_n riemannovsky integrabilní na $[a, b]$.

Potom platí:

1. Limitní funkce f je riemannovsky integrabilní na $[a, b]$.

2. Platí rovnost:
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Jinými slovy lze zaměňovat pořadí limity a integrálu:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme 1. tvrzení. Připomeňme, že funkce f je riemannovsky integrabilní na $[a, b]$, právě když

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall\sigma\ \delta\text{-rozdělení } [a, b])(S_\sigma(f) - s_\sigma(f) < \epsilon),$$

kde

$$S_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{m} M_i^{(f)} (x_i - x_{i-1}) \quad \text{a} \quad s_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{m} m_i^{(f)} (x_i - x_{i-1})$$

jsou horní a dolní integrální součet f při rozdělení σ,

$$M_i^{(f)} = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad \text{a} \quad m_i^{(f)} = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

a $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$ jsou body rozdělení σ.

Zvolme $\epsilon > 0$. Podle předpokladu i. existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ je

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4(b-a)} \tag{1}$$

pro každé $x \in [a, b]$. Zvolme pevně nějaké $n \geq n_0$. Podle předpokladu ii. existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolné δ-rozdělení σ intervalu $[a, b]$ platí

$$S_\sigma(f_n) - s_\sigma(f_n) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2}$$

Nerovnost (1) lze napsat ve tvaru

$$f_n(x) - \frac{\epsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\epsilon}{4(b-a)},$$

ze které plyne

$$m_i^{(f_n)} - \frac{\epsilon}{4(b-a)} \leq m_i^{(f)} \leq M_i^{(f)} \leq M_i^{(f_n)} + \frac{\epsilon}{4(b-a)}$$

pro každé $i \in \hat{m}$. Vynásobíme-li nerovnosti výrazem $(x_i - x_{i-1})$ a sečteme přes $i \in \hat{m}$, dostaneme

$$s_\sigma(f_n) - \frac{\epsilon}{4} \leq s_\sigma(f) \leq S_\sigma(f) \leq S_\sigma(f_n) + \frac{\epsilon}{4}.$$

Přeuspořádáním nerovností a využitím odhadu (2) nakonec odvodíme, že

$$S_\sigma(f) - s_\sigma(f) \leq S_\sigma(f_n) - s_\sigma(f_n) + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

což implikuje riemannovskou integrabilitu f na $[a, b]$.

Tvrzení 2. již ověříme snadno, neboť pro každé $n \geq n_0$ máme

$$\left| \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{4(b-a)}\mathrm{d}x = \frac{\epsilon}{4},$$

a proto

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

□

Poznámka: Pro ospravedlnění záměny limity a integrálu je stejnoměrná konvergence podmínka postačující nikoliv nutná. Obvyklá argumentace pro tuto záměnu v matematické literatuře používá obecnější tzv. Lebesgueovu větu. Integrál v této větě ovšem není Riemannův, a proto si tuto větu dokážeme až mnohem později ve výkladu teorie Lebesgueova integrálu (viz Věta 5.43).

Poslední věta o záměně se týká vztahu derivace a stejnoměrné konvergence.

Věta 1.20 (O derivaci)**:** Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost reálných diferencovatelných funkcí na (a, b). Předpokládejme dále, že:

i. Existuje $c \in (a, b)$ takové, že posloupnost $\{f_n(c)\}_{n=1}^\infty$ konverguje.

ii. Posloupnost $\{f_n'\}_{n=1}^\infty$ stejnoměrně konverguje na (a, b).

Potom platí:

1. Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje stejnoměrně na (a, b).

2. Limitní funkce f posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je diferencovatelná na (a, b).

3. Derivace f' je limitní funkcí posloupnosti $\{f_n'\}_{n=1}^\infty$ na (a, b), tzn.

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Důkaz. Nejdříve dokážeme tvrzení 1. Zvolme $\epsilon > 0$. Bolzanova–Cauchyho podmínka a předpoklady i. a ii. implikují, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \geq n_0$ je

$$|f_n(c) - f_m(c)| < \frac{\epsilon}{2}$$

a

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

pro všechna $x \in (a,b)$. Aplikujeme-li Lagrangeovu větu o přírůstku na funkci $f_n - f_m$, dostaneme

$$|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(t)| \leq |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)|\,|x - t| \tag{3}$$

kde $x, t \in (a,b)$ a ξ je bod ležící mezi x a t. Výraz vpravo můžeme dále odhadnout a dostaneme nerovnost

$$|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(t)| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}|x - t| < \frac{\epsilon}{2},$$

která platí pro všechna $x, t \in (a,b)$. Odtud máme

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(c)| + |f_n(c) - f_m(c)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

pro každé $m, n \geq n_0$ a $x \in (a,b)$. Tvrzení 1. tedy platí podle Věty 1.12.

V druhé části důkazu dokážeme najednou tvrzení 2. a 3. Zafixujme $x \in (a,b)$ a definujme si pomocné funkce

$$\phi_n(t) := \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \quad \text{a} \quad \phi(t) := \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

pro $t \in (a,b) \setminus \{x\}$. Jelikož jsou f_n diferencovatelné, máme

$$\lim_{t \to x} \phi_n(t) = f_n'(x)$$

pro všechny $n \in \mathbb{N}$. Nerovnost (3), kterou jsme odvodili aplikací Lagrangeovy věty, lze napsat ve tvaru

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

pro všechna $m, n \geq n_0$ a $t \in (a,b) \setminus \{x\}$. Tedy podle Věty 1.12 je posloupnost $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konvergentní na $(a,b) \setminus \{x\}$. Přihlédneme-li navíc k tomu, že $f_n \xrightarrow{(a,b)} f$, zjistíme, že

$$\phi_n \overset{(a,b)\setminus\{x\}}{\rightrightarrows} \phi.$$

Nyní již můžeme aplikovat Větu 1.17 na posloupnost $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ s $A = (a,b) \setminus \{x\}$, z čehož vyplývá, že existuje limita $\lim_{t \to x} \phi(t)$, což znamená z definice ϕ, že existuje derivace f v bodě x. Nakonec máme

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \phi(t) = \lim_{t \to x} \lim_{n \to \infty} \phi_n(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{t \to x} \phi_n(t) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x).$$

$\square$

Poznámka: Už na Příkladu 1.7 lze pozorovat, že ze stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nelze nic usuzovat o konvergenci posloupnosti derivací $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$. Na druhou stranu Věta 1.20 ukazuje, že naopak jistý vztah platí, jsou-li splněny předpoklady i. a ii. Věty 1.20. Tvrzení 1. Věty 1.20 představuje další kritérium stejnoměrné konvergence.

Poznámka: Tvrzení 2. a 3. Věty 1.20 zůstává v platnosti, nahradíme-li předpoklad ii. slabším požadavkem lokálně stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ na (a,b). Za tohoto slabšího předpokladu platí tvrzení 1. také pouze lokálně, tedy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně na (a,b).

1.4 Funkční řady

Definice 1.21 (Stejnoměrná konvergence řady)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset C$. Řekneme, že funkční řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *konverguje stejnoměrně* na množině A, právě když funkční posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovaná vztahem

$$s_n(z) := \sum_{k=0}^{n} f_k(z), \quad z \in A,$$

konverguje stejnoměrně na A.

Poznámka: Zcela analogicky definujeme *lokálně stejnoměrnou konvergenci* řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ na A.

Poznámka: Zde členy posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ indexujeme prvky $\mathbb{N}_0$ (od nuly). Občas ale budeme také indexovat prvky $\mathbb{N}$ (od jedničky). Způsob indexování je samozřejmě nepodstatný a my si ho budeme volit libovolně podle potřeby.

Příklad 1.22: Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

konverguje stejnoměrně na $A_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$, kde $r \in (0,1)$, neboť posloupnost částečných součtů

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$$

konverguje stejnoměrně na A_r. Na otevřeném jednotkovém kruhu $A := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ovšem posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ stejnoměrně nekonverguje, a proto ani řada $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ není stejnoměrně konvergentní na A. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konverguje lokálně stejnoměrně na A (rozmyslete).

Poznatky získané v části o funkčních posloupnostech nyní můžeme aplikovat na posloupnost částečných součtů a dostaneme poměrně jednoduše odpovídající věty o funkčních řadách. První takovou větou je Bolzanovo–Cauchyho kritérium stejnoměrné konvergence funkční řady. Jednoduchý přepis vět, který bychom získali prostým nahrazením funkční posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupností částečných součtů $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ by ale nebyl příliš užitečný, neboť posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ není typicky možné, na rozdíl od jednoduchého Příkladu 1.22, jednoduše vyjádřit a může být proto velmi nevhodné s ní přímo pracovat. Daleko užitečnější je zformulovat tvrzení o funkčních řadách $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ v termínech posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, kterou v řadě sčítáme.

Věta 1.23 (Bolzano–Cauchy)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Potom řada funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na A, právě když

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall z \in A)\left(\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| < \epsilon\right).$$

Důkaz. Stačí aplikovat Větu 1.12 na posloupnost částečných součtů. □

Důsledek 1.24 (Nutná podmínka stejnoměrné konvergence)**:** Pokud řada funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na množině A, pak

$$f_n \overset{A}{\rightrightarrows} 0.$$

Důkaz. Stačí použít Větu 1.23 a položit $p = 1$. □

Příklad 1.25: Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

konverguje bodově pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, což plyne např. z Dirichletova kritéria. Ukážeme, že řada není stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 2\pi]$ pomocí Bolzanova–Cauchyho kritéria. Lze ukázat, že tato řada není stejnoměrně konvergentní na libovolném intervalu, který má neprázdný průnik s množinou $2\pi\mathbb{Z}$.

Pokud by řada byla stejnoměrně konvergentní na $[0, 2\pi]$, potom bychom k libovolnému $\epsilon > 0$ našli $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ by platilo

$$\sup_{x \in [0,2\pi]} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin(kx)}{k}\right| < \epsilon.$$

Ukážeme, že to není možné. Položme $p := n + 2$ a $x = x_n := 1/(2n)$. Potom

$$\sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{\sin(k/(2n))}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{\sin(1/2)}{k}.$$

Úsek harmonické řady můžeme zespodu odhadnout integrálem:

$$\sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} \geq \int_{n+1}^{2n+2} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log \frac{2n+2}{n+1} = \log 2,$$

a proto pro všechna $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{\sin(k/(2n))}{k} \geq \sin(1/2) \log 2 > 0.$$

Tedy, je-li $\epsilon < \sin(1/2)\log 2$, Bolzanova–Cauchyho podmínka neplatí.

Později budeme dokonce schopni řadu sečíst. V části věnované trigonometrickým řadám uvidíme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & \text{je-li } x \in (0, 2\pi), \\ 0, & \text{je-li } x \in \{0, 2\pi\}. \end{cases}$$

Tedy součtová funkce řady není spojitá na $[0, 2\pi]$. Pokud by ale řada konvergovala stejnoměrně na $[0, 2\pi]$, potom by její součtová funkce musela být spojitá, což plyne z Věty 1.18 aplikované na posloupnost částečných součtů. To je alternativní argument dokazující, že řada ze zadaní není stejnoměrně konvergentní na $[0, 2\pi]$.

Věta 1.26 (Weierstrass)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Dále předpokládejme, že

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall z \in A)\left(|f_n(z)| \leq g_n(z)\right).$$

Potom, konverguje-li $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ stejnoměrně na A, je také $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konvergentní na A.

Poznámka: Je-li speciálně $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ číselná posloupnost funkcí nezávislých na z, tzn., že platí

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\exists M_n \geq 0)(\forall z \in A)(|f_n(z)| \leq M_n),$$

je řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konvergentní na A, pokud konverguje číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$. Toto kritérium se v literatuře objevuje pod názvem *Weierstrassův M-test*.

Důkaz Věty 1.26. Vyplývá ihned z nerovnosti

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z)$$

a Věty 1.23. □

Příklad 1.27: Vyšetříme stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-\sqrt{n}x}$$

na intervalu $[0, \infty)$. Vyšetřením průběhu funkce $f(t) := te^{-t}$ snadno zjistíme, že $0 \leq f(t) \leq f(1) = 1/e$ pro všechna $t \in [0, \infty)$. Tedy platí

$$\left|\frac{x}{n} e^{-\sqrt{n}x}\right| = \frac{f(\sqrt{n}x)}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{en^{3/2}}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, \infty)$. Jelikož majorizující číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ konverguje, je podle Věty 1.26 řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-\sqrt{n}x}$$

stejnoměrně konvergentní na $[0, \infty)$.

Příklad 1.28: Walter Rudin začíná svou knihu [23] tvrzením, že komplexní exponenciální funkce je nejdůležitější funkcí v matematice. Tato funkce je definována řadou

$$e^z \equiv \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

která konverguje bodově pro každé $z \in \mathbb{C}$. Zafixujeme-li $R > 0$, vyplývá z Weierstrassova kritéria, že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

konverguje stejnoměrně na kruhu $A_R := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$, neboť

$$\sup_{z \in A_R} \left| \frac{z^n}{n!} \right| \leq \frac{R^n}{n!}$$

a číselná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!}$$

je konvergentní. Speciálně z toho plyne, že řada z definice $\exp(z)$ konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{C}$.

Podobně se odpovídající řadou definují trigonometrické funkce

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{a} \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

pro každé $z \in \mathbb{C}$. Potom platí tzv. *Eulerův vzorec*

$$e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

jehož odvození je přenecháno čtenáři jako Cvičení 1.4.

Příklad 1.29: Slavná Riemannova zeta funkce je definovaná vztahem

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

pro $z \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Re} z > 1$, neboť pro tato z řada vpravo bodově konverguje. Obecná mocnina s komplexním argumentem, která se v definici zeta funkce objevuje, je definována vztahem

$$n^z := e^{z \log n},$$

kde exponenciální funkce s komplexním argumentem byla definována v Příkladu 1.28. Buď $r > 1$, potom pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z \geq r$, je

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} \leq \frac{1}{n^r},$$

kde jsme použili vztah $|e^w| = e^{\operatorname{Re} w}$ platný pro každé $w \in \mathbb{C}$, viz Cvičení 1.7. Z Weierstrassova kritéria potom vyplývá, že řada z definice funkce ζ konverguje stejnoměrně na polorovině $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq r\}$ pro libovolné $r > 1$. Speciálně z toho plyne, že tato řada konverguje lokálně stejnoměrně na otevřené polorovině $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$.

Riemannova zeta funkce patří mezi tzv. *Dirichletovy řady*, což jsou funkční řady tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z},$$

kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je komplexní posloupnost. Dirichletovy řady mají podobně jako např. mocninné řady mnoho speciálních vlastností. My se ovšem v tomto kurzu nebudeme studiem speciálních vlastností Dirichletových řad zabývat. Čtenář najde více např. v knize [13].

Na rozdíl od Weierstrassova kritéria, které lze aplikovat jen na (bodově) absolutně konvergentní řady lze následující kritéria Dirichleta a Abela použít i v jiných případech.

Věta 1.30: Nechť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ a $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ *monotónní* posloupnost reálných funkcí definovaných na A. Označme $s_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$. Nechť dále platí jedna z následujících podmínek

i. (Dirichlet) Posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ je tzv. *stejně omezená*, tzn.

$$(\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall z \in A)(|s_n(z)| \leq K),$$

a $g_n \overset{A}{\rightrightarrows} 0$.

ii. (Abel) Posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na A a $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ je stejně omezená.

Potom řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ konverguje stejnoměrně na A.

Důkaz. Důkaz staví na tzv. Abelově parciální sumaci. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ a $p \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k g_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} (s_k - s_{k-1}) g_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} s_k g_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} s_k g_{k+1} \\ &= s_{n+p} g_{n+p} - s_n g_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} s_k (g_k - g_{k+1}).\end{aligned} \tag{4}$$

1. Předpokládejme, že platí podmínka i. Zvolme $\epsilon > 0$. Z předpokladu $g_n \overset{A}{\rightrightarrows} 0$ plyne, že

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)\left(|g_n(z)| < \frac{\epsilon}{4K}\right).$$

Potom pro libovolné $n \geq n_0$, $p \in \mathbb{N}$ a $z \in A$ můžeme s využitím výrazu (4) odhadovat

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) g_k(z)\right| &\leq |s_{n+p}(z)||g_{n+p}(z)| + |s_n(z)||g_{n+1}(z)| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |s_k(z)||g_k(z) - g_{k+1}(z)| \\ &< K\,\frac{\epsilon}{4K} + K\,\frac{\epsilon}{4K} + K \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |g_k(z) - g_{k+1}(z)|.\end{aligned}$$

Podle předpokladu je posloupnost $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ monotónní, a proto je výraz $g_k(z) - g_{k+1}(z)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ buďto nezáporný, nebo nekladný. V každém případě z toho plyne, že

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |g_k(z) - g_{k+1}(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (g_k(z) - g_{k+1}(z)) \right| = |g_{n+1}(z) - g_{n+p}(z)|.$$

Odtud dále získáváme odhad

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) g_k(z) \right| &< \frac{\epsilon}{2} + K|g_{n+1}(z) - g_{n+p}(z)| \leq \frac{\epsilon}{2} + K|g_{n+1}(z)| + K|g_{n+p}(z)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + K\,\frac{\epsilon}{4K} + K\,\frac{\epsilon}{4K} = \epsilon, \end{aligned}$$

který platí pro každé $n \geq n_0$, $p \in \mathbb{N}$ a $z \in A$, což podle Bolzanova–Cauchyho kritéria implikuje tvrzení věty.

2. Nyní předpokládejme, že platí podmínka ii. Nejprve mírně přepíšeme výraz (4) do tvaru:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k g_k = (s_{n+p} - s_n) g_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (s_k - s_n)(g_k - g_{k+1}).$$

Z předpokladu stejné omezenosti posloupnosti $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ na A plyne, že

$$(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall z \in A)\left(|g_n(z)| \leq M\right),$$

Dále zvolme $\epsilon > 0$ libovolně ale pevně. Podle druhého předpokladu je $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ stejnoměrně konvergentní na A, a proto podle Věty 1.12 existuje $n_0 \in \mathbb{N}_0$ takové, že

$$|s_k(z) - s_n(z)| < \frac{\epsilon}{3M}$$

pro všechna $z \in A$ a $n, k \in \mathbb{N}_0$ taková, že $k \geq n \geq n_0$. Potom pro libovolné $n \geq n_0$, $p \in \mathbb{N}$ a $z \in A$ máme

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) g_k(z) \right| &\leq |s_{n+p}(z) - s_n(z)||g_{n+p}(z)| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |s_k(z) - s_n(z)||g_k(z) - g_{k+1}(z)| \\ &< \frac{\epsilon}{3M}|g_{n+p}(z)| + \frac{\epsilon}{3M} \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |g_k(z) - g_{k+1}(z)| \\ &= \frac{\epsilon}{3M}|g_{n+p}(z)| + \frac{\epsilon}{3M}|g_{n+1}(z) - g_{n+p}(z)|. \end{aligned}$$

Poslední rovnost platí díky monotonii posloupnosti $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$. Dále využijeme stejné omezenosti $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ a dostaneme finální odhad:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) g_k(z) \right| < \frac{\epsilon}{3M}|g_{n+p}(z)| + \frac{\epsilon}{3M}\left(|g_{n+1}(z)| + |g_{n+p}(z)|\right) \leq \frac{\epsilon}{3M}\,M + \frac{\epsilon}{3M}\,2M = \epsilon,$$

který platí pro každé $n \geq n_0$, $p \in \mathbb{N}$ a $z \in A$. Tvrzení věty nyní vyplývá z Bolzanova–Cauchyho kritéria. □

Příklad 1.31: Ukážeme, že řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$
konverguje stejnoměrně na $[\delta, 2\pi - \delta]$, kde $\delta \in (0, \pi)$. Srovnejte s Příkladem 1.25. Použijeme Dirichletovo kritérium, kde položíme
$$f_n(x) := \sin(nx) \quad \text{a} \quad g_n(x) := \frac{1}{n}.$$
Posloupnost $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zřejmě klesající a $g_n \xrightarrow[]{[\delta,2\pi-\delta]} 0$. Stačí tedy ověřit, že posloupnost částečných součtů $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ je stejně omezená na $[\delta, 2\pi - \delta]$. Podle Cvičení 1.8 máme
$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin(xn/2) \sin(x(n+1)/2)}{\sin(x/2)}.$$
Nyní si stačí uvědomit, že pro $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ platí odhad
$$|s_n(x)| \leq \frac{1}{\sin(\delta/2)},$$
který implikuje stejnou omezenost posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ na $[\delta, 2\pi - \delta]$.

Příklad 1.32: Vyšetříme ještě stejnoměrnou konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)\sin(nx)}{n}$$
na $\mathbb{R}$. Podobně jako v předchozím příkladě aplikujeme Dirichletovo kritérium s
$$f_n(x) := \sin(x)\sin(nx) \quad \text{a} \quad g_n(x) := \frac{1}{n}.$$
V tomto případě dostaneme
$$\begin{aligned} s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) &= \frac{\sin(x)}{\sin(x/2)} \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right), \end{aligned}$$
odkud plyne, že
$$|s_n(x)| \leq 2.$$
pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Tedy $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stejně omezená a také ostatní předpoklady Dirichletova kritéria jsou splněny. Proto řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)\sin(nx)}{n}$$
konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Tento příklad ukazuje, srovnáme-li ho s Příkladem 1.25, že nelze postupovat tak, že bychom funkci $\sin(x)$ „vytkli“ ven ze sumy a vyšetřovali řadu z Příkladu 1.25.

Podobně jako u funkčních posloupností nás také u funkčních řad zajímá, kdy je možné zaměnit např. limitu a sumu, integrál a sumu, apod. Abychom odvodili věty o záměně pro funkční řady, stačí věty o záměně pro funkční posloupnosti aplikovat na posloupnost částečných součtů funkční řady. Pro jejich důležitost si věty o záměně pro funkční řady zformulujeme.

Věta 1.33 (O limitě)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Dále předpokládejme:

i. $z_0 \in A'$.

ii. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje limita $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f_n(z) =: a_n$.

iii. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na A k součtové funkci s.

Potom platí:

1. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.
2. Existuje limita $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} s(z)$.
3. Platí rovnost: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} s(z)$.

Jinými slovy lze zaměňovat pořadí limity a sumy:

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f_n(z).$$

Důkaz. Položme

$$s_n(z) := \sum_{k=0}^{n} f_k(z) \quad \text{a} \quad A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

pro $n \in \mathbb{N}_0$ a $z \in A$. Potom z předpokladu ii. plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} s_n(z) = A_n.$$

Dále bod iii. znamená, že $s_n \overset{A}{\rightrightarrows} s$. Tvrzení věty nyní plyne z Věty 1.17. $\square$

Věta 1.34 (O spojitosti)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ a spojitých v bodě $z_0 \in A$ vzhledem k A. Potom, pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na A, je její součtová funkce spojitá v bodě $z_0 \in A$ vzhledem k A.

Důkaz. Plyne z Věty 1.18. $\square$

Poznámka: Věta 1.34 zůstává v platnosti i pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje lokálně stejnoměrně na A. Z toho plyne tvrzení, jež můžeme stručně vyjádřit jako: *Součtová funkce lokálně stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí je spojitá.*

Věta 1.35 (O integraci)**:** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost riemannovsky integrabilních funkcí na $[a, b]$. Nechť dále řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konverguje na $[a, b]$ k součtové funkci s. Potom je s riemannovsky integrabilní na $[a, b]$ a platí rovnost:

$$\int_a^b s(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Neboli lze zaměňovat pořadí integrálu a sumy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Stačí aplikovat Větu 1.19 na posloupnost částečných součtů. □

Věta 1.36 (O derivaci)**:** Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných diferencovatelných funkcí na (a, b). Předpokládejme dále, že:

i. Existuje $c \in (a, b)$ takové, že posloupnost řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(c)$ konverguje.

ii. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ stejnoměrně konverguje na (a, b).

Potom platí:

1. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na (a, b).

2. Součtová funkce s řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ je diferencovatelná na (a, b).

3. Derivace s' je součtovou funkcí řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ na (a, b), tzn.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Důkaz. Stačí aplikovat Větu 1.20 na posloupnost částečných součtů. □

Poznámka: Předpoklad ii. Věty 1.36 lze nahradit lokálně stejnoměrnou konvergencí $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ na (a, b). Potom místo tvrzení 1. máme pouze lokálně stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ na (a, b), ale tvrzení 2. a 3. zůstávají v platnosti beze změny.

Na závěr této sekce si ukážeme jako zajímavost, že existuje spojitá funkce na $\mathbb{R}$, která není v žádném bodě diferencovatelná. Takovou funkci je bezpochyby obtížné si představit, neboť, přestože je spojitá, její graf musí být „hodně zubatý“. I významní matematici 19. století předpokládali (např. C. F. Gauss), že množina bodů, v nichž spojitá funkce nemá derivaci, musí být v nějakém smyslu omezená. To je pravda, když předpoklad spojitosti mírně zesílíme a vezmeme např. funkce *lipschitzovské*:

$$f \text{ je } \textit{lipschitzovská} \text{ na } (a,b) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists K>0)(\forall x,y,\in(a,b))(|f(x)-f(y)|<K|x-y|).$$

Potom množina bodů, v nichž není lipschitzovská funkce diferencovatelná, je podle Radenmacherovy věty v jistém smyslu velmi malá (Lebesgueovy míry nula).

Příkladem spojité funkce, která není nikde diferencovatelná, je tzv. Weierstrassova funkce:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos\left(b^n \pi x\right), \tag{5}$$

kde $a \in (0,1)$ a b je liché přirozené číslo takové, že $ab > 1 + 3\pi/2$. K. Weierstrass prezentoval tuto funkci v roce 1872 a její graf byl jeden z prvních studovaných fraktálů, viz Obrázek 1. Později G. H. Hardy [12] ukázal, že stačí předpokládat $a \in (0,1)$ a $b \geq 1/a$ a navíc funkci kosinus v (5) lze nahradit např. tzv. „zig-zag" funkcí („pilou"), viz funkci ϕ v důkazu následující věty.

Věta 1.37: Existuje funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je spojitá, ale není v žádném bodě diferencovatelná.

Důkaz. Označme ϕ funkci definovanou na $\mathbb{R}$, která splňuje

$$\phi(x)=|x|, \quad \text{je-li } x\in[-1,1],$$

a která je 2-periodická, tzn. $\phi(x) = \phi(x+2)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Není těžké si rozmyslet, že platí nerovnost

$$|\phi(t)-\phi(s)| \leq |s-t| \tag{6}$$

pro každé $s, t \in \mathbb{R}$. Speciálně je ϕ spojitá na $\mathbb{R}$.

Definujme

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi\left(4^n x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jelikož $|\phi(x)| \leq 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, řada z definice funkce f konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ podle Věty 1.26. Dále z Věty 1.34 vyplývá, že f je spojitá na $\mathbb{R}$.

Ukážeme, že f není diferencovatelná v žádném bodě. Zafixujme $x \in \mathbb{R}$ a $m \in \mathbb{N}$ a definujme

$$\delta_m := \pm\frac{1}{2}4^{-m},$$

kde znaménko volíme tak, aby platilo $(4^m x, 4^m x + 4^m\delta_m) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. To je vždy možné, protože $|4^m \delta_m| = 1/2$. Dále pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$\gamma_n := \frac{\phi\left(4^n(x+\delta_m)\right)-\phi\left(4^n x\right)}{\delta_m}.$$

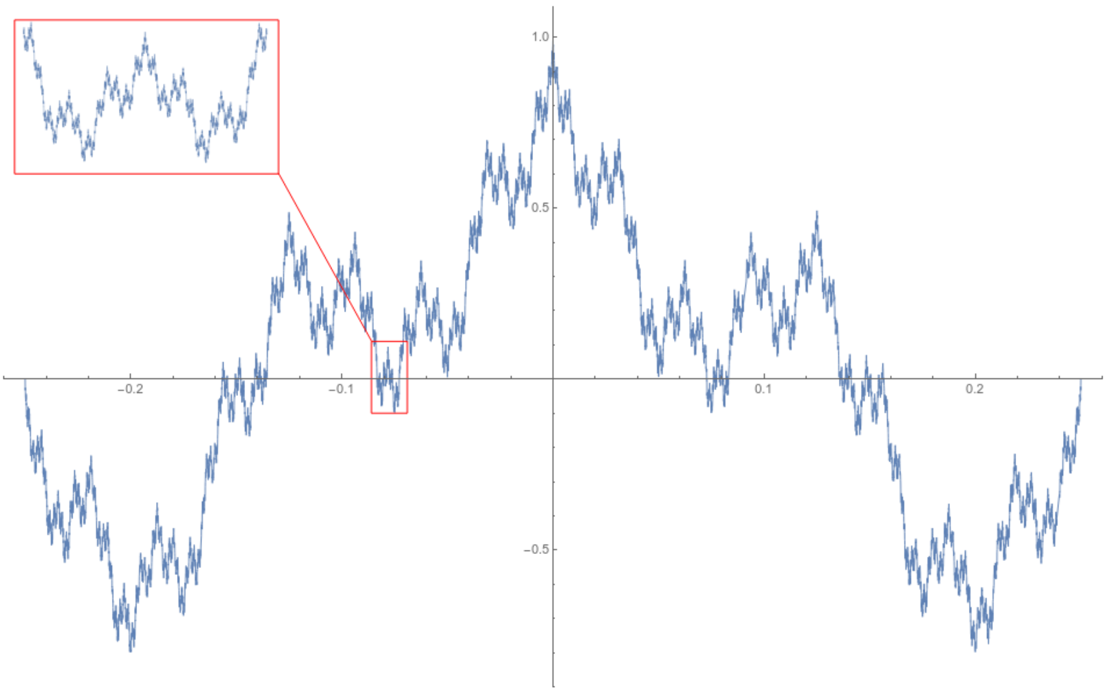
Je-li $n > m$, potom $4^n \delta_m = \pm 4^{n-m}/2$ je sudé číslo, a proto je $\gamma_n = 0$ z 2-periodičnosti funkce ϕ. Je-li $n \leq m$, máme podle (6) nerovnost $|\gamma_n| \leq 4^m$. Speciálně pro $m = n$ platí v předchozí nerovnosti dokonce rovnost $|\gamma_m| = 4^m$, což plyne z definice δ_m. Z těchto pozorování dostaneme

$$\left| \frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m} \right| = \left| \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n \right| \geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = \frac{3^m + 1}{2}.$$

Konečně, uvážíme-li, že $\delta_m \to 0$ pro $m \to \infty$, vyplývá z odhadu výše, že

$$\limsup_{\delta \to 0} \left| \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \right| = \infty.$$

Tedy f není diferencovatelná v bodě x. □



Obrázek 1: Graf Weierstrassovy funkce s $a = 1/2$ a $b = 4$.

1.5 Mocninné řady

Mocninné řady jsou speciální případ funkčních řad, který si zasluhuje zvláštní pozornost. *Mocninnou řadou* rozumíme funkční řadu s členy $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$, kde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$, tzn. řadu tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Čtenář by měl být v tuto chvíli již se základními vlastnostmi mocninných řad seznámen. Úvodní část tohoto výkladu bude tedy spíše opakováním. V druhé části výkladu nám půjde zejména o speciální důsledky vyplývající z partií o stejnoměrné konvergenci.

Věta 1.38 (Cauchy–Hadamard)**:** Buďte $z_0 \in \mathbb{C}$ a $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ komplexní posloupnost. Položme

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}},$$

kde speciálně klademe

$$R := \begin{cases} 0, & \text{je-li } \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \infty, \\ \infty, & \text{je-li } \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0. \end{cases}$$

Potom mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konverguje absolutně, pokud $|z-z_0| < R$ a diverguje, pokud $|z-z_0| > R$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme položit $z_0 := 0$.

Předpokládejme nejdříve, že $R \in (0,\infty)$. Uvažujme fixní $z \in \mathbb{C}$ s $|z| < R$. Označme na chvíli $r := |z|$. Protože je $r < R$, existuje $\delta > 0$ tak, že $r + \delta < R$. Jelikož máme

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R} < \frac{1}{r+\delta},$$

existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je

$$|a_n|^{1/n} < \frac{1}{r+\delta},$$

nebo-li

$$|a_n| < \frac{1}{(r+\delta)^n}.$$

Odtud máme

$$|a_n z^n| \leq \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^n,$$

a proto řada $\sum_{n=0}{}^{\infty} |a_n z^n|$ konverguje podle srovnávacího kritéria.

Nyní zafixujme $z \in \mathbb{C}$ s $|z| > R$. Potom

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R} > \frac{1}{|z|},$$

a proto existuje nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$ takových, že $|a_n||z|^n > 1$. Z toho plyne, že posloupnost s členy $a_n z^n$ nekonverguje k 0, a tudíž řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverguje.

Nakonec si stačí rozmyslet, že první část důkazu lze zreprodukovat i pokud $R = \infty$ a podobně druhou pro případ, že $R = 0$. Tím je platnost tvrzení ověřena i pro krajní hodnoty $R = 0$ a $R = \infty$. □

Definice 1.39 (Poloměr konvergence, obor konvergence)**:** Číslo $R \in [0, \infty]$ z Věty 1.38 nazýváme *poloměr konvergence* mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Dále *oborem konvergence* mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ nazýváme množinu

$$B = B\left(z_0, \{a_n\}_{n=0}^{\infty}\right) := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \text{řada } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ konverguje} \right\}.$$

Z Věty 1.38 vyplývá, že obor konvergence mocninné řady splňuje

$$B_{z_0}(R) \subset B \subset \overline{B}_{z_0}(R),$$

kde jsme označili

$$B_{z_0}(R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\} \quad \text{a} \quad \overline{B}_{z_0}(R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\}.$$

V bodech na hraniční kružnici $\overline{B}_{z_0}(R) \setminus B_{z_0}(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$ mocninná řada konvergovat může, ale nemusí. V komplexním oboru je otázka konvergence mocninné řady v bodech na hraniční kružnici poměrně složitá a nad rámec tohoto kurzu, viz např. [23, Kap. 16].

Omezíme-li se jen na reálné body, je oborem konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

jeden z intervalů

$$(x_0 - R, x_0 + R), \quad [x_0 - R, x_0 + R), \quad (x_0 - R, x_0 + R] \quad \text{a} \quad [x_0 - R, x_0 + R].$$

K vyšetření konvergence mocninné řady v krajních bodech $x_0 \pm R$ je zpravidla možné použít jemnější kritéria pro konvergenci číselných řad známá z 1. ročníku. Variabilitu chování mocninných řad na hranici oboru konvergence ilustrují následující příklady.

Příklad 1.40:

a) Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ je $R = \infty$.

b) Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ je $R = 0$.

c) Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ je $R = 1$. Ve všech bodech kružnice $|z| = 1$ řada diverguje, neboť posloupnost $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ nekonverguje k nule.

d) Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ je $R = 1$. V bodě $z = 1$ řada diverguje jako harmonická řada. V bodě $z = -1$ řada konverguje např. podle Leibnitzova kritéria. Aplikací Dirichletova kritéria lze ukázat, že řada konverguje ve všech bodech kružnice $|z| = 1$ kromě bodu $z = 1$.

e) Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ je $R = 1$. Ve všech bodech kružnice $|z| = 1$ řada konverguje, neboť ji lze majorizovat konvergentní řadou $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Nyní obrátíme svou pozornost na studium stejnoměrné konvergence mocninných řad a její důsledky.

Věta 1.41: Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ s poloměrem konvergence $R > 0$ konverguje stejnoměrně na $\overline{B}_{z_0}(r)$ pro každé $0 < r < R$. Speciálně mocninná řada konverguje lokálně stejnoměrně na $B_{z_0}(R)$.

Důkaz. Zvolme $r \in (0, R)$. Potom

$$|a_n(z-z_0)^n| \leq |a_n|r^n$$

pro všechna $z \in \overline{B}_{z_0}(r)$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Z Věty 1.38 plyne, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n$ konverguje. Tudíž řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konverguje stejnoměrně na $\overline{B}_{z_0}(r)$ podle Weierstrassova kritéria (Věta 1.26). □

Pokud mocninná řada konverguje v bodě na hranici oboru konvergence, lze tvrzení o stejnoměrné konvergenci mocninné řady z Věty 1.41 rozšířit. V reálném oboru se tak dostáváme k následují Abelově větě.

Věta 1.42 (Abel)**:** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R \in (0, \infty)$. Konverguje-li tato řada v bodě $x_0 + R$ resp. $x_0 - R$, potom konverguje stejnoměrně na intervalu $[x_0, x_0 + R]$ resp. $[x_0 - R, x_0]$.

Důkaz. Větu dokážeme aplikací Abelova kritéria. Předpokládejme např., že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje v bodě $x_0 + R$. Potom řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konverguje. Navíc máme

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \sup_{x_0\leq x\leq x_0+R} \frac{|x-x_0|^n}{R^n} \leq 1.$$

Nyní stačí aplikovat Abelovo kritérium na řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n.$$

□

Poznámka: Podobnou ideou jako v důkazu Věty 1.42 lze dokázat, že *mocninná řada konverguje stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině jejího oboru konvergence.*

Věta 1.43: Součtová funkce mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ s poloměrem konvergence $R > 0$ je spojitá na $B_{z_0}(R)$.

Důkaz. Věta je okamžitým důsledkem Vět 1.41 a 1.34. □

Tvrzení Věty 1.43 lze také rozšířit i na hraniční body jejího oboru konvergence. Omezíme-li se na reálné mocninné řady, dostaneme klasickou větu, které opět nese jméno Nielse Henrika Abela.

Věta 1.44 (Abel): Buď $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ mocninná řada s poloměrem konvergence $R \in (0, \infty)$. Konverguje-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ v bodě $x_0 + R$ resp. v bodě $x_0 - R$, potom její součtová funkce s je spojitá v bodě $x_0 + R$ zleva resp. v bodě $x_0 - R$ zprava, tzn.

$$s(x_0 + R) = \lim_{x \to (x_0+R)-} s(x) \quad \text{resp.} \quad s(x_0 - R) = \lim_{x \to (x_0-R)+} s(x).$$

Důkaz. Vyplývá z Abelovy Věty 1.42 a Věty 1.34. □

Poznámka: Věty 1.43 a 1.44 implikují následující tvrzení pro reálné mocninné řady: *Součtová funkce mocninné řady je spojitá na svém oboru konvergence vzhledem k tomuto oboru.* Nicméně toto tvrzení zůstává v platnosti i pro komplexní mocninné řady.

Příklad 1.45: Abelovu Větu 1.44 lze použít ke sčítání číselných řad. Připomeneme-li si známé Taylorovy rozvoje elementárních funkcí, dostaneme např. součty:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x \to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \lim_{x \to 1-} \ln(1+x) = \ln 2$$

nebo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \lim_{x \to 1-} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}.$$

Věta 1.46: Nechť s je součtová funkce mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s oborem konvergence B. Potom pro každý interval $[a, b] \subset B$ platí:

$$\int_a^b s(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(b-x_0)^{n+1} - (a-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Důkaz. Z Vět 1.41 a 1.42 vyplývá, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje stejnoměrně na libovolném intervalu $[a, b] \subset B$. Tvrzení je proto důsledek Věty 1.35. □

Věta 1.47: Součtová funkce s mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s poloměrem konvergence $R > 0$ je diferencovatelná v každém bodě $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ a platí:

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

pro každé $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Důkaz. Podle předpokladu a Věty 1.38 je

$$\limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}.$$

Odtud plyne, že poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-x_0)^n$$

je také R, neboť

$$\limsup_{n\to\infty} |(n+1)a_{n+1}|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} |n+1|^{1/n} \limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}|^{1/n} = \frac{1}{R}.$$

Potom podle Věty 1.41 řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ konverguje lokálně stejnoměrně na $(x_0 - R, x_0 + R)$, a proto můžeme aplikovat Větu 1.36, která již implikuje tvrzení. $\square$

Poznámka: Věta 1.47 platí i pro komplexní mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, kde interval $(x_0 - R, x_0 + R)$ je nahrazen množinou $B_{z_0}(R)$ a derivaci $s'(z)$ chápeme v komplexním smyslu.

Mocninnou řadu můžeme tedy na vnitřku oboru konvergence derivovat člen po členu a výsledkem je opět mocninná řada se stejným poloměrem konvergence. Větu 1.47 můžeme aplikovat opakovaně a zjistíme tak, že součtová funkce s má na $(x_0 - R, x_0 + R)$ derivace všech řádů a pro n-tou derivaci platí:

$$s^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)a_k(x-x_0)^{k-n}, \qquad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Dosadíme-li $x = x_0$ do této rovnosti dostaneme vztah mezi koeficienty mocninné řady a její součtové funkce:

$$a_n = \frac{s^{(n)}(x_0)}{n!}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Funkce f, která má na intervalu (a,b) derivace všech řádů se nazývá *hladká* na (a,b) a množinu všech hladkých funkcí na (a,b) značíme $C^\infty(a,b)$. Součtová funkce mocninné řady je tedy hladká funkce na vnitřku oboru konvergence.

Definice 1.48 (Taylorova řada)**:** Nechť funkce f má v bodě z_0 derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou* funkce f se středem v bodě z_0.

Z předchozí diskuze je jasné, že každá mocninná řada s kladným poloměrem konvergence je Taylorovou řadou své součtové funkce. Zamysleme se nad opačným problémem, tj. zda se součtová funkce Taylorovy řady hladké funkce f se středem v x_0, která má kladný poloměr konvergence, rovná funkci f alespoň na nějakém okolí x_0. Za chvíli uvidíme na konkrétním příkladu, že to obecně pravda není. Hladkost totiž k takové vlastnosti nestačí a dostáváme se tak k pojmu *reálně analytická funkce.*

Definice 1.49 (Reálně analytická funkce)**:** Buďte $-\infty \le a < b \le \infty$ a $f \in C^\infty(a,b)$. Funkci f nazýváme *reálně analytickou* na (a,b), pokud ke každému $x_0 \in (a,b)$ existuje okolí H_{x_0} tak, že

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad \forall x \in H_{x_0},$$

tj. f je součtovou funkcí své Taylorovy řady se středem v x_0 na H_{x_0}. Množinu reálně analytických funkcí na (a,b) značíme $C^\omega(a,b)$.

Z definice je zřejmé, že $C^\omega(a,b) \subset C^\infty(a,b)$, ovšem tato inkluze není rovnost. To znamená, že existují funkce, které jsou hladké, ale nejsou reálně analytické. Ukážeme si to na následujícím klasickém příkladě.

Příklad 1.50: Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{pro } x \neq 0 \\ 0, & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Nejprve ověříme, že $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Zřejmě má f derivace všech řádů v bodech $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Stačí si tedy rozmyslet, že je tomu tak i v bodě $x = 0$. Nejprve se jednoduše matematickou indukcí ověří, že

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

kde p_n je polynom stupně $3n$ (ověřte). Ve výpočtech užijeme toho, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^k}\, e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

(víte proč?) z čehož vyplývá, že

$$\lim_{x \to 0} p\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

pro libovolný polynom p.

Matematickou indukcí ověříme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ má f v bodě $x = 0$ derivaci řádu n a platí $f^{(n)}(0) = 0$. Je-li $n = 1$, máme

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Dále pro $n \in \mathbb{N}$ předpokládejme, že $f^{(n)}(0) = 0$. Potom

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\, p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Tím jsme dokázali, že $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Protože $f^{(n)}(0) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, je součtová funkce Taylorovy řady funkce f se středem v bodě 0 identicky nulová funkce. Funkce f ale není identicky nulová na žádném okolí bodu 0, a proto f není reálně analytická na žádném intervalu (a,b) obsahujícím bod 0. Speciálně $f \notin C^\omega(\mathbb{R})$.

Existují dokonce hladké funkce, jejichž Taylorova řada má nulový poloměr konvergence, tzn. je divergentní všude mimo svůj střed.

Příklad 1.51: Funkce definovaná vztahem

$$f(x) := \int_0^\infty e^{-t} \cos(xt^2) \mathrm{d}t$$

je hladká na $\mathbb{R}$. K ověření tohoto tvrzení potřebujeme tzv. Větu o derivaci, která uvádí postačující podmínku pro záměnu derivace a integrálu a bude dokázána až mnohem později (viz Věta 5.48). Nicméně z této věty vyplývá, že f má na $\mathbb{R}$ derivace všech řádu a vzorec pro n-tou derivaci dostaneme derivováním funkce v integrálu podle x. Vyjde nám

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \int_0^\infty t^{4n} e^{-t} \cos(xt^2) \mathrm{d}t$$

a

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^\infty t^{4n+2} e^{-t} \sin(xt^2) \mathrm{d}t$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je $f^{(2n+1)}(0) = 0$ a

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \int_0^\infty t^{4n} e^{-t} \mathrm{d}t = (-1)^n (4n)!,$$

kde poslední rovnost lze ověřit integrací per partes. Proto Taylorova řada f se středem v bodě 0 je mocninná řada

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (4n)!}{(2n)!} x^{2n},$$

jejíž poloměr konvergence je 0, neboť

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(2n)!}} = \infty,$$

(ověřte).

Jak tedy poznat, jestli je zadaná hladká funkce reálně analytická? Opravdu užitečný aparát nabízí teorie funkcí komplexní proměnné, který je mimo rámec tohoto kurzu. Další možnost nabízí Taylorova věta, kterou čtenář zná z 1. ročníku. Předpokládejme pro jednoduchost, že f je daná hladká funkce na $\mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{R}$. Předpokládejme dále, že Taylorova řada funkce f se středem v bodě x_0 má poloměr konvergence $R > 0$. Z Taylorovy věty plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ je

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x),$$

kde T_n je n-tý částečný součet Taylorovy řady (Taylorův polynom)

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

a R_{n+1} je zbytek v Taylorově vzorci po n-tém Taylorově polynomu. Odtud plyne, že pro $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ je

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

právě když $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$. V konkrétních případech lze využít např. Langrangeova tvaru zbytku

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

kde ξ je bod ležící na spojnici bodů x a x_0 k ověření, že $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$. Tento postup by měl být znám z 1. ročníku. Lze tak získat Taylorovy řady elementárních funkcí, viz Cvičení 1.9.

Nakonec si uvedeme jednu charakteristiku reálně analytických funkcí. Dokážeme si však jen jednu implikaci, kterou lze jednoduše ukázat prostředky reálné analýzy. Obvyklý důkaz druhé implikace používá tzv. Cauchyův integrální vzorec, který je klasickým výsledkem z komplexní analýzy, avšak mimo rámec tohoto kurzu, viz např. [23].

Věta 1.52: Buďte $-\infty \le a < b \le \infty$ a $f \in C^\infty(a,b)$. Potom $f \in C^\omega(a,b)$, právě když

$$(\forall x_0 \in (a,b))(\exists H_{x_0} \text{ okolí } x_0)(\exists C > 0)(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left(\sup_{x\in H_{x_0}} |f^{(n)}(x)| \le C^{n+1} n!\right).$$

Poznámka: Alternativně můžeme podmínku z Věty 1.52 vyjádřit také takto:

$$(\forall [\alpha,\beta] \subset (a,b))(\exists C > 0)(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left(\sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f^{(n)}(x)| \le C^{n+1} n!\right).$$

Důkaz postačující podmínky z Věty 1.52. Uvažujme $f \in C^\infty(a,b)$ a zvolme libovolné $x_0 \in (a,b)$. Podle předpokladu pak existuje $H_{x_0} \subset (a,b)$ okolí x_0 a konstanta $C > 0$ tak, že

$$\sup_{x\in H_{x_0}} |f^{(n)}(x)| \le C^{n+1} n!$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Ukážeme, že f je součtovou funkcí své Taylorovy řady se středem v x_0 na okolí bodu x_0.

Nejprve si všimneme, že Taylorova řada funkce f se středem v x_0 má kladný poloměr konvergence, neboť její n-tý člen můžeme odhadnout

$$\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right| \le C^{n+1}|x-x_0|^n.$$

Ze srovnávacího kritéria potom plyne, že pro každé $x \in H_{x_0}$ splňující $|x-x_0| < 1/C$ je Taylorova řada funkce f se středem v x_0 konvergentní. Její poloměr konvergence je tedy alespoň $1/C$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že

$$H_{x_0} \subset \left(x_0 - \frac{1}{2C}, x_0 + \frac{1}{2C}\right),$$

jinak bychom vzali menší okolí H_{x_0} tak, aby to platilo.

Podle diskuze nad tvrzením nyní stačí ukázat, že pro každé $x \in H_{x_0}$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0,$$

kde R_{n+1} je zbytek v Taylorově vzorci po n-tém Taylorově polynomu funkce f. K tomu použijeme Lagrangeův tvar zbytku:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

kde ξ je bod ležící na spojnici bodů x a x_0. Je-li $x \in H_{x_0}$, potom také $\xi \in H_{x_0}$ a navíc $|x - x_0| < 1/(2C)$. Proto můžeme odhadovat

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leq \frac{C^{n+2}(n+1)!}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2C}\right)^{n+1} = \frac{C}{2^{n+1}}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a $x \in H_{x_0}$. Jelikož výraz napravo konverguje k nule pro $n \to \infty$, je také $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ pro všechna $x \in H_{x_0}$. $\square$

Uveďme už jen jako poznámku několik tvrzení, které dokreslují komplikovanost vztahu hladkých a reálně analytických funkcí. Zaujatý čtenář najde důkazy v uvedených referencích.

Poznámka: 1. Už v roce 1895 E. Borel dokázal, že existuje hladká funkce s libovolně předepsanou posloupností derivací v jednom bodě. Tzn., že k libovolné posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ existuje funkce $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ taková, že $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(f^{(n)}(0) = a_n)$. Jednoduchý důkaz lze nalézt např. v článku [21]. Toto tvrzení dává tušit, že je mnoho hladkých funkcí, které nejsou reálně analytické.
2. Příklad 1.51 ukazuje hladkou funkci, jejíž Taylorova řada se středem v bodě 0 má nulový poloměr konvergence. Existuje příklad hladké funkce, jejíž Taylorova řada se středem v libovolném $x_0 \in \mathbb{R}$ má nulový poloměr konvergence. S pomocí Baireovy věty byl příklad zkonstruován v [18], více explicitní konstrukci lze najít v [5].
3. Z postačujících podmínek uveďme zajímavou *Bernsteinovu větu*: Je-li $f \in C^{\infty}(a,b)$ a

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall x \in (a,b))(f^{(n)}(x) \geq 0),$$

potom $f \in C^{\omega}(a,b)$. Odtud např. plyne, že $f(x) = \exp(x)$ je reálně analytická na $\mathbb{R}$. Bersteinovu větu lze zobecnit tak, že pokud pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ nemění $f^{(n)}$ znaménko na (a,b) (ale znaménka mohou být různá pro různá n), potom $f \in C^{\omega}(a,b)$. Elementární důkaz lze najít v [17].
4. Příklad 1.50 ukazuje hladkou funkci f, jejíž Taylorova řada se středem v bodě 0 má kladný poloměr konvergence, ale nekonverguje k f na žádném okolí 0. Pro jakýkoliv jiný střed $x_0 \neq 0$ by již shoda na nějakém okolí x_0 nastala. Ukazuje se, že je-li pro každé $x_0 \in (a,b)$ poloměr konvergence Taylorovy řady $f \in C^{\infty}(a,b)$ se středem v x_0 kladný, potom existuje podinterval $(c,d) \subset (a,b)$ takový, že $f \in C^{\omega}(c,d)$. S pomocí Bairovy věty lze potom ukázat, že množina středů x_0, v nichž se součtová funkce Taylorovy řady $f \in C^{\infty}(a,b)$ liší od f na každém okolí x_0, je všude řídká podmnožina (a,b), tj. její uzávěr má prázdný vnitřek [3, str. 192].
5. Pokud bychom zkoumali v Příkladu 1.50 poloměr konvergence R jako funkci středu $R = R(x_0)$, zjistili bychom, že $R(x_0) \to 0$ pro $x_0 \to 0$. Pokud ale pro $f \in C^{\infty}(a,b)$ platí, že

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a,b))(R(x) \geq \delta),$$

je $f \in C^\omega(a,b)$. Toto tvrzení pravděpodobně jako první vyslovil A. Pringsheim již v roce 1893. Ovšem předložil důkaz s netriviální chybou. Nicméně tvrzení je pravdivé a korektní důkazy byly později nalezeny. Jeden takový důkaz i zobecnění této věty najde čtenář v článku [4].

Ve Cvičení 1.5 jsme naznačili, že řady (ne nutně mocninné) lze mezi sebou násobit. Na závěr této části si ukážeme, že mocninné řady můžeme za jistých předpokladů také dělit. Uvažujme dvě mocninné řady obě s kladným poloměrem konvergence:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{a} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Součtové funkce f a g jsou tedy definovány na nějakých kruzích se středem v počátku. Předpokládejme dále, že $g(0) \neq 0$, tzn. $b_0 \neq 0$. Potom je funkce

$$h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$$

dobře definovaná na nějakém okolí počátku. Navíc lze ukázat, že h je součtovou funkcí své Taylorovy řady, která má kladný poloměr konvergence. Elegantní argument k důkazu tohoto tvrzení je opět předmětem komplexní analýzy, kde se ukazuje jednoduchý vztah mezi možností rozvoje funkce do Taylorovy řady a komplexní diferencovatelností. Zde přijmeme jako fakt, že funkci h lze na okolí počátku napsat ve tvaru mocninné řady

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

s kladným poloměrem konvergence. Naším cílem bude najít vztah pro neznámé koeficienty c_n.

Dosadíme-li do rovnosti $f(z) = g(z)h(z)$ příslušné mocninné řady, dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} b_m c_{n-m} \right) z^n.$$

Jelikož koeficienty mocninné řady s kladným poloměrem konvergence jsou určeny jednoznačně (její součtovou funkcí), vyplývá z poslední rovnice, že koeficienty u odpovídajících mocnin z musí být stejné, tj.

$$a_n = \sum_{m=0}^{n} b_m c_{n-m}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{7}$$

Rovnice (7) určuje koeficienty c_n rekurzivně:

$$c_n = \frac{1}{b_0} \left(a_n - \sum_{m=1}^{n} b_m c_{n-m} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

protože $b_0 \neq 0$ podle předpokladu. Napočítáme-li první tři koeficienty, dostaneme

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{b_0}, \\ c_1 &= \frac{1}{b_0}(a_1 - b_1 c_0) = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2}, \\ c_2 &= \frac{1}{b_0}(a_2 - b_1 c_1 - b_2 c_0) = \frac{a_0 b_1^2 - a_0 b_0 b_2 - a_1 b_0^2 b_1 + a_2 b_0^2}{b_0^3}. \end{aligned}$$

Snadno se ověří, že c_n je obecně funkcí koeficientů $a_0, \ldots, a_n$ a $b_0, \ldots, b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Ve vzácných případech, je možné najít explicitní vzorec pro c_n, většinou ale zůstane u rekurzivní formule. Ukážeme si to na následujícím příkladě.

Příklad 1.53: Najdeme Taylorovu řadu funkce

$$h(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

dodefinovanou spojitě v počátku, tj. $h(0) = 1$. Funkci h lze chápat jako převrácenou funkci

$$g(z) := \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

a proto v předchozím výkladu o dělení mocninných řad položíme $f(z) := 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Odtud pro koeficienty Taylorových řad funkcí f a g se středem v počátku dostaneme

$$a_n = \delta_{n,0} \quad \text{a} \quad b_n = \frac{1}{(n+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Dosadíme-li do rovnice (7), vyjde nám, že $c_0 = 1$ a

$$0 = \sum_{m=0}^{n} \frac{c_{n-m}}{(m+1)!} = \sum_{m=0}^{n} \frac{c_m}{(n-m+1)!}, \quad \text{je-li } n \in \mathbb{N}.$$

Napíšeme-li $c_n = B_n/n!$, dostaneme posloupnost $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ určenou rekurentně rovnicemi

$$B_0 = 1 \quad \text{a} \quad \sum_{m=0}^{n} \binom{n+1}{m} B_m = 0 \quad \text{pro } n \in \mathbb{N},$$

neboli

$$B_0 = 1 \quad \text{a} \quad B_{n+1} = -\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n+1}{m} B_m \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Členy posloupnosti $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou tzv. *Bernoulliova čísla*:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad \text{atd.}$$

Celkem je tedy

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

na nějakém okolí počátku. Bez bližší znalosti asymptotického chování B_n pro $n \to \infty$, nemůžeme určit poloměr nalezené mocninné řady z Věty 1.38. Jednoduchou odpověď nabídne opět až komplexní analýza, odkud vyplyne, že poloměr konvergence je roven absolutní hodnotě nenulového řešení rovnice $e^z = 1$, které je nejblíž počátku. Tato řešení jsou $\pm 2\pi \mathrm{i}$, a proto je hledaný poloměr konvergence roven 2π.

Příklad 1.54: Předchozí příklad můžeme využít k nalezení Taylorova rozvoje funkce

$$f(z) = \frac{z}{2} \coth \frac{z}{2},$$

dodefinovanou spojitě v počátku hodnotou $f(0) = 1$, neboť

$$\frac{z}{2} \coth \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \left(\frac{2}{e^z - 1} + 1 \right) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2}.$$

Odtud a z výsledku předchozího příkladu dostaneme

$$f(z) = \frac{z}{2} \coth \frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n + \frac{z}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

a tato rovnost platí na kruhu $|z| < 2\pi$. Protože je funkce f sudá, musí být koeficienty její Taylorovy řady u lichých mocnin z rovny nule (rozmyslete). A proto z rozvoje f plyne, že $B_{2n+1} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Celkem tedy

$$\frac{z}{2} \coth \frac{z}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \tag{8}$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 2\pi$.

1.6 Trigonometrické řady

Definice 1.55 (Trigonometrické řady)**:** Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou reálné posloupnosti a $T > 0$. Řadu tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right)$$

nazýváme *trigonometrická řada s periodou* $2T$.

Poznámka: Všimněte si, že pokud trigonometrická řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, je její součtová funkce periodická s periodou $2T$. Při studiu trigonometrických řad se často omezíme na speciální případ $T = \pi$, neboť rozdíl mezi obecným a tímto speciálním případem není zásadní a vzorce pro $T = \pi$ mají jednodušší tvar.

Analýzu trigonometrických řad inicioval Jean-Baptiste Joseph Fourier na počátku 19. století. Ve svém článku z roku 1822 hledal řešení rovnice vedení tepla právě ve tvaru trigonometrické řady. V tomto článku se také objevila obecná domněnka, že každou periodickou a spojitou funkci lze rozvinout v trigonometrickou řadu. Protože ani základní pojmy jako funkce, spojitost, integrál, atd. nebyly v této době ještě jasně ukotveny, nebyly ani Fourierovy závěry dokázány zcela rigorózně. Nicméně Fourierova práce a jeho myšlenky odstartovaly výzkum, který má dnes mnoho aplikací a který přispěl zásadním způsobem k formování moderní analýzy.

Naším hlavním cílem bude vyjasnit si, co to znamená rozvinout funkci v trigonometrickou řadu a alespoň částečně vysvětlit, jaké funkce lze rozvíjet.

Nejprve najdeme vztah mezi koeficienty a_n a b_n trigonometrické řady a její součtovou funkcí F - tzv. *Eulerovy vzorce*. Pro tento účel předpokládejme, že trigonometrická řada s periodou 2π konverguje stejnoměrně na $[-\pi, \pi]$ k součtové funkci F. Máme tedy

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{9}$$

pro $x \in [-\pi, \pi]$. Předpoklad stejnoměrné konvergence trigonometrické řady použijeme později pro ospravedlnění záměny integrálu a sumy. Nejprve ale budeme potřebovat následující jednoduché integrální identity.

Lemma 1.56: Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x = \pi\delta_{m,n}.$$

a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0.$$

Důkaz. Je přenechán čtenáři jako Cvičení 1.10. □

Vynásobíme-li obě strany rovnice (9) funkcí $\cos(mx)$, kde $m \in \mathbb{N}_0$ a integrujeme od $-\pi$ do π, dostaneme

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} & F(x)\cos(mx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\sin(nx)\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

Záměnu integrálu a sumy ospravedlňuje předpoklad stejnoměrné konvergence a Věta 1.35. Protože skoro všechny integrály napravo jsou nulové podle Lemma 1.56, výraz se značně zjednoduší. Pro každé $m \in \mathbb{N}_0$ tak dostaneme rovnost

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(mx)\mathrm{d}x = \pi a_m,$$

neboli první Eulerovy vzorce:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(mx)\mathrm{d}x, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Zcela analogickým postupem, kdy vynásobíme (9) funkcí $\sin(mx)$, kde $m \in \mathbb{N}$, a zintegrujeme od $-\pi$ do π, odvodíme druhé Eulerovy vzorce:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(mx)\mathrm{d}x, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Odvození Eulerových vzorců lze jednoduše zobecnit na případ s obecnou periodou $T > 0$. Toto pozorování je motivací pro následující definici *Fourierovy řady* funkce. Pro zestručnění zápisu si ještě označme symbolem $\mathcal{R}(a,b)$ prostor funkcí, které mají absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na intervalu (a,b).

Definice 1.57 (Fourierova řada)**:** Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $b - a = 2\pi$. Trigonometrickou řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

s koeficienty a_n a b_n určenými Eulerovými vzorci:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

nazýváme *Fourierova řada funkce f na intervalu* (a,b).

Poznámka: Fourierova řada funkce $f \in \mathcal{R}(a,b)$ na obecném omezeném intervalu (a,b) délky $b - a = 2T > 0$ je trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{n\pi x}{T}\right),$$

kde

$$a_n = \frac{1}{T}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\mathrm{d}x, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_n = \frac{1}{T}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\mathrm{d}x, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poznámka (Komplexní formulace)**:** Někdy se používá komplexní formulace trigonometrické řady ve tvaru dvojitě nekonečné sumy

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{\mathrm{i}k\pi x}{T}},$$

kde $c_k \in \mathbb{C}$. Protože

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{T}} &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{T}} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-\frac{ik\pi x}{T}} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + c_{-k}) \cos \frac{k\pi x}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{i}\,(c_k - c_{-k}) \sin \frac{k\pi x}{T},\end{aligned}$$

je mezi koeficienty a_k, b_k a c_k jednoduchý vztah:

$$c_0 = 2a_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

a naopak

$$a_0 = \frac{c_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - \mathrm{i}b_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + \mathrm{i}b_k}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Eulerovy vzorce pak mají kompaktní podobu

$$c_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-\frac{ik\pi x}{T}} \mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ačkoliv je komplexní formulace elegantní, my v tomto textu budeme striktně používat jen reálnou formulaci.

Při odvozování Eulerových vzorců jsme pozorovali, že stejnoměrně konvergentní trigonometrická řada na $[-\pi, \pi]$ (či obecněji na $[a, b]$) je Fourierovou řadou své součtové funkce. Přirozeně se nabízí minimálně dvě otázky: Jaké jsou to vlastně funkce, jejichž Fourierova řada bodově/stejnoměrně konverguje na $[-\pi, \pi]$? A je v takovém případě součtová funkce konvergentní Fourierovy řady rovna původní funkci? Účelem další části textu bude zodpovědět tyto otázky alespoň částečně.

Věta 1.58 (Dirichlet)**:** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $b - a = 2\pi$ a $f \in \mathcal{R}(a, b)$ je 2π-periodická. Potom máme:

1. Pro n-tý částečný součet F_n Fourierovy řady funkce f na (a, b) platí:

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x - t) \mathrm{d}t$$

   pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, kde

$$D_n(t) := \frac{\sin\left((n + 1/2)t\right)}{\sin\left(t/2\right)}$$

   je tzv. *Dirichletovo jádro.*

2. Fourierova řada f na (a, b) konverguje v bodě $x \in \mathbb{R}$ k číslu $s \in \mathbb{R}$, právě když

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\pi} \left(\frac{f(x + t) + f(x - t)}{2} - s \right) D_n(t) \mathrm{d}t = 0.$$

Důkaz. 1. Podle Cvičení 1.8 je

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin(tn/2)\cos(t(n+1)/2)}{\sin(t/2)} = \frac{\sin((n+1/2)t) - \sin(t/2)}{2\sin(t/2)},$$

neboli

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{1}{2} D_n(t). \tag{10}$$

Nyní pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ dostáváme přímým výpočtem, že

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b (\cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx))\, f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(x-t))\right) f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Ve výpočtu jsme využili identitu (10) a fakt, že pro integrabilní 2π-periodickou funkci g platí rovnost

$$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\mathrm{d}t.$$

2. Rovnost z tvrzení 1. můžeme dále upravit do tvaru

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau)D_n(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

a využijeme-li opět toho, že integrand je 2π-periodická funkce, dostaneme

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)D_n(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Vezmeme-li také do úvahy, že D_n je sudá funkce, můžeme výraz ještě dále upravit

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} f(x+t)D_n(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} f(x-t)D_n(-t)\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t))\, D_n(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Integrováním rovnice (10) snadno ověříme, že

$$\int_0^{\pi} D_n(t)\mathrm{d}t = \pi.$$

Celkem tedy získáváme pro každé $x, s \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ rovnost

$$F_n(x) - s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s\right) D_n(t)\mathrm{d}t,$$

z čehož plyne tvrzení 2. $\square$

Tvrzení 2. Věty 1.58 převádí vyšetřování konvergence Fourierovy řady na analýzu limity integrálu s Dirichletovým jádrem. K této analýze budeme potřebovat jedno pomocné, ale důležité tvrzení, které je speciálním případem věty známé jako *Riemannovo–Lebesgueovo lemma.*

Lemma 1.59 (Riemann)**:** Nechť $-\infty \le a < b \le \infty$ a $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Potom platí:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0.$$

Důkaz. Dokážeme tvrzení s funkcí sinus. Druhé tvrzení s funkcí kosinus se dokáže analogicky.

1) Nejprve předpokládejme, že $a, b \in \mathbb{R}$ a f je riemannovsky integrabilní na $[a,b]$. Zvolme $\epsilon > 0$. Potom existuje dělení σ intervalu $[a,b]$ tak, že

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - s_\sigma(f) < \frac{\epsilon}{2},$$

kde $s_\sigma(f)$ je dolní integrální součet f při rozdělení σ. Nyní můžeme zavést po částech konstantní funkci

$$s(x) := \sum_{i=1}^{k} m_i^{(f)} \chi_{[x_{i-1},x_i)}(x),$$

kde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ jsou body z rozdělení σ, $m_i^{(f)} = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i)} f(x)$ a $\chi_{[c,d)}$ značí charakteristickou funkci intervalu $[c,d)$. Pro takovou funkci zřejmě platí $s(x) \le f(x)$ pro každé $x \in [a,b]$ a

$$s_\sigma(f) = \int_a^b s(x)\mathrm{d}x.$$

Odtud dostáváme nerovnost

$$\int_a^b |f(x) - s(x)|\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b s(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - s_\sigma(f) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tvrzení věty platí pro funkci s, neboť

$$\int_a^b s(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} m_i^{(f)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i^{(f)} \left(\cos(nx_{i-1}) - \cos(nx_i)\right)$$

a výraz na pravé straně konverguje k nule pro $n \to \infty$. Proto existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$(\forall n \ge n_0)\left(\left|\int_a^b s(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| < \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Nakonec dostáváme

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x) - s(x)| \underbrace{|\sin(nx)|}_{\le 1} \mathrm{d}x + \left|\int_a^b s(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

pro každé $n \geq n_0$, z čehož plyne tvrzení věty.

2) Nyní předpokládejme, že $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ absolutně konverguje jako nevlastní Riemannův integrál s jediným kritickým bodem b. To lze předpokládat bez újmy na obecnosti, jinak bychom integrál rozložili na součet konečně mnoha integrálů tohoto typu a větu aplikovali na každý sčítanec.

Zvolme $\epsilon > 0$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\int_c^b |f(x)|\mathrm{d}x < \frac{\epsilon}{2}.$$

Podle již dokázaného bodu 1) je

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^c f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = 0,$$

a proto existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\left|\int_a^c f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Celkem tedy pro každé $n \geq n_0$ dostáváme

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_a^c f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_c^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Věta 1.60: Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $b - a = 2\pi$ a $f \in \mathcal{R}(a, b)$ je 2π-periodická. Potom Fourierova řada funkce f na (a, b) konverguje v bodě x k číslu $s \in \mathbb{R}$, právě když existuje $c \in (0, \pi)$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^c \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s\right) \operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2}\right) \sin(nt)\mathrm{d}t = 0.$$

Poznámka: Z tvrzení plyne tzv. *Riemannova věta o lokalizaci*: Konvergence Fourierovy řady funkce f i hodnota jejího součtu v bodě x závisí pouze na průběhu funkce f v bezprostředním okolí bodu x.

Důkaz Věty 1.60. Dirichletovo jádro můžeme zapsat ve tvaru

$$D_n(t) = \sin(nt) \operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(nt).$$

Z předpokladu vyplývá, že pro libovolné $x, s \in \mathbb{R}$ má funkce

$$t \mapsto \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s$$

absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na $(0, \pi)$, a proto podle Lemma 1.59 platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s \right) \cos(nt) \mathrm{d}t = 0.$$

Proto podle Věty 1.58 Fourierova řada funkce f na (a, b) konverguje v bodě x k číslu $s \in \mathbb{R}$, právě když

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s \right) \operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2}\right) \sin(nt) \mathrm{d}t = 0.$$

Ještě jednou můžeme aplikovat Lemma 1.59 tentokrát na funkci

$$t \mapsto \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s \right) \operatorname{cotg} \frac{t}{2},$$

která má absolutně konvergentní Riemannův integrál na intervalu (c, π) pro libovolné $c \in (0, \pi)$. Odtud plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^\pi \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s \right) \operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2}\right) \sin(nt) \mathrm{d}t = 0$$

pro každé $c \in (0, \pi)$ a tudíž k tomu, aby Fourierova řada funkce f na (a, b) konvergovala v bodě x k číslu $s \in \mathbb{R}$ je nutné a stačí, aby existovalo $c \in (0, \pi)$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^c \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s \right) \operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2}\right) \sin(nt) \mathrm{d}t = 0.$$

□

Věta 1.60 charakterizuje funkce jejichž Fourierova řada konverguje v nějakém bodě. Nicméně čtenář může vnímat toto tvrzení jen jako jisté přeformulování základního problému, které stále nedává zcela jasnou představu o tom, jaké to tedy vlastně jsou funkce, jejichž Fourierova řada bodově konverguje.

Následující *Diniho kritérium* je postačující podmínka bodové konvergence Fourierovy řady, která je již snadno aplikovatelná pro poměrně širokou třídu funkcí chovajících se „rozumně“ na okolí bodu x. Např. funkce $f \in \mathcal{R}(a, b)$, pro kterou existují čísla $c > 0$, $L > 0$ a $\alpha \in (0, 1]$ takové, že platí

$$(\forall t \in (0, c)) \left(|f(x+t) + f(x-t) - 2s| \leq Lt^\alpha \right),$$

vyhovují předpokladům Diniho kritéria, a proto Fourierova řada funkce f konverguje v bodě x k číslu s.

Věta 1.61 (Dini)**:** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $b - a = 2\pi$ a $f \in \mathcal{R}(a, b)$ je 2π-periodická. Existují-li $c \in (0, \pi)$ a $s \in \mathbb{R}$ tak, že konverguje integrál

$$\int_0^c \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2s|}{t} \mathrm{d}t,$$

potom Fourierova řada funkce f na (a, b) konverguje v bodě x k číslu s.

Důkaz. Z předpokladu věty vyplývá, že konverguje také integrál

$$\int_0^c |f(x+t) + f(x-t) - 2s| \operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t = \int_0^c \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2s|}{t} t \operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t,$$

protože funkce $t \mapsto t \operatorname{cotg}(t/2)$ je omezená riemannovsky integrabilní funkce na intervalu $(0, c)$. Aplikací Lemma 1.59 odtud dostaneme, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^c \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s\right) \operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2}\right) \sin(nt) \mathrm{d}t = 0$$

a tvrzení plyne z Věty 1.60. □

V dalším výkladu ještě více omezíme množinu studovaných funkcí f s cílem získat snadno aplikovatelnou postačující podmínku pro bodovou konvergenci Fourierovy řady funkce f v termínech spojitosti a diferencovatelnosti f. Před tím si ještě vyjasníme dva pojmy.

Definice 1.62 (Po částech spojitá funkce)**:** Řekneme, že funkce f je na omezeném intervalu $[a, b]$ *po částech spojitá*, právě když existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ intervalu $[a, b]$ takové, že

1. f je spojitá na (x_{i-1}, x_i) pro každé $i \in \hat{n}$.

2. Existují konečné jednostranné limity

$$f(x_i+) := \lim_{x\to x_i+} f(x) \quad \text{a} \quad f(x_i-) := \lim_{x\to x_i-} f(x),$$

   pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ a také $f(a+)$ a $f(b-)$.

Jak jsme již pozorovali, součtová funkce konvergentní trigonometrické řady s periodou $2T$ je $2T$-periodická funkce. To se odrazilo v předpokladech Vět 1.58, 1.60 a 1.61, kde jsme uvažovali 2π-periodické funkce, neboť jsme pro jednoduchost vzali $T = \pi$. Abychom mohli odvozená tvrzení použít i na funkce definované na omezeném intervalu, pomáháme si periodickým prodloužením. Toto prodloužení ještě navíc jistým způsobem regularizujeme v bodech nespojitosti. Důvod tohoto kroku se vyjasní ve Větě 1.64.

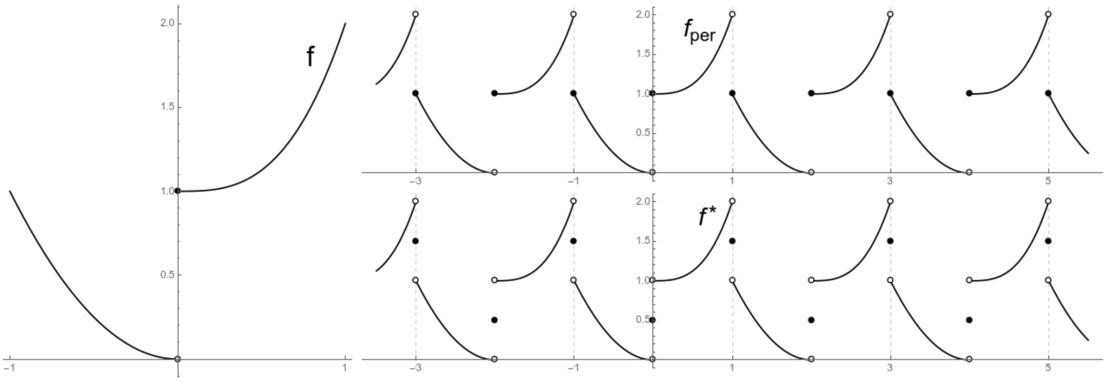
Definice 1.63 (Peridociké a regularizované periodické prodloužení)**:** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a f je funkce definovaná na $[a, b)$. *Periodickým prodloužením* f rozumíme funkci $f_{per} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$f_{per}(x) := f\left(x - \left[\frac{x-a}{b-a}\right](b-a)\right), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

kde $[y]$ je dolní celá část reálného čísla y. Je-li navíc f po částech spojitá na $[a, b]$, definujeme *regularizované periodické prodloužení* $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vztahem

$$f^*(x) := \frac{1}{2}\left(f_{per}(x+) + f_{per}(x-)\right).$$

Komplikovaně vypadající vzorce z předchozí definice mají jednoduchý význam. Graf funkce f_{per} vznikne „nakopírováním“ grafu funkce f definované na $[a, b)$ do každého intervalu $[a + n(b - a), b + n(b - a))$, $n \in \mathbb{Z}$. Graf regularizovaného periodického prodloužení f^* se liší od grafu f_{per} pouze v bodech nespojitosti f_{per}, kde hodnota funkce f^* je průměrem jednostranných limitních hodnot v tomto bodě, viz Obr. 2.



Obrázek 2: Graf funkce f (vlevo), jejího periodického prodloužení f_{per} (vpravo nahoře) a jejího regularizovaného periodického prodloužení f^* (vpravo dole).

Věta 1.64 (O bodové konvergenci Fourierovy řady)**:** Nechť funkce f má po částech spojitou derivaci na omezeném intervalu $[a, b]$. Potom Fourierova řada funkce f na (a, b) konverguje na $\mathbb{R}$ k funkci f^*.

Důkaz. Důkaz provedeme ve speciálním případě, kdy $b - a = 2\pi$. Modifikace pro obecnou situaci je přenechána čtenáři.

1) Nejprve ukážeme, že z předpokladu věty vyplývá, že je f po částech spojitá funkce na $[a, b]$ a tudíž má na $[a, b]$ absolutně konvergentní Riemannův integrál. Podle předpokladu má f po částech spojitou derivaci na $[a, b]$, což znamená, že existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ intervalu $[a, b]$ takové, že

1. f je spojitě diferencovatelná na (x_{i-1}, x_i) pro každé $i \in \hat{n}$.
2. Existují konečné jednostranné limity $f'(x_i\pm)$ pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ a také konečné jednostranné limity $f'(a+)$ a $f'(b-)$.

První bod implikuje, že f je spojitá na intervalu (x_{i-1}, x_i) pro každé $i \in \hat{n}$. Stačí tedy ukázat existenci a konečnost jednostranných limit v bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Zvolme pevně $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Zaměříme se např. na pravé okolí bodu x_i. Jelikož je f' spojitá na (x_i, x_{i+1}) a existují konečné limity $f'(x_i+)$ a $f'(x_{i+1}-)$, je f' omezená na (x_i, x_{i+1}), neboli

$$\sup_{x_i < x < x_{i+1}} |f'(x)| =: K < \infty.$$

Aplikujeme-li Lagrangeovu větu o přírůstku, dostaneme pro libovolné $y, z \in (x_i, x_{i+1})$ odhad

$$|f(y) - f(z)| = |f'(\xi)||y - z| \leq K|y - z|,$$

kde ξ je číslo mezi y a z. Nyní když k libovolnému $\epsilon > 0$ zvolíme $0 < \delta < \epsilon/K$, dostaneme pro každé y a z z pravého okolí bodu x_i takové, že $|y - z| < \delta$ nerovnost $|f(y) - f(z)| < \epsilon$. To je Bolzanova–Cauchyho podmínka implikující existenci a konečnost $f(x_i+)$. Analogicky se ověří existence a konečnost $f(x_i-)$ i okrajové případy $f(a+)$ a $f(b-)$.

2) Uvažujme stále dělení $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ intervalu $[a, b]$ a $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ pevné. Je-li $x \in (x_{i-1}, x_i)$, potom je f spojitě diferencovatelná na okolí x, a proto můžeme opět aplikovat Langrangeovu větu o přírůstku, která implikuje

$$(\exists \delta > 0)(\exists L > 0)(\forall y \in (x - \delta, x + \delta))(|f(y) - f(x)| \leq L|x - y|).$$

Jinými slovy dostáváme, že pro všechna $t \in (0, \delta)$ platí

$$|f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)| \leq |f(x + t) - f(x)| + |f(x - t) - f(x)| \leq 2Lt.$$

Odtud plyne, že je splněno Diniho kritérium z Věty 1.61 pro bod x a $s = f(x)$, a proto Fourierova řada funkce f na (a, b) konverguje v bodě x k $f(x)$.

Zbývá vyšetřit konvergenci Fourierovy řady funkce f v bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Uvažujme nějaké $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ a zaměřme se na pravé okolí bodu x_i. Podle bodu 1) důkazu existují konečné limity $f(x_i+)$ a $f(x_{i+1}-)$, a tudíž je f spojitá na $[x_i, x_{i+1}]$ (vzhledem k $[x_i, x_{i+1}]$) a diferencovatelná na (x_i, x_{i+1}). Můžeme tedy znovu aplikovat Lagrangeovu větu o přírůstku a dostaneme

$$(\forall y \in (x_i, x_{i+1}))\left(|f(y) - f(x_i+)| \leq K_+(y - x_i)\right),$$

kde $K_+ := \sup_{x_i < \xi < x_{i+1}} |f'(\xi)| < \infty$. Ananlogicky pro levé okolí x_i najdeme $K_- > 0$ takové, že

$$(\forall y \in (x_{i-1}, x_i))\left(|f(y) - f(x_i-)| \leq K_-(x_i - y)\right),$$

Z toho vyplývá, že existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $t \in (0, \delta)$ platí

$$\begin{aligned}|f(x_i + t) + f(x_i - t) - f(x_i+) - f(x_i-)| &\leq |f(x_i + t) - f(x_i+)| + |f(x_i - t) - f(x_i-)| \\ &\leq (K_- + K_+)t.\end{aligned}$$

Odtud a z Diniho kriteria vyplývá, že Fourierova řada f na (a, b) konverguje také v bodě x_i k průměru $\left(f(x_i-) + f(x_i+)\right)/2$.

Nakonec zbývá vyřešit konvergenci Fourierovy řady v krajních bodech a a b. K tomu stačí uvažovat periodické prodloužení f_{per} funkce f a postupem stejným jako v předchozím odstavci ukázat existenci čísel $L_- > 0$ a $L_+ > 0$ takových, že pro $t > 0$ dostatečně malá je

$$|f_{per}(a + t) - f_{per}(a+)| = |f(a + t) - f(a+)| \leq L_+ t$$

a

$$|f_{per}(a - t) - f_{per}(a-)| = |f(b - t) - f(b-)| \leq L_- t$$

a dále opět aplikací Diniho kritéria vyvodíme, že Fourierova řada f na (a, b) konverguje také v bodě $x = a$ tentokrát k průměru $\left(f(a+) + f(b-)\right)/2$. Podobně pro bod b. □

V důkazu Věty 1.64 jsme viděli, že předpoklad f má po částech spojitou derivaci na $[a, b]$ implikuje, že f je po částech spojitá na $[a, b]$. Je-li funkce f s po částech spojitou derivací dokonce spojitá na $[a, b]$, dá se ukázat, že její Fourierova řada konverguje lokálně stejnoměrně na (a, b) k f, viz např. [14, Věta 185]. Přidáme-li ještě předpoklad $f(a) = f(b)$ dostaneme už stejnoměrnou konvergenci Fourierovy řady funkce f na celém $\mathbb{R}$, což je obsahem Jordanovy věty, kterou dokážeme později (Věta 1.67).

Věta 1.64 ukazuje, že Fourierova řada funkce f konverguje jak v bodech spojitosti f, tak i v bodech nespojitosti f 1. druhu za předpokladu, že má f derivaci spojitou alespoň po částech. Pomocí Diniho kritéria se dá dokonce ukázat, že Fourierova řada spojité funkce f konverguje v bodech, kde je f diferencovatelná. Naopak příklad Weierstrassovy funkce ukazuje, viz (5) a Obr. 1, že diferencovatelnost funkce není nutnou podmínkou pro konvergenci její Fourierovy řady.

Čtenář by se mohl domnívat, že už samotná spojitost funkce by mohla stačit pro bodovou konvergenci její Fourierovy řady. Že tomu tak není, ukázal již du Bois-Reymond v roce 1873, který našel příklad spojité funkce, jejíž Fourierova řada diverguje v jednom bodě. Jednodušší příklad později předložil L. Fejér. Dokonce lze nekonstruktivně dokázat pomocí tzv. Bairovy věty, že existuje spojitá funkce, jejíž Fourierova řada diverguje na nespočetné husté podmnožině (a, b), viz [23, Věta 5.12].

Na druhou stranu L. Carleson dokázal v roce 1966, že Fourierova řada spojité funkce (dokonce kvadraticky integrabilní v Lebesgueově smyslu) konverguje skoro všude na $[a, b]$. Termín „skoro všude“ má exaktní význam, který si ale budeme moci vysvětlit až mnohem později. Nyní nám stačí mít povědomí o tom, že množina, na níž je Fourierova řada spojité funkce divergentní, je v jistém smyslu značně omezená. Carleson svým důkazem vyřešil dlouho otevřený problém postulovaný N. N. Luzinem v roce 1915.

Ilustrujme si nyní aplikaci Věty 1.64 na jednoduchém příkladě.

Příklad 1.65: Spočítáme Fourierovu řadu funkce $f(x) = x$ na $(-\pi, \pi)$. Podle Eulerových vzorců máme

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) \mathrm{d}x = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

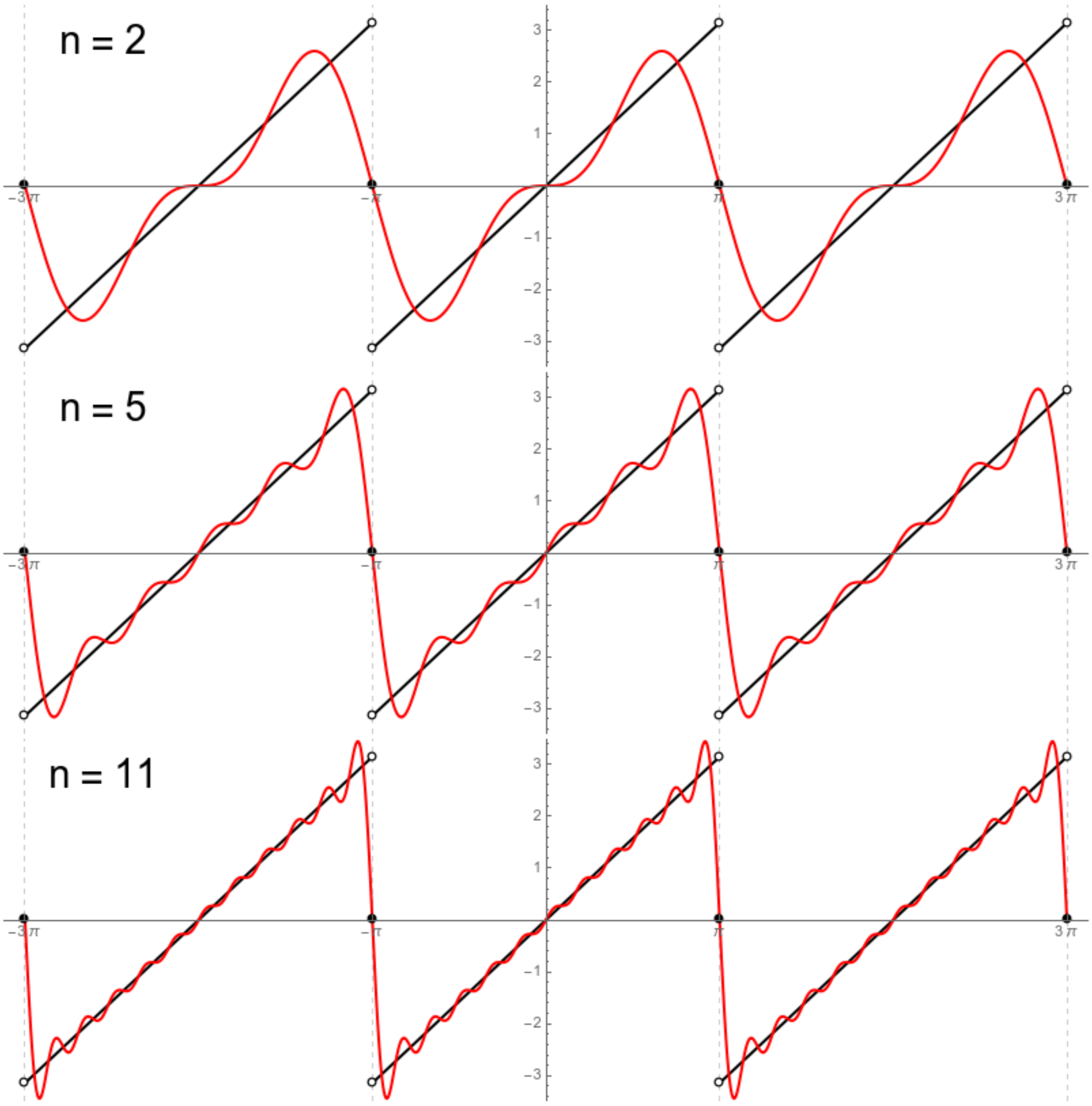
neboť integrujeme lichou funkci přes symetrický interval okolo počátku. Dále integrací per partes najdeme

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{x}{n} \cos(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \mathrm{d}x \right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože f splňuje předpoklady Věty 1.64, dostáváme rovnost

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx), \qquad \forall x \in (-\pi, \pi). \tag{11}$$

Řada (11) konverguje dokonce lokálně stejnoměrně na $(-\pi, \pi)$. V krajních bodech $x = \pm\pi$ konverguje Fourierova řada (11) k průměru $\left(f(-\pi) + f(\pi)\right)/2 = 0$, což lze také ověřit přímo. Součtová funkce řady (9) na $\mathbb{R}$ je rovna regularizovanému periodickému prodloužení funkce $f(x) = x$, viz Obrázek 3



Obrázek 3: Částečné součty Fourierovy řady funkce $f(x) = x$ na $(-\pi, \pi)$.

Nyní si odvodíme jednu důležitou nerovnost. Pro její a pozdější potřebu si označíme $\mathcal{R}^2(a, b)$ množinu funkcí $f \in \mathcal{R}(a, b)$, pro které zobecněný Riemannův integrál

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

konverguje.

Věta 1.66 (Bessel)**:** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in \mathcal{R}^2(a, b)$. Potom koeficienty Fourierovy řady funkce f na (a, b) splňují *Besselovu nerovnost*:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Označme F_n n-tý částečný součet Fourierovy řady funkce f na (a,b). Důkaz provedeme pro speciální případ $b-a=2\pi$. Modifikace postupu pro obecnou situaci je přenechána čtenáři.

Upravíme tzv. ***střední kvadratickou odchylku*** f a F_n na (a,b):

$$0 \leq \int_a^b (f(x)-F_n(x))^2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2\int_a^b f(x)F_n(x)\mathrm{d}x + \int_a^b F_n^2(x)\mathrm{d}x.$$

Využijeme-li 2π-periodičnosti trigonometrických funkcí a identit z Lemma 1.56, dostaneme

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)F_n(x)\mathrm{d}x &= \frac{a_0}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^n \left(a_k\int_a^b f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x + b_k\int_a^b f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x\right)\\ &= \pi\frac{a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^n \left(a_k^2+b_k^2\right)\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\int_a^b F_n^2(x)\mathrm{d}x &= \frac{a_0^2}{4}\int_a^b \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^n \left(a_k^2\int_a^b \cos^2(kx)\mathrm{d}x + b_k^2\int_a^b \sin^2(kx)\mathrm{d}x\right)\\ &= \pi\frac{a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^n \left(a_k^2+b_k^2\right).\end{aligned}$$

Tedy pro kvadratickou odchylku máme

$$0 \leq \int_a^b (f(x)-F_n(x))^2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - \pi\frac{a_0^2}{2} - \pi\sum_{k=1}^n \left(a_k^2+b_k^2\right),$$

z čehož vyplývá nerovnost

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k^2+b_k^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

platná pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nyní stačí poslat $n \to \infty$. □

Poznámka: Zopakujme důkaz Věty 1.66 s tím rozdílem, že funkci F_n nahradíme obecným trigonometrickým polynomem (s periodou 2π) stupně nejvýše n, tj. funkcí tvaru

$$T_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n c_k\cos(kx) + d_k\sin(kx),$$

kde $\{c_k\}_{k=0}^n, \{d_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$. Potom, je-li $b-a=2\pi$, dostaneme

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (f(x)-T_n(x))^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2\pi\left(\frac{a_0c_0}{2}+\sum_{k=1}^n (a_kc_k+b_kd_k)\right) + \pi\left(\frac{c_0^2}{2}+\sum_{k=1}^n (c_k^2+d_k^2)\right) \\
&= \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + \pi\left(\frac{(a_0-c_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^n \left((a_k-c_k)^2+(b_k-d_k)^2\right)\right) - \pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^n \left(a_k^2+b_k^2\right)\right) \\
&\geq \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - \pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^n \left(a_k^2+b_k^2\right)\right) = \int_a^b (f(x)-F_n(x))^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\int_a^b (f(x)-T_n(x))^2 \,\mathrm{d}x \geq \int_a^b (f(x)-F_n(x))^2 \,\mathrm{d}x,$$

přičemž rovnost platí, právě když $a_k = c_k$ pro všechna $k \in \{0,1,\dots,n\}$ a $b_l = d_l$ pro všechna $l \in \hat{n}$. Jinými slovy, vidíme, že mezi všemi trigonometrickými polynomy T_n stupně nejvýše n, má n-tý částečný součet Fourierovy řady F_n funkce f nejmenší kvadratickou odchylku od f.

Poznámka: Všimněte si, že z Besselovy věty 1.66 plyne, že $a_n, b_n \to 0$ pro $f \in \mathcal{R}^2(a,b)$, což je tvrzení Riemannova lemma 1.59. Riemannovo lemma je ovšem obecnější tvrzení, neboť $\mathcal{R}^2(a,b) \subsetneqq \mathcal{R}(a,b)$ pro $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$.

Nakonec se ukáže, že Besselova nerovnost platí dokonce jako rovnost pro funkce z $\mathcal{R}^2(a,b)$. Než se k této tzv. *Parsevalově rovnosti* dostaneme, dokážeme si Jordanovu větu o stejnoměrné konvergenci Fourierovy řady.

Věta 1.67 (Jordanova o stejnoměrné konvergenci Fourierovy řady)**:** Nechť funkce f definovaná na omezeném intervalu $[a,b]$ splňuje:

i. $f(a) = f(b)$.

ii. f je spojitá na $[a,b]$.

iii. f má po částech spojitou derivaci na $[a,b]$.

Potom Fourierova řada funkce f na (a,b) konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ k f_{per}.

Důkaz. Větu dokážeme pro případ $b-a=2\pi$. Označme $x_0 := a < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m := b$ všechny body nespojitosti derivace f'. Integrací per partes dostaneme pro koeficienty

Fourierovy řady f na (a,b):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi n}\sum_{i=1}^m \left([f(x)\sin(nx)]_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{\pi n}\left(f(b)\sin(nb) - f(a)\sin(na)\right) - \frac{1}{\pi n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

První člen v kulatých závorkách je roven nule, neboť $f(a) = f(b)$ a $b - a = 2\pi$. Dostáváme tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ rovnost

$$a_n = -\frac{1}{\pi n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)\mathrm{d}x =: -\frac{b_n'}{n},$$

kde b_n' je příslušný koeficient Fourierovy řady funkce f' na (a,b). Analogicky se pro každé $n \in \mathbb{N}$ dokáže rovnost

$$b_n = \frac{1}{\pi n}\int_a^b f'(x)\cos(nx)\mathrm{d}x =: \frac{a_n'}{n}.$$

Nyní pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ můžeme odhadnout n-tý člen Fourierovy řady funkce f na (a,b) následovně:

$$|a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \le |a_n| + |b_n| = \frac{|a_n'|}{n} + \frac{|b_n'|}{n} \le \frac{1}{2}\left(|a_n'|^2 + \frac{1}{n^2} + |b_n'|^2 + \frac{1}{n^2}\right),$$

kde jsme použili nerovnost $\alpha\beta \le (\alpha^2+\beta^2)/2$, která platí pro libovolné $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Z předpokladu iii. plyne, že $f' \in \mathcal{R}^2(a,b)$, a proto je podle Besselovy nerovnosti (Věta 1.66) výraz napravo v odhadu výše n-tý člen konvergentní číselné řady. Tvrzení věty nyní vyplývá z Weierstrassova kritéria (Věta 1.26). $\square$

Poznámka: Uvědomte si, že z Věty 1.34 víme, že součtová funkce stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí je spojitá, a proto je předpoklad $f(a) = f(b)$ v Jordanově větě nezbytný pro stejnoměrnou konvergenci Fourierovy řady funkce f na celém $\mathbb{R}$. Na druhou stranu pokud předpoklad $f(a) = f(b)$ vynecháme, potom platí, že Fourierova řada f na (a,b) konverguje *lokálně stejnoměrně* na (a,b) k f, viz např. [14, Věta 185].

Množinu funkcí $\mathcal{R}^2(a,b)$ můžeme vybavit zobrazením $\|\cdot\|_2 : \mathcal{R}^2(a,b) \to [0,\infty)$ definovaným pro $f \in \mathcal{R}^2(a,b)$ vztahem

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Zobrazení $\|\cdot\|_2$ není norma, nýbrž pouze *seminorma* na $\mathcal{R}^2(a,b)$, tzn., že splňuje:

1. $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall f \in \mathcal{R}^2(a,b))(\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \|f\|_2)$,
2. $(\forall f, g \in \mathcal{R}^2(a,b))(\|f+g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2)$,

avšak **neplatí** implikace $\|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = 0$ pro $f \in \mathcal{R}^2(a,b)$. Důkaz první vlastnosti je zřejmý. Důkaz trojúhelníkové nerovnosti plyne ze Schwarzovy nerovnosti pro bilineární formu

$$(f,g)_2 := \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x, \quad f, g \in \mathcal{R}^2(a,b),$$

viz Cvičení 1.11.

Věta 1.68 (Parseval)**:** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in \mathcal{R}^2(a,b)$. Potom koeficienty Fourierovy řady funkce f na (a,b) splňují *Parsevalovu rovnost*:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Větu opět dokážeme pro speciální případ $b - a = 2\pi$. Důkaz provedeme v několika krocích. V důkazu Věty 1.66 jsme pro každé $n \in \mathbb{N}$ ukázali, že

$$\|f - F_n\|_2^2 = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \right).$$

Tudíž Parsevalova rovnost platí, právě když $\lim_{n\to\infty} \|f - F_n\|_2 = 0$. Naším cílem je dokázat právě tuto limitu.

1) Nejprve předpokládejme, že f je riemannovsky integrabilní funkce na $[a,b]$. Podle definice Riemannova integrálu musí být f omezená na $[a,b]$, tzn., že existuje $K > 0$ tak, že

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \le K.$$

Zvolme $\epsilon > 0$ a dělení $\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$S_f(\sigma) - s_f(\sigma) < \frac{\epsilon^2}{8K},$$

kde $s_f(\sigma)$ a $S_f(\sigma)$ jsou dolní a horní integrální součty f při rozdělení σ. Definujme po částech lineární funkci g na $[a,b]$, jejíž graf je lomená čára spojující body $(x_i, f(x_i))$ pro $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, tzn.

$$g(x) := f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})$$

pro $x \in [x_{i-1}, x_i]$ a $i \in \hat{m}$. Potom pro střední kvadratickou odchylku f a g dostaneme

$$\int_a^b (f(x) - g(x))^2 \,\mathrm{d}x \le 2K \int_a^b |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x \le 2K \left(S_f(\sigma) - s_f(\sigma)\right) < \frac{\epsilon^2}{4}. \tag{12}$$

V první nerovnosti jsme odhadli $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq K + K = 2K$ pro každé $x \in [a,b]$. Nerovnost $(\forall x \in [a,b])(|g(x)| \leq K)$ plyne z nerovnosti $(\forall x \in [a,b])(|f(x)| \leq K)$ a definice g. Druhá nerovnost v (12) platí, neboť

$$(\forall i \in \hat{m})(\forall x \in [x_{i-1}, x_i]) \left(|f(x) - g(x)| \leq M_i^{(f)} - m_i^{(f)} \right),$$

kde

$$M_i^{(f)} = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{a} \quad m_i^{(f)} = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Jelikož nás bude zajímat střední kvadratická odchylka f a F_n na (a,b), můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $f(a) = f(b)$, neboť změníme-li integrovanou funkci v jednom bodě, nemá to vliv na hodnotu Riemannova integrálu. Potom také $g(a) = g(b)$ a navíc je g spojitá na $[a,b]$ a její derivace je spojitá po částech na $[a,b]$. Tedy g splňuje předpoklady Jordanovy věty 1.67, a tudíž

$$F_n^{(g)} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g,$$

kde $F_n^{(g)}$ označuje n-tý částečný součet Fourierovy řady funkce g na (a,b). Odtud plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ je

$$\sup_{x \in [a,b]} \left| g(x) - F_n^{(g)}(x) \right| < \frac{\epsilon}{2\sqrt{b-a}}.$$

Z toho plyne pro kvadratickou odchylku g a $F_n^{(g)}$ odhad:

$$\int_a^b \left(g(x) - F_n^{(g)}(x) \right)^2 \mathrm{d}x \leq \frac{\epsilon^2}{4}. \tag{13}$$

Celkem z (12) a (13) a také z poznámky za Větou 1.66 dostáváme odhad

$$\|f - F_n\|_2 \leq \|f - F_n^{(g)}\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - F_n^{(g)}\|_2 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

platný pro všechna $n \geq n_0$, z čehož plyne $\lim_{n \to \infty} \|f - F_n\|_2 = 0$.

2) Nechť $f \in \mathcal{R}^2(a,b)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že bod b je jediný kritický bod f na $[a,b]$, tzn., že f je riemannovsky integrabilní na $[a,c]$ pro libovolné $c \in (a,b)$ a existuje konečná limita

$$\lim_{c \to b+} \int_a^c f(x) \mathrm{d}x.$$

Z toho plyne, že i f^2 je riemannovsky integrabilní na $[a,c]$ pro libovolné $c \in (a,b)$ a také existuje konečná limita

$$\lim_{c \to b+} \int_a^c f^2(x) \mathrm{d}x,$$

neboť podle předpokladu je $f \in \mathcal{R}^2(a,b)$.

Zvolme $\epsilon > 0$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\int_c^b f^2(x)\mathrm{d}x < \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Neboli pro pomocnou integrabilní funkci

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & x \in [a, c], \\ 0, & x \in (c, b], \end{cases}$$

máme $\|f - g\|_2 < \epsilon/2$. Nyní podle již dokázaného bodu 1) a poznámky za Větou 1.66 najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\|f - F_n\|_2 \leq \|f - F_n^{(g)}\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - F_n^{(g)}\|_2 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

a tudíž $\lim_{n\to\infty} \|f - F_n\|_2 = 0$. □

Parsevalova rovnost nám umožňuje najít součty zajímavých číselných řad, které bychom jinak určovali jen velmi obtížně. Např. můžeme tak určit součet řady převrácených hodnot kvadrátů přirozených čísel, což je úloha známá jako *Basilejský problém*, k níž se váže zajímavá historie.

Příklad 1.69: V Příkladu 1.65 jsme spočítali koeficienty

$$a_n = 0 \quad \text{a} \quad b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Fourierovy řady funkce $f(x) = x$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. V tomto případě má Parsevalova rovnost tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Odtud najdeme řešení Basilejského problému:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Tuto odpověď našel L. Euler v roce 1734 a vyřešil tak dlouho otevřený problém z roku 1650!

Příklad 1.70: Spočítejme Fourierovu řadu funkce $f(x) = x^2$ na $(-\pi, \pi)$. Zřejmě

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(nx)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

neboť integrujeme lichou funkci přes interval symetrický kolem počátku. Dále přímým výpočtem se ověří, že

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3} \quad \text{a} \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Odtud podle Věty 1.64 vyplývá rovnost

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Funkce $f(x) = x^2$ dokonce vyhovuje předpokladům Jordanovy věty 1.67, a proto nalezená Fourierova řada konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ k periodickému prodloužení funkce $f(x) = x^2$ na $[-\pi, \pi]$. Dosadíme-li do poslední rovnosti $x = \pi$, najdeme opět součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

Dále z Parsevalovy rovnosti dostaneme:

$$\frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \mathrm{d}x = \frac{2\pi^4}{5},$$

z čehož plyne, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Jiný způsob nalezení tohoto součtu nabízí Cvičení 1.12

V předchozím dvou příkladech jsme určili hodnoty $\zeta(2)$ a $\zeta(4)$, kde ζ je Riemannova zeta funkce, neboť

$$\zeta(2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Čtenáře by mohlo napadnout, že k nalezení dalších hodnot $\zeta(6), \zeta(8), \ldots$ bychom mohli použít Parsevalovy rovnosti pro koeficienty Fourierovy řady funkcí $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, $\ldots$ na $(-\pi, \pi)$. To je sice pravda, ale postup se rychle komplikuje a těžko bychom tímto způsobem našli obecný vzorec pro $\zeta(2k)$, kde $k \in \mathbb{N}$.

K odvození obecného vzorce pro $\zeta(2k)$, kde $k \in \mathbb{N}$, vyjdeme z Fourierovy řady funkce $f(x) = \cosh \alpha x$ na $(-\pi, \pi)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr. Přímým výpočtem a z Věty 1.64 dostaneme rovnost

$$\cosh \alpha x = \frac{\sinh \alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha}{\pi} \sinh(\alpha\pi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2} \cos(nx),$$

která platí pro všechna $x \in [-\pi, \pi]$. Detaily výpočtu jsou přenechány čtenáři jako Cvičení 1.13. Položíme-li $x = \pi$ a píšeme-li z místo α, dostaneme rovnost

$$\pi z \coth \pi z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 + n^2}. \tag{14}$$

Z našeho postupu vyplývá, že rovnost platí pro všechna $z \in \mathbb{R}$. Dá se ale ukázat, že platí dokonce pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{i}\mathbb{Z}$. Uvažujme dále pouze $z \in \mathbb{C}$, pro která je $|z| < 1$. Potom platí:

$$\pi z \coth \pi z = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{n^2}} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{z^2}{n^2}\right)^k = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \zeta(2k) z^{2k}.$$

Prohození pořadí řad lze ospravedlnit díky absolutní konvergenci dvojité řady. Rigorózní argument uvidíme mnohem později u tzv. Fubiniho věty (viz Věta 5.66) a na tomto místě ho prostě akceptujme. Nyní stačí poslední rovnost srovnat s Taylorovou řadou (8), odkud dostaneme finální vzorec:

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}B_{2k}}{(2k)!}\pi^{2k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Poznámka: Rozvoj (14) lze přepsat do tvaru

$$\pi z \coth \pi z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z}{z + \mathrm{i}n}.$$

Využijeme-li vztahů $\sinh(iz) = \mathrm{i}\sin z$ a $\cosh(\mathrm{i}z) = \cos z$ platných pro všechna $z \in \mathbb{C}$, dostaneme podobný rozvoj

$$\pi z \operatorname{cotg} \pi z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z}{z + n}$$

pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Tyto rozvoje představují zobecnění rozkladu racionální lomené funkce na parciální zlomky. Funkce, které lze tímto způsobem rozvíjet jsou tzv. *meromorfní funkce* a jejich rozvoje v „nekonečné řady parciálních zlomků“ se nazývají *Mittag-Lefflerovy rozvoje*. Více o těchto rozvojích najde čtenář v klasických učebnicích komplexní analýzy.

Poznámka: Žádný vzorec podobný (15) pro hodnoty $\zeta(2n+1)$, kde $n \in \mathbb{N}$, není znám. V matematice existuje řada otevřených problémů týkající se nějakým způsobem funkce ζ. Vynecháme-li slavnou *Riemannovu hypotézu*, je to např. otázka iracionality čísel $\zeta(n)$, $n \geq 2$. Všimněte si, že ze vztahu (15) plyne, že číslo $\zeta(2n)$ je racionální násobek čísla π^{2n}. Dobře známý výsledek z teorie čísel je, že číslo π je tzv. transcendetní iracionální číslo, z čehož plyne, že π^k je iracionální pro libovolné $k \in \mathbb{N}$, a tudíž také čísla $\zeta(2n)$ jsou iracionální pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Daleko obtížnější je otázka iracionality čísel $\zeta(2n+1)$. Jen pro zajímavost uveďme dnešní stav této problematiky. Zatím se ví, že je iracionální pouze $\zeta(3)$, což dokázal R. Apéry v roce 1978 a číslo $\zeta(3)$ se proto dnes nazývá *Apéryho konstanta*. Mnoho lidí se pokusilo rozšířit Apéryho výsledek i na další hodnoty $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots$, ale doposud nikdo neuspěl. V roce 2000 T. Rivoal dokázal, že v posloupnosti $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots$ je nekonečně mnoho čísel iracionálních. W. Zudilin dokázal v roce 2001, že z čísel $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ je alespoň jedno iracionální. Další výsledky a reference lze nalézt v článcích W. Zudilina.

1.7 Cvičení

Cvičení 1.1: Dokažte Bolzanovo–Cauchyho kritérium konvergence pro **komplexní** (číselné) posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ konverguje} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(|a_n - a_m| < \epsilon)$$

s využitím známého Bolzanova–Cauchyho kritéria konvergence pro reálné posloupnosti.

Cvičení 1.2: Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí na množině A. Dokažte, že potom také $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na libovolné podmnožině $B \subset A$.

Cvičení 1.3: Dokažte 1. a 2. tvrzení Věty 1.13.

Cvičení 1.4: Dokažte, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z.$$

Cvičení 1.5: Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou komplexní posloupnosti. Dokažte, že, pokud jsou řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolutně konvergentní, potom také tzv. *součinová řada* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, kde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

je absolutně konvergentní a platí rovnost

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Cvičení 1.6: Dokažte, že

$$e^{w+z} = e^w e^z, \quad \forall w, z \in \mathbb{C}.$$

Speciálně $e^{-z} = 1/e^z$.
(Hint: Použijte Cvičení 1.5.)

Cvičení 1.7: Dokažte, že pro $z \in \mathbb{C}$ platí: $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.
(Hint: Použijte Cvičení 1.6 a z Eulerova vzorce odvoďte, že $|e^{\mathrm{i}y}| = 1$ pro $y \in \mathbb{R}$.)

Cvičení 1.8: Dokažte identity:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin(xn/2) \sin(x(n+1)/2)}{\sin(x/2)}$$

a

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(xn/2) \cos(x(n+1)/2)}{\sin(x/2)},$$

kde $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
(Hint: Můžete využít vztahů: $\sin(kx) = \operatorname{Im} e^{\mathrm{i}kx}$ a $\cos(kx) = \operatorname{Re} e^{\mathrm{i}kx}$).

Cvičení 1.9: Ověřte následující rovnosti:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad \forall x \in \begin{cases} [-1,1], & \text{je-li } a > 0, \\ (-1,1], & \text{je-li } -1 < a \leq 0, \\ (-1,1), & \text{je-li } a \leq -1; \end{cases}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad \forall x \in (-1,1];$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-1/2}{n} x^{2n+1}, \quad \forall x \in [-1,1].$$

Cvičení 1.10: Dokažte Lemma 1.56.
(Hint: Využijte identit: $2\sin\alpha\sin\beta = -\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$, $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$, $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$, $2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$ a $2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha$).

Cvičení 1.11: Dokažte, že zobrazení definované pro funkce z $\mathcal{R}^2(a,b)$ vztahy

$$(f,g)_2 := \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \|f\|_2 := \sqrt{(f,f)_2}$$

splňuje Schwarzovu nerovnost $|(f,g)_2| \leq \|f\|_2\|g\|_2$ a trojúhelníkovou nerovnost $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$.
(Hint: Aplikujte obvyklý postup pro důkaz Schwarzovy a trojúhelníkové nerovnosti pro skalární součin a indukovanou normu známý z lineární algebry a uvědomte si, že platnost implikace $\|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = 0$ není pro důkaz třeba.)

Cvičení 1.12: Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = |x|$ na $(-\pi,\pi)$ a s pomocí Parsevalovy rovnosti určete součet řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Cvičení 1.13: Ověřte následující Fourierovy rozvoje:

$$e^{\alpha x} = \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2}{\pi}\sinh(\alpha\pi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2+n^2} \left(\alpha\cos(nx) - n\sin(nx)\right), \quad x \in (-\pi,\pi),$$

$$\cosh(\alpha x) = \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha}{\pi}\sinh(\alpha\pi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2+n^2} \cos(nx), \quad x \in [-\pi,\pi],$$

$$\sinh(\alpha x) = \frac{2}{\pi}\sinh(\alpha\pi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{\alpha^2+n^2} \sin(nx), \quad x \in (-\pi,\pi),$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr.


Tati, existuje Bůh?
Ještě ne.

2 Topologické a metrické prostory

2.1 Úvod

Jako motivaci pro následující definice uvažujme jednoduchý příklad množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Na $\mathbb{R}$ zavádíme absolutní hodnotu $|x|$ čísla $x \in \mathbb{R}$ obvyklým způsobem. Absolutní hodnotu $|x|$ můžeme chápat jako *velikost* prvku $x \in \mathbb{R}$. Absolutní hodnota je také zobrazení $|\cdot| : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ s vlastnostmi:

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \alpha \in \mathbb{R})(|\alpha x| = |\alpha||x|)$,
2. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(|x + y| \leq |x| + |y|)$,
3. $(\forall x \in \mathbb{R})(|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0)$,

které je jednoduché ověřit.

Axiomatizací vlastností 1.-3. dostaneme známou definici *normy* jako abstrakci *velikosti* prvku lineárního prostoru.

Definice 2.1 (Norma)**:** Buď V lineární prostor nad $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Zobrazení $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ s vlastnostmi:

1. $(\forall x \in V)(\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)$)(\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|)$,
2. $(\forall x, y \in V)(\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|)$, (tzv. *trojúhelníková nerovnost*)
3. $(\forall x \in V)(\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0)$,

nazýváme *norma* na V a uspořádanou dvojici $(V, \|\;\|)$ *normovaný prostor.*

Poznámka: 1. Prostor V z definice normy musí být lineární, protože musí být jasné, co je součet $x + y$ a součin αx pro elementy $x, y \in V$ a číslo α. To už nebude třeba pro obecnější prostory metrické a topologické.
2. Zobrazení $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ splňující 1. a 2. se nazývá *seminorma* na V.

Příklad 2.2: Příklady normovaných prostorů:

1. Na $V = \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) definujeme tzv. p-normu

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, & \text{pro } p \in [1, \infty), \\ \max_{i \in \hat{n}} |x_i|, & \text{pro } p = \infty, \end{cases}$$

kde $x \in V$. Normy $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ a $\|x\|_\infty$ se někdy nazývají po řadě *součtová*, *euklidovská* a *maximová.*

2. Podobně lze zavést na prostoru spojitých funkcí $C([a,b])$ na intervalu $[a,b]$ p-normy

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{1/p} \mathrm{d}x, & \text{pro } p \in [1,\infty), \\ \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|, & \text{pro } p = \infty, \end{cases}$$

kde $f \in C([a,b])$.

Ukázat, že normy $\|\cdot\|_p$ pro $p \in (1,\infty)$ splňují trojúhelníkovou nerovnost, není triviální a my si ji dokážeme až mnohem později v obecnější podobě, viz Věta 5.84 a také Cvičení 2.2 a 2.3. Ve speciálním případě $p = 2$ lze využít toho, že $\|\cdot\|_2$ je indukována euklidovským skalárním součinem, tzn. $\|x\|_2 = \sqrt{(x,x)}$ a použít k důkazu trojúhelníkové nerovnosti známou Schwarzovu nerovnost (Cvičení 2.2).

V důkazu implikace $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ je podstatný předpoklad spojitosti funkce f. Všimněte si, že pokud bychom prostor $C([a,b])$ nahradili (větším) prostorem Riemannovsky integrabilních funkcí na $[a,b]$, implikace už by neplatila a $\|\cdot\|_p$ by byla pouze semi-norma.

Vraťme se k příkladu reálných čísel. Vzdálenost mezi dvěma reálnými čísly x a y je rovna $\rho(x,y) := |x-y|$. Vzdálenost dvou elementů z $\mathbb{R}$ můžeme tedy chápat jako zobrazení $\rho : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0,\infty)$, které má navíc tyto vlastnosti:

1. $(\forall x,y \in \mathbb{R})(\rho(x,y) = \rho(y,x))$,
2. $(\forall x,y,z \in \mathbb{R})(\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z))$,
3. $(\forall x,y \in \mathbb{R})(\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$.

Abstrahujeme-li od $\mathbb{R}$ k libovolné neprázdné množině X, pak axiomatizací vlastností 1.-3. dostaneme definici *metriky* jako abstrakci *vzdálenosti* dvou elementů z X.

Definice 2.3 (Metrika)**:** Buď $X \neq \emptyset$ množina. Zobrazení $\rho : X \times X \to [0,\infty)$ splňující

1. $(\forall x,y \in X)(\rho(x,y) = \rho(y,x))$, (tzv. *symetrie*)
2. $(\forall x,y,z \in X)(\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z))$, (tzv. *trojúhelníková nerovnost*)
3. $(\forall x,y \in X)(\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$,

nazýváme *metrika* na X a uspořádanou dvojici (X,ρ) *metrický prostor.*

Je-li X speciálně lineární prostor vybavený normou $\|\cdot\|$, potom je zobrazení

$$\rho(x,y) := \|x-y\|$$

metrikou na X (ověřte). O takové metrice říkáme, že je *indukovaná normou.* Příklad 2.2 nám proto ihned dává následující příklady metrik.

Příklad 2.4: Pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) je

$$\rho_p(x,y) := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}, & \text{pro } p \in [1,\infty), \\ \max_{i \in \hat{n}} |x_i - y_i|, & \text{pro } p = \infty, \end{cases}$$

metrika (indukovaná normou $\|\cdot\|_p$) na $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$). Podobně pro $f, g \in C([a,b])$ je

$$\rho_p(f,g) := \begin{cases} \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}, & \text{pro } p \in [1,\infty), \\ \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|, & \text{pro } p = \infty, \end{cases}$$

je metrika na $C([a,b])$.

Existují ovšem metriky, které nejsou indukovány žádnou normou.

Příklad 2.5 (Diskrétní metrika)**:** Na lib. $X \neq \emptyset$ lze vždy zavést tzv. *diskrétní metrika*:

$$\rho_d(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{je-li } x \neq y, \\ 0, & \text{je-li } x = y. \end{cases}$$

Je-li X lineární prostor s alespoň dvěma různými prvky, tj. $|X| \geq 2$, není ρ_d indukována žádnou normou na X. Předpokládejme, že naopak existuje norma $\|\cdot\|$ na X taková, že

$$\rho_d(x,y) = \|x - y\|$$

pro všechna $x, y \in X$. Z vlastností normy by potom metrika ρ_d musela splňovat

$$\rho_d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \|x - y\| = |\alpha| \rho_d(x,y)$$

pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) a $x, y \in X$. Pokud je $x \neq y$, dostaneme z definice ρ_d, že $|\alpha| = 1$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), což je spor.

Můžeme-li měřit vzdálenosti mezi prvky množiny. Můžeme měřit také vzdálenost množin a mluvit o omezených množinách.

Definice 2.6: Buď (X, ρ) metrický prostor a $\emptyset \neq A, B \subset X$. Číslo

$$d(A,B) := \inf\{\rho(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$$

nazýváme *vzdáleností množin* A a B. Dále číslo

$$\operatorname{diam} A := \sup\{\rho(x,y) \mid x, y \in A\}$$

nazýváme *průměr* množiny A. Pro prázdnou množinu klademe $\operatorname{diam} \emptyset := 0$. Řekneme, že A je *omezená*, právě když $\operatorname{diam} A < \infty$.

Poznámka: 1. Je-li $|X| \geq 2$, zobrazení d není metrika na potenční množině 2^X, ať už dodefinujeme $d(A, B)$ jakkoliv pro $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$, neboť z $d(A, B) = 0$ neplyne $A = B$.
2. Pokud $A \subset B$, potom $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} B$.

Abychom se postupně dostali k obecnému topologickému prostoru, potřebuje si ujasnit pojem *otevřená množina* v metrickém prostoru. K tomu si nejprve zavedeme pojem *koule* v metrickém prostoru.

Definice 2.7: Buď (X, ρ) metrický prostor, $x \in X$ a $r > 0$. Množinu

$$B_x(r) := \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$$

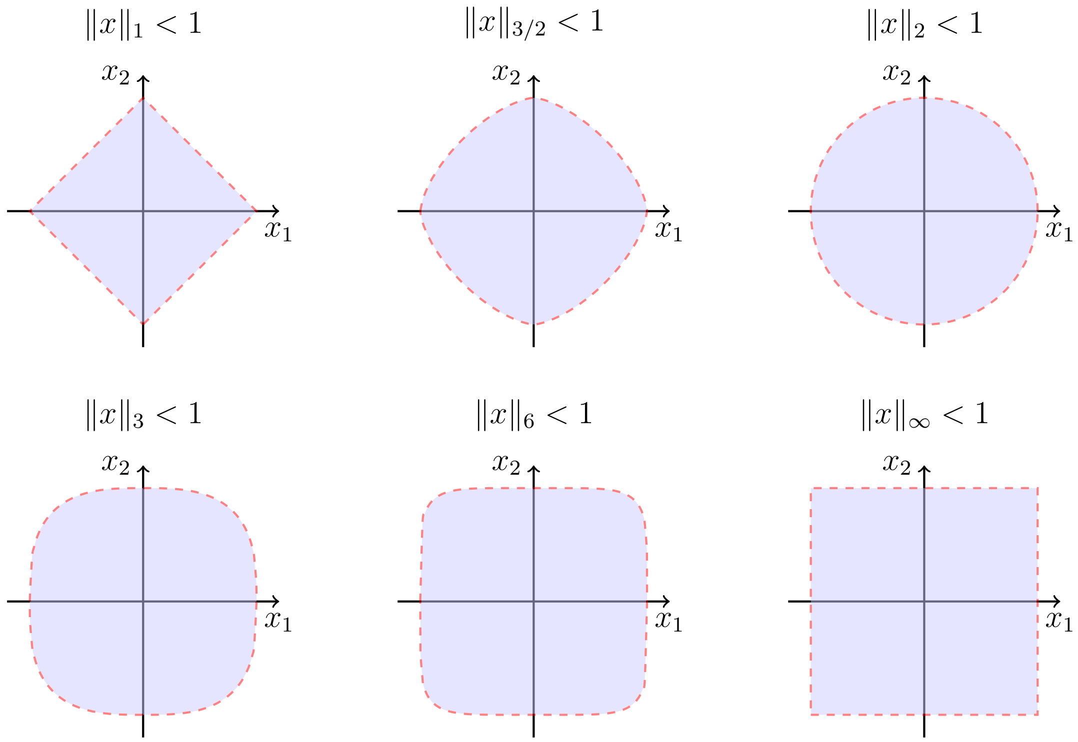
nazveme *(otevřenou) koulí* se středem v x a poloměrem r nebo stručněji r*-koulí* se středem v x.

Poznámka: Množina $B_x(r)$ se také někdy nazývá r*-okolím* bodu x.

Příklad 2.8: Uvažujme $X = \mathbb{R}^2$ s metrikou indukovanou p-normou $\|.\|_p$, kde $p \geq 1$. Potom 1-koule se středem v 0 je množina

$$B_0(1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p < 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1|^p + |x_2|^p < 1\}.$$

Tvar množin $B_0(1)$ pro několik hodnot p je na Obrázku 4.



Obrázek 4: Příklady 1-koulí se středem v 0 v $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ pro několik hodnot p.

Definice 2.9: Buď (X, ρ) metrický prostor. Řekneme, že množina $A \subset X$ je *otevřená*, pokud

$$(\forall x \in A)(\exists r > 0)(B_x(r) \subset A).$$

Tzn., že s každým bodem $x \in A$ leží v A také nějaká koule se středem v x. Množinu $B \subset X$ nazveme *uzavřenou*, právě když $X \setminus B$ je otevřená.

Příklad 2.10: Uvažujme $X = \mathbb{R}^2$ s metrikou indukovanou p-normou $\|\cdot\|_p$ pro nějaké $1 \leq p \leq \infty$. Množina $A = (0,1) \times (0,1)$ (otevřený čtverec) je otevřená v $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$. Množina $B = [0,1] \times [0,1]$ (uzavřený čtverec) je uzavřená v $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$. Množina $C = [0,1) \times [0,1)$ není ani otevřená, ani uzavřená v $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$.

Věta 2.11: Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $x \in X$ a $r > 0$. Potom $B_x(r)$ je otevřená.

Důkaz. Buď $y \in B_x(r)$ libovolné ale fixní. Ukážeme, že $\exists r' > 0$ tak, že $B_y(r') \subset B_x(r)$. Položme $r' := r - d > 0$, kde $d := \rho(x,y) < r$. Je-li $z \in B_y(r')$, plyne z trojúhelníkové nerovnosti

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) < d + r' = r.$$

Tzn, že $z \in B_x(r)$. □

Následující vlastnosti se ukáží jako klíčové pro axiomatickou definici otevřené množiny v obecných prostorech **bez** metriky.

Věta 2.12: V metrickém prostoru (X, ρ) platí:

1. $\emptyset$ a X jsou otevřené.
2. Je-li $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \ldots, A_n \subset X$ otevřené, pak $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ je otevřená množina.
3. Je-li $I \neq \emptyset$ indexová množina lib. mohutnosti a $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset X$ otevřené, potom $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha$ je otevřená.

Důkaz. Tvzení 1. je triviální.

2. Předpokládejme, že $A_1, \ldots, A_n \subset X$ jsou otevřené. Nechť $x \in A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Potom $x \in A_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Z otevřenosti množin A_i plyne, že $\exists r_i > 0$ tak, že $B_x(r_i) \subset A_i$. Položíme-li $r := \min_{i \in \hat{n}} r_i > 0$ je

$$(\forall i \in \hat{n})(B_x(r) \subset A_i),$$

neboli

$$B_x(r) \subset A_1 \cap \cdots \cap A_n.$$

Z toho plyne, že $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ je otevřená.

3. Předpokládejme, že $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset X$ jsou otevřené. Nechť $x \in \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Potom $\exists \alpha_0 \in I$ tak, že $x \in A_{\alpha_0}$. Protože je A_{α_0} otevřená, existuje $r > 0$ tak, že

$$B_x(r) \subset A_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

Tedy $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha$ je otevřená. □

Vidíme, že máme-li metriku na X, máme také systém otevřených podmnožin X, pro který platí tvrzení 1.-3. z Věty 2.12. Axiomatizací vlastností 1.-3. dostaneme abstraktní definici systému otevřených množin a dostaneme tak nejobecnější strukturu, kterou se budeme zabývat - *topologický prostor.*

2.2 Topologie

Definice 2.13 (Topologie)**:** Nechť $X \neq \emptyset$. Systém množin $\tau \subset 2^X$ splňující

1. $\emptyset, X \in \tau$,
2. $(\forall n \in \mathbb{N}), (\forall i \in \hat{n}, A_i \in \tau \;\Rightarrow\; \cap_{i=1}^n A_i \in \tau)$,
3. $(\forall I \neq \emptyset)(\forall \alpha \in I, A_\alpha \in \tau \;\Rightarrow\; \cup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau)$,

nazýváme *topologie* na X a uspořádanou dvojici (X, τ) *topologický prostor.* Prvky $A \in \tau$ se nazývají *otevřené množiny.*

Poznámka: 1. Pojem *otevřená množina* z Definice 2.13 je vždy svázán s konkrétní topologií a zobecňuje pojem otevřená množina v metrickém prostoru z Definice 2.9.
2. Skutečně je-li (X, ρ) metrický prostor a

$$\tau_\rho := \{A \subset X \mid A \text{ otevřená podle Definice 2.9}\},$$

plyne z Věty 2.12, že τ_ρ je topologie na X. Topologie τ_ρ se nazývá *topologie indukovaná metrikou ρ.* Na druhou stranu ne každá topologie je indukovaná nějakou metrikou, viz Příklad 2.14.
3. Dostáváme tedy hierarchii striktních vložení

$$(X, \|\cdot\|) \prec (X, \rho) \prec (X, \tau).$$

Navíc víme z lineární algebry, že skalární součin indukuje normu na lineárním prostoru, můžeme si proto hierarchii ještě rozšířit o pre-Hilbertův prostor

$$(X, (\cdot,\cdot)) \prec (X, \|\cdot\|) \prec (X, \rho) \prec (X, \tau).$$

Následující dva příklady ukazují dva extrémy, kdy jsou otevřené pouze množiny $\emptyset$ a X, nebo všechny podmnožiny X.

Příklad 2.14 (Triviální topologie)**:** Na lib. $X \neq \emptyset$ lze zavést *triviální topologii* $\tau_0 := \{\emptyset, X\}$.

Pokud je $|X| \geq 2$, není τ_0 indukována žádnou metrikou. Pro spor předpokládejme naopak, že existuje metrika ρ na X indukující τ_0. Zvolme $x, y \in X$, $x \neq y$ a označme $r := \rho(x, y) > 0$. Potom $x \in B_x(r/2)$, ale $y \notin B_x(r/2)$. Tzn., že $\emptyset \neq B_x(r/2) \neq X$, a tedy $B_x(r/2)$ není v topologii τ_0. Na druhou stranu podle Věty 2.11 je $B_x(r/2)$ otevřená, což je spor.

Příklad 2.15 (Diskrétní topologie)**:** Na lib. $X \neq \emptyset$ lze zavést *diskrétní topologii* $\tau_d := 2^X$. Topologie τ_d je indukována diskrétní metrikou na ρ_d na X (Cvičení 2.7).

Příklad 2.16 (Obvyklá topologie na $\mathbb{R}^n$)**:** Topologii na $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, indukovanou euklidovskou metrikou $\rho_2(x, y) = \|x - y\|_2$ pro $x, y \in \mathbb{R}^n$, budeme stručně nazývat *obvyklou* topologií na $\mathbb{R}^n$.

Definice 2.17: Buď (X, τ) topologický prostor a $x \in X$. Libovolnou množinu $A \in \tau$, která obsahuje x, nazveme *(otevřeným) okolím* x a budeme ji značit H_x.

Věta 2.18: Buď (X, τ) topologický prostor a $A \subset X$. Potom $A \in \tau$, právě tehdy když

$$(\forall x \in A)(\exists H_x)(H_x \subset A).$$

Důkaz. Implikace $(\Rightarrow)$ je triviální, neboť za H_x lze vzít samotnou množinu A.

Dokážeme implikaci $(\Leftarrow)$. Z předpokladu $(\forall x \in A)(\exists H_x)(H_x \subset A)$ plyne

$$A = \bigcup_{x \in A} H_x.$$

Inkluze $A \subset \cup_{x \in A} H_x$ je zřejmě pravdivá. Naopak, je-li $y \in \cup_{x \in A} H_x$, existuje $x \in A$ tak, že $y \in H_x \subset A$. Platí tedy i opačná inkluze $A \supset \cup_{x \in A} H_x$. K dokončení důkazu stačí uvážit, že podle definice okolí je $H_x \in \tau$ pro každé $x \in X$. Vlastnost 3. z definice topologie potom implikuje

$$A = \bigcup_{x \in A} H_x \in \tau.$$

□

Uzavřenou množinu definujeme jako doplněk do otevřené množiny.

Definice 2.19 (Uzavřená množina, kotopologie)**:** Buď (X, τ) topologický prostor. Množinu $A \subset X$ nazveme ***uzavřenou***, právě když $X \setminus A \in \tau$. Systém všech uzavřených množin nazýváme *kotopologie* a značíme $c\tau$.

Příklad 2.20: Uvažujme $X = \mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Potom, je-li $a \leq b$, je uzavřený interval

$$[a, b] = \mathbb{R} \setminus ((-\infty, a) \cup (b, \infty))$$

uzavřenou množinou.

Věta 2.21: Buď (X, τ) topologický prostor. Potom platí:

1. $\emptyset, X \in c\tau$,
2. $(\forall n \in \mathbb{N}), (\forall i \in \hat{n}, A_i \in c\tau \;\Rightarrow\; \cup_{i=1}^{n} A_i \in c\tau)$,
3. $(\forall I \neq \emptyset)(\forall \alpha \in I, A_\alpha \in c\tau \;\Rightarrow\; \cap_{\alpha \in I} A_\alpha \in c\tau)$,

Důkaz. Připomeňme *de Morganovy zákony*, které dávají do souvislosti průnik, sjednocení a doplněk množin $A, B \subset X$:

$$(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B),$$
$$(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = X \setminus (A \cup B).$$

Důkaz tvrzení potom přímo plyne z vlastností topologie a vztahů:

1.
$$X = X \setminus \emptyset \quad \text{a} \quad \emptyset = X \setminus X,$$

2.
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus A_i) \right),$$

3.
$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha) \right).$$

□

Poznámka: 1. Místo z množin otevřených bychom mohli vyjít z množin uzavřených, axiomatizovat vlastnosti 1.-3. z Věty 2.21 a definovat kotopologii místo topologie. Budovali bychom tím ale v podstatě tutéž teorii.
2. Nekonečný průnik otevřených množin obecně není otevřená množina. Podobně nekonečné sjednocení množin uzavřených nemusí být uzavřená množina (najděte příklady). V topologii se množiny, které jsou *spočetným* průnikem otevřených, resp. *spočetným* sjednocením uzavřených množin nazývají G_δ, resp. F_σ množiny. Toto zvláštní značení odkazuje na francouzské a německé výrazy:

F_σ :	$F =$ „Fermé“ $=$ uzavřený,	$\sigma =$ „somme“ $=$ suma/sjednocení,
G_δ :	$G =$ „Gebiet“ $\approx$ okolí (otev.),	$\delta =$ „durchschnitt“ $=$ průnik.

Jednou z obvyklých a užitečných metod, jak zadat topologii na množině, je pomocí báze.

Definice 2.22 (Báze)**:** Systém množin $\beta \subset \tau$ nazýváme *bází* topologického prostoru (X, τ) (též *bází* topologie τ), právě když každá množina $A \in \tau$ je sjednocením nějakých množin z β.

Poznámka: Přijímáme konvenci, že prázdné sjednocení množin je $\emptyset$. Proto i $\emptyset$ je sjednocením (nula) množin z β a to i v případě, že $\emptyset \notin \beta$.

Samozřejmě každý topologický prostor má bázi, neboť lze triviálně položit $\beta := \tau$. Protože $\tau = \{\cup\gamma \mid \gamma \subset \beta\}$, je topologie určena svojí bází jednoznačně. Naopak jeden topologický prostor může mít více bází.

Příklad 2.23: Uvažujme $X = \mathbb{R}$ s obvyklou topologií τ. Množina otevřených intervalů $\{(a, b) \mid a < b\}$ je bází τ. Jiný příklad (spočetné) báze τ je množina otevřených intervalů s racionálními krajními body $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$.

Příklad 2.24: V topologii metrického prostoru (X, ρ) je systém otevřených koulí $\{B_x(r) \mid x \in X, r > 0\}$ bází.

Věta 2.25: Nechť (X, τ) je topologický prostor. Systém množin $\beta \subset 2^X$ je báze (X, τ), právě když $\beta \subset \tau$ a $(\forall x \in X)(\forall H_x)(\exists B \in \beta)(x \in B \subset H_x)$.

Důkaz. Nechť β je báze τ, $x \in X$ a H_x okolí x. Protože $H_x \in \tau$, musí být H_x sjednocením množin z β, tedy

$$H_x = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha,$$

kde $B_\alpha \in \beta$ pro všechna $\alpha \in I$ a $I \neq \emptyset$ je indexová množina. Protože

$$x \in H_x = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha,$$

existuje $\alpha_0 \in I$ tak, že $x \in B_{\alpha_0}$. Položíme-li $B := B_{\alpha_0}$, máme $B \in \beta$ a $x \in B \subset H_x$.

Naopak předpokládejme, že je dán systém $\beta \subset \tau$ splňující $(\forall x \in X)(\forall H_x)(\exists B \in \beta)(x \in B \subset H_x)$. Ukážeme, že β je báze τ. Nechť $A \in \tau$. Potom k lib. $x \in A$ existuje $H_x \subset A$. Odtud plyne

$$A = \bigcup_{x \in A} H_x.$$

Z předpokladu dále víme, že ke každému H_x existuje $B = B_x \in \beta$ tak, že $x \in B_x \subset H_x$. Potom platí

$$A = \bigcup_{x \in A} B_x,$$

neboli A je sjednocením množin z β. □

Následující věta zcela odpovídá na otázku, jaké systémy podmnožin X mohou být bází topologie.

Věta 2.26: Je-li β bází topologického prostoru (X, τ), potom platí:

1. $\cup\beta = X$,
2. $(\forall A, B \in \beta)(\forall x \in A \cap B)(\exists C \in \beta)(x \in C \subset A \cap B)$.

Naopak, je-li $\beta \subset 2^X$ s vlastnostmi 1. a 2., potom je $\tau_\beta = \{\cup\gamma \mid \gamma \subset \beta\}$ topologie na X a β její báze.

Důkaz. Nechť β je báze topologie τ. Potom 1. platí, neboť $X \in \tau$. K ověření 2. mějme $A, B \in \beta$ a $x \in A \cap B$. Protože $\beta \subset \tau$, je množina $A \cap B \in \tau$, a tedy okolím x. Potom z Věty 2.25 vyplývá, že existuje $C \in \beta$ taková, že $x \in C \subset A \cap B$.

Předpokládejme naopak, že systém $\beta \subset 2^X$ má vlastnosti 1. a 2. Ukážeme, že $\tau_\beta = \{\cup\gamma \mid \gamma \subset \beta\}$ je topologie na X. Triviálně máme $\emptyset \in \tau_\beta$ a podle vlastnosti 1. také $X \in \tau_\beta$.

Ukážeme, že τ_β je uzavřený na lib. sjednocení. Dále budou řecká písmena α, α', μ označovat indexy z nějakých neprázdných indexových množin, které pro stručnost nebudeme explicitně vyznačovat. Mějme tedy $\{A_\alpha\}_\alpha \subset \tau_\beta$. Podle definice τ_β existují ke každému α množiny $B_\mu^{(\alpha)} \in \beta$ tak, že

$$A_\alpha = \bigcup_\mu B_\mu^{(\alpha)}.$$

Potom

$$\bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha \bigcup_\mu B_\mu^{(\alpha)},$$

neboli množina $\cup_\alpha A_\alpha$ je sjednocením množin z β, a proto $\cup_\alpha A_\alpha \in \tau_\beta$.

Nakonec ověříme, že τ_β je uzavřený na konečné průniky. Stačí ukázat implikaci

$$A, B \in \tau_\beta \;\Rightarrow\; A \cap B \in \tau_\beta.$$

Nejprve si všimněme, že pokud $B_1, B_2 \in \beta$, potom $B_1 \cap B_2 \in \tau_\beta$. Buďto totiž $B_1 \cap B_2 = \emptyset \in \tau_\beta$, nebo $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, a potom podle tvrzení 2. $(\forall x \in B_1 \cap B_2)(\exists C_x \in \beta)(x \in C_x \subset B_1 \cap B_2)$, z čehož plyne

$$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} C_x.$$

Tedy $B_1 \cap B_2 \in \tau_\beta$.

Jsou-li $A, B \in \tau_\beta$, potom

$$A = \bigcup_\alpha B_\alpha \quad \text{a} \quad B = \bigcup_{\alpha'} B_{\alpha'}$$

pro nějaké $\{B_\alpha\}_\alpha, \{B_{\alpha'}\}_{\alpha'} \subset \beta$. Proto lze průnik $A \cap B$ vyjádřit jako

$$A \cap B = \bigcup_\alpha B_\alpha \cap \bigcup_{\alpha'} B_{\alpha'} = \bigcup_{\alpha,\alpha'} B_\alpha \cap B_{\alpha'}.$$

Podle pozorování výše je $B_\alpha \cap B_{\alpha'} \in \tau_\beta$ pro každé α a α'. Protože už víme, že systém τ_β je uzavřený na lib. sjednocení, dostáváme konečně $A \cap B \in \tau_\beta$. □

Ještě jeden způsob, jak na množině zavést topologii, je velice obvyklý. Stačí předepsat dostatečně bohatý systém okolí každého bodu.

Definice 2.27 (Lokální báze)**:** Buď (X, τ) topologický prostor a $x \in X$. Systém okolí β_x bodu x nazveme *lokální bází v* x prostoru (X, τ), pokud platí $(\forall H_x)(\exists B \in \beta_x)(B \subset H_x)$.

Příklad 2.28: Uvažujme $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Potom systém

$$\beta_x = \{(x - \epsilon, x + \epsilon) \mid \epsilon > 0\}$$

je příklad lokální báze v $x \in \mathbb{R}$. Jiná lokální báze v x je např.

$$\tilde{\beta}_x = \{(x - 2\epsilon, x + 3\epsilon) \mid \epsilon > 0\}.$$

Mezi pojmy báze a lokální báze je úzká souvislost.

Věta 2.29: Nechť je pro každý bod x topologického prostoru (X, τ) dána lokální báze β_x. Potom jejich sjednocení $\cup_{x \in X} \beta_x$ je bází (X, τ). Naopak, je-li β báze (X, τ) a $x \in X$, potom $\beta_x := \{B \in \beta \mid x \in B\}$ je lokální bází v x.

Důkaz. Vyplývá okamžitě z příslušných definic a je přenechán čtenáři jako Cvičení 2.8. □

Je-li $X \neq \emptyset$ daná množina, lze na X zavést topologii tak, že ke každému bodu $x \in X$ definujeme neprázdný systém množin $\beta_x \subset 2^X$, kde každá množina z β_x obsahuje x a je „dostatečně bohatá“ v následujícím smyslu:

$$(\forall x, y \in X)(\forall A \in \beta_x)(\forall B \in \beta_y)(\forall z \in A \cap B)(\exists C \in \beta_z)(C \subset A \cap B).$$

Potom je totiž zaručena vlastnost 2. z Věty 2.26 pro systém $\beta := \cup_{x \in X} \beta_x$ (vlastnost 1. platí také), a proto je β bází topologie $\tau_\beta = \{\cup\gamma \mid \gamma \subset \beta\}$ a β_x lokální bází v x topologického prostoru (X, τ_β).

Tento způsob zavedení topologie na X předepsáním „dostatečně bohatých okolí“ všech bodů je velmi častý. Např. systém intervalů β_x z Příkladu 2.28 definuje obvyklou topologii na $\mathbb{R}$. Další příklady zavedení topologie pomocí lokálních bází najde čtenář ve Cvičeních 2.17 a 2.23.

Definice 2.30 (Vnitřek)**:** Buď (X, τ) topologický prostor a $A \subset X$. Největší otevřená podmnožina A (ve smyslu inkluze) se nazývá *vnitřek* A a značí A°, tzn.

$$A^\circ := \bigcup_{B \subset A, B \in \tau} B.$$

Bod $x \in A^\circ$ se nazývá *vnitřní bod* A.

Vlastnosti vnitřku množiny shrneme v následujícím tvrzení.

Věta 2.31: Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A, B \subset X$. Potom platí:

1. $A^\circ \subset A$ a $A^\circ \in \tau$,
2. $x \in A^\circ \;\Leftrightarrow\; (\exists H_x)(H_x \subset A)$,
3. $A \in \tau \;\Leftrightarrow\; A = A^\circ$,
4. $(A^\circ)^\circ = A^\circ$,
5. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$,
6. $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$,
7. $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$.

Poznámka: Rovnost v tvrzení 6. neplatí, viz Cvičení 2.10.

Důkaz Věty 2.31. Ověřit vlastnosti 1.-7. je jednoduché cvičení. Ověříme jen tvrzení 2.-5., zbytek je obsahem Cvičení 2.9.

2. Je-li $x \in A^\circ$, potom můžeme položit $H_x := A^\circ$ a tvrzení platí podle 1. Naopak předpokládejme, že existuje $H_x \subset A$. Protože $H_x \in \tau$, je okolí H_x jednou z množin B z definice vnitřku:

$$x \in H_x \subset \bigcup_{B \subset A, B \in \tau} B = A^\circ.$$

3. Je-li $A \in \tau$, je A jednou z množin B z definice A°, a proto $A \subset A^\circ$. A protože také $A^\circ \subset A$, máme $A^\circ = A$. Naopak, pokud

$$A = A^\circ = \bigcup_{B \subset A, B \in \tau} B,$$

je $A \in \tau$ podle 3. axiomu z definice topologie.

4. Využijeme-li již dokázané tvrzení 3., platí $(A^\circ)^\circ = A^\circ$, právě když $A^\circ \in \tau$, což platí podle 1.

5. Podle 2. je $x \in (A \cap B)^\circ$, právě když existuje H_x tak, že $H_x \subset A \cap B$. Neboli $H_x \subset A$ a současně $H_x \subset B$. To je opět podle 2. ekvivalentní tvrzení $x \in A^\circ$ a současně $x \in B^\circ$, neboli $x \in A^\circ \cap B^\circ$. □

Definice 2.32 (Uzávěr)**:** Buď (X, τ) topologický prostor a $A \subset X$. Nejmenší uzavřená nadmnožina A (ve smyslu inkluze) se nazývá *uzávěr* A a značí $\overline{A}$, tzn.

$$\overline{A} := \bigcap_{A \subset C, C \in c\tau} C.$$

Příklad 2.33: V prostoru $X = \mathbb{R}^2$ s obvyklou topologií uvažujme množinu $A = [0,1) \times [0,1)$. Potom $A^\circ = (0,1) \times (0,1)$ a $\overline{A} = [0,1] \times [0,1]$.

Věta 2.34: Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A, B \subset X$. Potom platí:

1. $A \subset \overline{A}$ a $\overline{A} \in c\tau$,
2. $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ$,
3. $x \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; (\forall H_x)(H_x \cap A \neq \emptyset)$,
4. $A \in c\tau \;\Leftrightarrow\; A = \overline{A}$,
5. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,
6. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
7. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$,
8. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

Poznámka: Rovnost v tvrzení 7. neplatí, viz Cvičení 2.12.

Důkaz Věty 2.34. Ověříme jen tvrzení 2.,3. a 6., zbytek si čtenář dokáže sám jako Cvičení 2.11.

2. Aplikací de Morganových zákonů dostaneme

$$X \setminus \overline{A} = X \setminus \bigcap_{A \subset C \in c\tau} C = \bigcup_{A \subset C \in c\tau} X \setminus C.$$

Přejdeme-li k doplňkům, můžeme psát

$$X \setminus \overline{A} = \bigcup_{X \setminus A \supset B, B \in \tau} B = (X \setminus A)^\circ,$$

z čehož dostáváme rovnost $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ$.

3. S využitím již dokázaného tvrzení 2. a také negací tvrzení 2. z Věty 2.31 dostáváme řetězec ekvivalencí:

$$x \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; x \notin (X \setminus A)^\circ \;\Leftrightarrow\; (\forall H_x)(H_x \cap A \neq \emptyset).$$

6. Můžeme použít již dokázanou identitu z bodu 2., de Morganovy zákony a tvrzení 5. z Věty 2.31. Tak dostaneme

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= X \setminus (X \setminus (A \cup B))^\circ = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B))^\circ = X \setminus ((X \setminus A)^\circ \cap (X \setminus B)^\circ) \\ &= (X \setminus (X \setminus A)^\circ) \cup (X \setminus (X \setminus B)^\circ) = \overline{A} \cup \overline{B}.\end{aligned}$$

□

Definice 2.35 (Hranice)**:** Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A \subset X$. Množinu $\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ$ nazýváme *hranicí* množiny A.

Příklad 2.36: Uvažujme $X = \mathbb{R}^2$ s obvyklou topologií a $A = [0,1) \times (0,1]$. Potom $\partial A = [0,1] \times \{0,1\} \cup \{0,1\} \times [0,1]$ (hranice čtverce).

Další příklad ukazuje, že hranice A nemusí být zcela intuitivní (ostatně jako i jiné pojmy z topologie) a může být dokonce nadmnožinou A.

Příklad 2.37: Uvažujme $X = \mathbb{R}$ s obvyklou topologií a množinu racionálních čísel $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Budeme potřebovat jednu vlastnost $\mathbb{Q}$, totiž že pro lib. $a < b$ obsahuje interval (a, b) nějaké racionální i iracionální číslo, kterou na tomto místě přijmeme jako známý fakt.

Nejprve si uvědomme, že $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$. Kdyby totiž existoval prvek $x \in \mathbb{Q}^\circ$, potom by muselo existovat $\epsilon > 0$, takové, že $B_x(\epsilon) = (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset \mathbb{Q}$, což uvedené tvrzení vylučuje. Z uvedené vlastnosti $\mathbb{Q}$ také plyne, že v libovolném okolí jakéhokoliv reálného čísla, leží nějaké racionální číslo, tj. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \epsilon > 0)(\exists q \in \mathbb{Q})(q \in B_x(\epsilon))$. Proto je $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Tudíž $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$, neboli hranicí racionálních čísel jsou čísla reálná.

Věta 2.38: Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A, B \subset X$. Potom platí:

1. $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A = A \cup \partial A$,
2. $\partial A = X \setminus (A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ a odtud speciálně plyne, že $\partial A \in c\tau$,
3. $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$,
4. $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$.

Poznámka: V tvrzeních 3. a 4. neplatí rovnost, viz Cvičení 2.14.

Důkaz Věty 2.38. Tvrzení 1. je triviální. Tvrzení 3. a 4. si dokáže čtenář jako Cvičení 2.14.

Tvrzení 2. plyne z definice hranice, tvrzení 2. Věty 2.34 a de Morganových zákonů, neboť máme

$$\begin{aligned}\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ &= (X \setminus (X \setminus A)^\circ) \setminus A^\circ = X \setminus (A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ) \\ &= (X \setminus A^\circ) \cap (X \setminus (X \setminus A)^\circ) = \overline{X \setminus A} \cap \overline{A}.\end{aligned}$$

□

Definice 2.39 (Hromadný bod, derivace, perfektní množina)**:** Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A \subset X$. Bod $x \in X$ nazveme *hromadným bodem množiny* A, právě když $(\forall H_x)(A \cap (H_x \setminus \{x\}) \neq \emptyset)$. Množinu hromadných bodů A nazýváme *derivace* A a značíme A'. Množinu A nazýváme *perfektní*, pokud $A = A'$.

Definice 2.40 (Izolovaný bod, izolátor, diskrétní množina)**:** Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A \subset X$. Bod $x \in A$ nazveme *izolovaným bodem množiny* A, právě když x není hromadný bod A, tzn. $(\exists H_x)(H_x \cap A = \{x\})$. Množinu izolovaných bodů A nazýváme *izolátor* A a značíme A^{i}. Množinu A nazýváme *diskrétní*, pokud $A = A^{\mathrm{i}}$.

Poznámka: Všimněte si, že hromadný bod A nemusí v množině A ležet, ale izolovaný bod A je vždy prvek A.

Příklad 2.41: Uvažujme $X = \mathbb{R}$ s obvyklou topologií, $A = (0,1) \cup \{2\}$, $B = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, a $C = \mathbb{N}$. Potom $A' = [0,1]$, $A^{\mathrm{i}} = \{2\}$, $B' = \{0\}$, $B^{\mathrm{i}} = B$, $C' = \emptyset$ a $C^{\mathrm{i}} = \mathbb{N}$.

Věta 2.42: Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A \subset X$. Potom platí:

1. $x \in A' \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{A \setminus \{x\}}$,
2. $\overline{A} = A' \cup A^{\mathrm{i}}$,
3. $A' \subset A \;\Leftrightarrow\; A = \overline{A}$.

Důkaz Věty 2.42. 1. Z definice hromadného bodu a tvrzení 3. Věty 2.34 plyne

$$x \in A' \;\Leftrightarrow\; (\forall H_x)((H_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset) \;\Leftrightarrow\; (\forall H_x)(H_x \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset) \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{A \setminus \{x\}}.$$

2. Z příslušných definic přímo plyne, že $A^{\mathrm{i}} \subset A \subset \overline{A}$ a podle z již dokázaného tvrzení 1. máme také $A' \subset \overline{A}$. Odtud $A' \cup A^{\mathrm{i}} \subset \overline{A}$.

Dokážeme opačnou inkluzi $\overline{A} \subset A' \cup A^{\mathrm{i}}$. Nechť $x \in \overline{A}$, potom máme $(\forall H_x)(H_x \cap A \neq \emptyset)$. Pokud je $x \notin A$, potom pro lib. H_x je $(H_x \setminus \{x\}) \cap A = H_x \cap A \neq \emptyset$, z čehož plyne $x \in A'$. Je-li naopak $x \in A$, potom musí být pravdivý jeden z výroků $(\forall H_x)((H_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset)$, nebo $(\exists H_x)((H_x \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset)$, neboť jsou komplementární. První ovšem znamená, že $x \in A'$. Kdežto druhý spolu s předpokladem $x \in A$ implikuje $x \in A^{\mathrm{i}}$.

3. Je-li $A' \subset A$, plyne z již dokázaného $\overline{A} = A' \cup A^{\mathrm{i}}$ a inkluze $A^{\mathrm{i}} \subset A$, že $\overline{A} \subset A$, což dokazuje implikaci $A' \subset A \;\Rightarrow\; A = \overline{A}$. Naopak, platí-li $A = \overline{A}$, je opačná implikace důsledkem inkluze $A' \subset \overline{A}$. □

V následující definici si zavedeme terminologii, která zde pro nás sice nebude mít zásadní význam, ale často se s ní v matematice setkáte, a proto je dobré pojmům rozumět.

Definice 2.43 (Hustá množina, separabilita)**:** Buď (X, τ) topologický prostor a $A, B \subset X$. Množinu $A \subset B$ nazveme *hustou v množině* B, pokud $\overline{A} \supset B$. Množina A se nazývá *hustá*, je-li hustá v X, tzn. $\overline{A} = X$. Prostor (X, τ) se nazývá *separabilní*, existuje-li v X hustá nejvýše spočetná množina.

Příklad 2.44: Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je hustá v topologickém prostoru $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií τ, neboť platí $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Protože je $\mathbb{Q}$ navíc spočetná, je $(\mathbb{R}, \tau)$ separabilní.

Některé vlastnosti, které se mohou jevit jako přirozené, jako je např. uzavřenost jednoprvkové množiny, uzavřenost množiny A', nebo inkluze $(A')' \subset A'$ neplatí v obecném topologickém prostoru, viz Cvičení 2.15 a 2.18. Podobný problém se týká nejednoznačnosti limity posloupnosti v topologickém prostoru, který uvidíme později (Příklad 2.49). Z těchto důvodů dále rozlišujeme topologické prostory pomocí tzv. *axiomů oddělitelnosti*.

Definice 2.45 (Axiomy oddělitelnosti)**:** Následující výroky nazýváme *axiom oddělitelnosti*:

$$T_0\colon\ (\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists H_x)(y \notin H_x) \vee (\exists H_y)(x \notin H_y), \qquad \textit{(Kolmogorov)}$$

$$T_1\colon\ (\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists H_x, H_y)(y \notin H_x \wedge x \notin H_y), \qquad \textit{(Fréchet)}$$

$$T_2\colon\ (\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists H_x, H_y)(H_x \cap H_y = \emptyset), \qquad \textit{(Hausdorff)}$$

$$T_3\colon\ (\forall A \in c\tau)(\forall x \notin A)(\exists H_x)(\exists U \supset A, U \in \tau)(H_x \cap U = \emptyset), \qquad \textit{(regulární)}$$

$$T_4\colon\ (\forall A, B \in c\tau, A \cap B = \emptyset)(\exists U \supset A, U \in \tau)(\exists V \supset B, V \in \tau)(U \cap V = \emptyset). \qquad \textit{(normální)}$$

Dále používáme následující názvosloví:

V (X, τ) platí axiom T_0 $\Leftrightarrow$ (X, τ) nazýváme T_0-*prostor*, alternativně *Kolmogorův*.
V (X, τ) platí axiom T_1 $\Leftrightarrow$ (X, τ) nazýváme T_1-*prostor*, alternativně *Frechétův*.
V (X, τ) platí axiom T_2 $\Leftrightarrow$ (X, τ) nazýváme T_2-*prostor*, alternativně *Hausdorffův*.
V (X, τ) platí axiom T_3 $\Leftrightarrow$ (X, τ) nazýváme *regulární*.
V (X, τ) platí axiom T_4 $\Leftrightarrow$ (X, τ) nazýváme *normální*.
V (X, τ) platí axiomy T_1 a T_3 $\Leftrightarrow$ (X, τ) nazýváme T_3-*prostor*.
V (X, τ) platí axiomy T_1 a T_4 $\Leftrightarrow$ (X, τ) nazýváme T_4-*prostor*.

Poznámka: Tedy (X, τ) je T_i-prostor, platí-li v něm axiom T_i a navíc v případě, že $i \in \{3, 4\}$, ještě požadujeme platnost axiomu T_1. Potom je každý T_i-prostor také T_{i-1}-prostor. Naopak pro každé $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ existují topologické prostory,v nichž platí axiom T_{i-1}, ale neplatí axiom T_i, viz Cvičení 2.19–2.23.

Fréchetovy prostory jsou charakterizovány tím, že jsou to právě takové topologické prostory, v nichž jsou singletony uzavřené množiny. Charakterizaci regulárních prostorů uvádí Cvičení 2.25.

Věta 2.46: Topologický prostor (X, τ) je Fréchetův, právě když $(\forall x \in X)(\{x\} \in c\tau)$.

Důkaz. Je-li $|X| = 1$, pak je tvrzení triviální. Předpokládejme dále, že $|X| \geq 2$.

Implikace ($\Rightarrow$): Buď $x \in X$. Ukážeme, že $X \setminus \{x\}$ je otevřená. Vezměme $y \in X \setminus \{x\}$. Protože $x \neq y$, plyne z axiomu T_1, že $(\exists H_y)(x \notin H_y)$. Neboli $H_y \subset X \setminus \{x\}$. Z toho plyne $X \setminus \{x\} \in \tau$.

Implikace ($\Leftarrow$): Nechť $x, y \in X, x \neq y$. Protože $y \in X \setminus \{x\}$ a $X \setminus \{x\}$ je podle předpokladu otevřená, existuje H_y takové, že $H_y \subset X \setminus \{x\}$, což znamená $x \notin H_y$. Podobný argument aplikovaný na $X \setminus \{y\}$ implikuje existenci H_x s vlastností $y \notin H_x$. $\square$

Věta 2.47: Nechť (X, τ) je Fréchetův topologický prostor a $A \subset X$. Potom platí:

1. $A' \in c\tau$,

2. $(A')' \subset A'$.

Poznámka: V 2. tvrzení neplatí rovnost, viz Cvičení 2.27. Předpoklad věty nelze zeslabit na Kolmogorův topologický prostor, viz Cvičení 2.17.

Důkaz Věty 2.47. Využijeme fakt, že ve Fréchetově prostoru je množina $H_x \setminus \{x\}$ otevřená pro lib. $x \in X$. To plyne z toho, že $H_x \setminus \{x\} = (X \setminus \{x\}) \cap H_x$ a $X \setminus \{x\}$ je otevřená podle Věty 2.46.

K důkazu tvrzení 1., ukážeme implikaci $x \notin A' \;\Rightarrow\; x \notin \overline{A'}$. Když $x \notin A'$, $\exists H_x$ takové, že $(H_x \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$. Mohou nastat dvě možnosti: buď $H_x \cap A = \emptyset$, nebo $H_x \cap A = \{x\}$. Je-li $H_x \cap A = \emptyset$, potom $x \notin \overline{A}$, a proto také $x \notin \overline{A'}$, neboť $\overline{A'} \subset \overline{A}$, což plyne z tvrzení 2. Věty 2.42.

Uvažujme dále variantu $H_x \cap A = \{x\}$. Pro spor předpokládejme, že $x \in \overline{A'}$. Potom $H_x \cap A' \neq \emptyset$. Protože podle předpokladu $x \notin A'$, je také $(H_x \setminus \{x\}) \cap A' \neq \emptyset$. Jinými slovy $\exists y \in A'$ a $y \in H_x \setminus \{x\}$. Protože $H_x \setminus \{x\} \in \tau$ (zde používáme pozorování udělané na začátku důkazu), je množina $H_x \setminus \{x\} =: H_y$ okolím y. Z toho, že $H_x \cap A = \{x\}$, ale vyplývá $H_y \cap A = \emptyset$, což znamená, že $y \notin A'$ a to je spor (s předchozím $y \in A'$).

K důkazu inkluze $(A')' \subset A'$ použijeme již dokázané $A' = \overline{A'}$ a tvrzení 2. Věty 2.42. Potom totiž

$$(A')' \subset (A')' \cup (A')^{\mathrm{i}} = \overline{A'} = A'.$$

$\square$

V topologickém prostoru můžeme také zavést pojem limita posloupnosti.

Definice 2.48 (Konvergence posloupnosti, limita)**:** Buď (X, τ) topologický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost z X. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje*, existuje-li $x \in X$ takové, že

$$(\forall H_x)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n \in H_x).$$

Bod x nazýváme *limitou* posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a značíme $x_n \to x$.

Poznámka: V definici limity posloupnosti lze místo všech okolí H_x uvažovat jen množiny nějaké lokální báze v x, tzn., že $x_n \to x$, právě když existuje β_x lokální báze v x tak, že

$$(\forall B \in \beta_x)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n \in B),$$

(ověřte).

Příklad 2.49: Uvažujme $X = [0,1]$ s topologií

$$\tau_{fin} := \emptyset \cup \{[0,1] \setminus F \mid F \subset [0,1] \text{ konečná}\}$$

(doplňky do konečných množin). Je jednoduché ověřit, že (X, τ_{fin}) je topologický prostor. Vezměme libovolnou prostou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $[0,1]$, tzn. $x_m \neq x_n$, pokud $m \neq n$. Potom každá neprázdná množina z τ_{fin} obsahuje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ až na konečný počet výjimek. Z toho plyne, že každý bod z $[0,1]$ je limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Předchozí příklad ukazuje, že limita posloupnosti v topologickém prostoru nemusí být určena jednoznačně. V Hausdorffově topologickém prostoru už taková situace nastat nemůže.

Věta 2.50: V Hausdorffově prostoru má každá posloupnost nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z Hausdorffova prostoru (X, τ) má dvě různé limity x' a x''. Protože $x' \neq x''$, axiom T_2 implikuje existenci okolí $H_{x'}$ a $H_{x''}$ takových, že $H_{x'} \cap H_{x''} = \emptyset$.

Protože $x_n \to x'$ a také $x_n \to x''$, existují podle definice limity $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$(\forall n \geq n_1)(x_n \in H_{x'}) \quad \text{a} \quad (\forall n \geq n_2)(x_n \in H_{x''}).$$

Odtud plyne, že pro každé $n \geq \max(n_1, n_2)$ je $x_n \in H_{x'} \cap H_{x''}$, což je ve sporu s tím, že $H_{x'} \cap H_{x''} = \emptyset$. □

Příklad 2.51: Uvažujme množinu rozšířených reálných čísel $X = \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ s obvykle definovaným uspořádáním, kde speciálně platí $a < +\infty$ a $b > -\infty$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Na $\overline{\mathbb{R}}$ můžeme zavést topologii pomocí lokální báze v každém bodě:

$$\beta_x := \begin{cases} \{(x-\epsilon, x+\epsilon) \mid \epsilon > 0\}, & \text{je-li } x \in \mathbb{R}, \\ \{(K, \infty] \mid K \in \mathbb{R}\}, & \text{je-li } x = +\infty, \\ \{[-\infty, K) \mid K \in \mathbb{R}\}, & \text{je-li } x = -\infty. \end{cases}$$

Potom topologická definice limity posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ splývá s obvyklou definicí, tzn.

$$x_n \to x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(|x_n - x| < \epsilon)$$

a

$$\begin{aligned} x_n \to +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall K \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n > K), \\ x_n \to -\infty \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall K \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n < K). \end{aligned}$$

Připomeňme, že každý metrický prostor je i prostor topologický s topologií indukovanou metrikou. Všimněte si, že v metrickém prostoru (X, ρ) můžeme definici limity posloupnosti vyjádřit:

$$\begin{aligned} x_n \to x \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\rho(x, x_n) < \epsilon) \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \rho(x, x_n) = 0. \end{aligned}$$

V metrických prostorech lze topologické vlastnosti jako je vnitřek, uzávěr, hranice, derivace a izolátor množiny charakterizovat pomocí limity posloupnosti.

Věta 2.52: Buď (X, ρ) metrický prostor a $A \subset X$. Potom platí:

1. $x \in A^\circ \;\Leftrightarrow\; (\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X)\,(x_n \to x \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n \in A))\,,$
2. $x \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; (\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A)(x_n \to x),$
3. $x \in \partial A \;\Leftrightarrow\; (\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A)(x_n \to x) \;\wedge\; (\exists \{y_n\}_{n=1}^\infty \subset X \setminus A)(y_n \to x),$
4. $x \in A' \;\Leftrightarrow\; (\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A \setminus \{x\})(x_n \to x),$
5. $x \in A^{\mathrm{i}} \;\Leftrightarrow\; (\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A)\,(x_n \to x \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n = x))\,.$

Důkaz. Dokážeme pouze 1. ekvivalenci. Zbytek důkazu se provede podobně a je přenechán čtenáři jako Cvičení 2.28.

Nechť $x \in A^\circ$. Potom $\exists r > 0$ tak, že $B_x(r) \subset A$. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ a $x_n \to x$, potom z definice limity plyne $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n \in B_x(r) \subset A)$.

Naopak pokud $x \notin A^\circ$, potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$B_x\left(\frac{1}{n}\right) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$

Zvolme libovolně

$$x_n \in B_x\left(\frac{1}{n}\right) \cap (X \setminus A)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom $x_n \to x$ a přitom $x_n \notin A$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Další věta říká, že v každém metrickém prostoru platí axiom oddělitelnosti T_4.

Věta 2.53: Topologický prostor, jehož topologie je indukovaná metrikou, je normální.

Důkaz. Nechť (X, τ) je topologický prostor s topologií indukovanou metrikou ρ. V důkazu ověříme platnost axiomu T_4 v (X, τ). Nejprve ale dokážeme následující jednoduché pozorování.

Lemma 2.54: Buď (X, ρ) metrický prostor, $A = \overline{A} \neq \emptyset$ a $x \in X$. Potom

$$d(x, A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in A.$$

Zde $d(x, A) \equiv d(\{x\}, A) = \inf\{\rho(x, y) \mid y \in A\}$.

Důkaz Lemma 2.54. Implikace $(\Leftarrow)$ je triviální. Ukážeme opačnou implikaci $(\Rightarrow)$. Je-li $d(x, A) = 0$, potom z definice infima množiny musí existovat posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ prvků z A taková, že $y_n \to x$. Z toho plyne podle 2. tvrzení Věty 2.52, že $x \in \overline{A} = A$. $\square$

Mějme nyní $A, B \in c\tau$, $A \cap B = \emptyset$. Položme

$$\text{pro } x \in A: \quad r_x := \frac{1}{3} d(x, B) \quad \text{a} \quad U_x := B_x(r_x),$$
$$\text{pro } y \in B: \quad r_y := \frac{1}{3} d(y, A) \quad \text{a} \quad V_y := B_y(r_y).$$

Podle dokázaného lemma je $(\forall x \in A)(r_x > 0)$, neboť $x \notin B$, jinak by $A \cap B \neq \emptyset$. Podobně $(\forall y \in B)(r_y > 0)$. Dále definujme množiny

$$U := \bigcup_{x \in A} U_x \quad \text{a} \quad V := \bigcup_{y \in B} V_y.$$

Množiny U a V jsou otevřené, protože jsou dány sjednocením otevřených množin. Dále také $A \subset U$ a $B \subset V$. K tomu, aby byla platnost axiomu T_4 ověřena, zbývá ukázat, že $U \cap V = \emptyset$.

Pro spor předpokládejme, že $U \cap V \neq \emptyset$. Potom by musely existovat $x \in A$ a $y \in B$ tak, že $U_x \cap V_y \neq \emptyset$. Vezměme $z \in U_x \cap V_y$. Potom z definice množin U_x a V_y plyne, že

$$\rho(x, z) < r_x \quad \text{a} \quad \rho(y, z) < r_y.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $r_y \leq r_x$. Potom s použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$3r_x = d(x, B) \leq \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) < r_x + r_y \leq 2r_x,$$

což implikuje logický spor $3 < 2$. □

Nakonec si ještě vysvětlíme pojem topologický podprostor.

Definice 2.55: (Topologický podprostor) Buď (X, τ) topologický prostor a $Y \subset X$. Dvojici (Y, τ_Y), kde

$$\tau_Y := \{A \cap Y \mid A \in \tau\},$$

nazýváme *topologický podprostor* prostoru (X, τ).

Poznámka: Snadno se ověří, že topologický podprostor je topologický prostor (proveďte).

Věta 2.56: Nechť (Y, τ_Y) je topologický podprostor prostoru (X, τ). Potom platí:

1. $B \in c\tau_Y \;\Leftrightarrow\; (\exists C \in c\tau)(B = C \cap Y)$.
2. H_y^Y je okolí bodu $y \in Y$ v $(Y, \tau_Y) \;\Leftrightarrow\; (\exists H_y^X$ okolí y v $(X, \tau))(H_y^Y = H_y^X \cap Y)$.

Důkaz. Proveďte jako Cvičení 2.30. □

Příklad 2.57: Uvažujme $X = \mathbb{R}$ s obvyklou topologií τ a $Y = (0, 2]$. Všimněte si, že množina $(0, 1]$, která není ani otevřená, ani uzavřená v (X, τ), je uzavřená v (Y, τ_Y). Podobně je množina $(1, 2]$ otevřená v prostoru (Y, τ_Y).

Ještě jednou zdůrazníme na následujícím příkladu, že pokud pracujeme s topologickými pojmy jako je uzávěr, vnitřek, hranice, atd., je třeba mít vždy na paměti, jakou topologii uvažujeme.

Příklad 2.58: Buď $X = \mathbb{R}^2$ s obvyklou topologií τ a $Y = [0, 1] \times \{0\}$. Uvažujme množinu $A = (0, 1) \times \{0\}$. Potom *v topologickém prostoru* (X, τ) máme

$$A^\circ = \emptyset, \quad \overline{A} = [0, 1] \times \{0\}, \quad \partial A = [0, 1] \times \{0\},$$

kdežto *v topologickém prostoru* (Y, τ_Y) platí

$$A^\circ = (0, 1) \times \{0\}, \quad \overline{A} = [0, 1] \times \{0\}, \quad \partial A = \{(0, 0), (1, 0)\}.$$

2.3 Spojitost

Pojem *spojité zobrazení* hraje v matematické analýze důležitou roli a lze zavést už na velmi abstraktní úrovni pro zobrazení mezi dvěma topologickými prostory.

Definice 2.59 (Spojitost v bodě, spojitost)**:** Buď $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ zobrazení mezi dvěma topologickými prostory (X, τ_X) a (Y, τ_Y). Řekneme, že zobrazení f *je spojité v bodě* $x \in X$, právě když

$$(\forall H_{f(x)})(\exists H_x)(f(H_x) \subset H_{f(x)}).$$

Dále zobrazení f nazveme *spojité*, je-li f spojité v každém bodě $x \in X$.

Poznámka: Spojitost je topologická vlastnost. Tzn., že závisí na topologiích τ_X a τ_Y na X a Y. Zdůrazněme, že H_x z definice spojitosti je okolím x v topologii τ_X a $H_{f(x)}$ okolím $f(x)$ v topologii τ_Y. Ve značení tuto skutečnost ale nebudeme speciálně vyznačovat. Budeme také občas stručněji psát $f : X \to Y$ je spojité, namísto přesného $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ je spojité.

Poznámka: V definici spojitosti f v bodě x lze místo okolí uvažovat jen množiny nějakých lokálních bází v bodech x a $f(x)$, tzn., že f je spojité v x, právě když existují lokální báze β_x a $\beta_{f(x)}$ v bodech x a $f(x)$ takové, že

$$(\forall B \in \beta_{f(x)})(\exists C \in \beta_x)(f(C) \subset B).$$

Na tomto místě je dobré si rozmyslet, že obvyklá „ϵ–δ definice" spojitosti funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě x_0:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \delta)(|f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

je speciální případ uvedené obecné (topologické) definice, kde $\mathbb{R}$ uvažujeme s obvyklou topologií. Zde se rozumí, že je f definovaná na celém $\mathbb{R}$. Pokud je funkce f definovaná jen na nějaké podmnožině $D_f \subset \mathbb{R}$, chápeme D_f jako topologický podprostor $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií a „ϵ–δ definice" má potom podobu

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f,\ |x - x_0| < \delta)(|f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

Příklad 2.60: Uvažujme obvyklé topologie a $f : [0, 1] \cup (2, 3] \to \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{je-li } x \in [0, 1], \\ x - 1, & \text{je-li } x \in (2, 3]. \end{cases}$$

Potom je f spojitá funkce.

Odtud dále, pokud nebude topologie na množinách $\mathbb{R}^n$ specifikována, budeme uvažovat topologii obvyklou.

Obecněji než v předchozí situaci s reálnou funkcí, avšak docela analogicky je definice spojitosti zobrazení $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ mezi metrickými prostory v bodě $x_0 \in X$ ekvivalentní výroku

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X,\ \rho(x, x_0) < \delta)(\sigma(f(x), f(x_0)) < \epsilon),$$

neboli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in B_{x_0}(\delta))(f(x) \in\ B_{f(x_0)}(\epsilon)).$$

Věta 2.61: Buďte (X, τ_X) a (Y, τ_Y) topologické prostory a $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. f je spojité.

2. Vzor otevřené množiny je otevřená množina, tj.
$$(\forall A \in \tau_Y)(f^{-1}(A) \in \tau_X).$$

3. Vzor uzavřené množiny je uzavřená množina, tj.
$$(\forall B \in c\tau_Y)(f^{-1}(B) \in c\tau_X).$$

Důkaz. K důkazu ekvivalence 2. a 3. tvrzení si stačí uvědomit, že pro lib. $A \subset Y$ je $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(Y \setminus A) = X$ a že tento rozklad je disjunktní. Potom už stačí vyžít toho, že otevřené a uzavřené množiny jsou vzájemně komplementární. Dále ukážeme ekvivalenci 1. a 2. tvrzení.

Implikace $2. \Rightarrow 1.$: Pro lib. zvolené $x \in X$ stačí položit $A = H_{f(x)}$ a tvrzení 2. potom říká, že $f^{-1}(H_{f(x)})$ je otevřená. Navíc z definice vzoru je $x \in f^{-1}(H_{f(x)})$. Proto musí existovat H_x tak, že $H_x \subset f^{-1}(H_{f(x)})$, neboli $f(H_x) \subset H_{f(x)}$.

Implikace $1. \Rightarrow 2.$: Nechť $A \in \tau_Y$. Potom je buď $f^{-1}(A) = \emptyset$ a tvrzení platí triviálně, nebo $f^{-1}(A) \neq \emptyset$. Předpokládejme, že $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ a zvolme $x \in f^{-1}(A)$. Potom je $f(x) \in A \in \tau_Y$, a proto $(\exists H_{f(x)})(H_{f(x)} \subset A)$. Protože je navíc dle předpokladu f spojitá v x, musí
$$(\exists H_x)(f(H_x) \subset H_{f(x)} \subset A),$$
neboli
$$(\exists H_x)(H_x \subset f^{-1}(A)),$$
a proto je $f^{-1}(A) \in \tau_X$. $\square$

Definice 2.62 (Homeomorfismus, homeomorfní prostory)**:** Zobrazení $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ nazveme *homeomorfismus*, právě když je f bijekce a f i f^{-1} jsou spojité. Topologické prostory (X, τ_X) a (Y, τ_Y) nazýváme *homeomorfní*, existuje-li $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ homeomorfismus.

Poznámka: „Být homeomorfní“ je relace ekvivalence na množině topologických prostorů.

Následující příklad ukazuje, že je-li $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ prosté a spojité, f^{-1} nemusí být nutně spojité, viz také Cvičení 2.32. Tzn., že požadavek, aby f^{-1} bylo spojité, není v definici homeomorfismu nadbytečný.

Příklad 2.63: Uvažujme ještě jednou zobrazení f z Příkladu 2.60, které je spojité a také prosté. Inverzní zobrazení snadno určíme:
$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & \text{je-li } y \in [0,1], \\ y+1, & \text{je-li } y \in (1,2]. \end{cases}$$

Zřejmě ale f^{-1} není spojité.

Homeomorfismus zachovává topologické vlastnosti, tzn. vlastnosti závislé jen na zvolené topologii jako je např. otevřenost množiny apod. Následující věta je okamžitý důsledek Věty 2.61 a příslušných definic.

Věta 2.64: Nechť $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ je homeomorfismus topologických prostorů (X, τ_X) a (Y, τ_Y). Potom pro každé $A \subset X$ platí:

1. $A \in \tau_X \quad \Leftrightarrow \quad f(A) \in \tau_Y$,
2. $A \in c\tau_X \quad \Leftrightarrow \quad f(A) \in c\tau_Y$,
3. $f(A^\circ) = (f(A))^\circ$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ a $f(\partial A) = \partial(f(A))$.

Jiné vlastnosti než topologické, jako je např. omezenost množiny, homeomorfismus nezachovává, viz Cvičení 2.34.

Definice 2.65 (Ekvivalence metrik, ekvivalence norem)**:** Dvě metriky na množině $X \neq \emptyset$ nazveme *(topologicky) ekvivalentní*, pokud indukují tutéž topologii na X. Dále dvě normy na lineárním prostoru V nazveme *ekvivalentní*, pokud indukují ekvivalentní metriky na V.

Poznámka: Metriky ρ a σ na množině $X \neq \emptyset$ jsou ekvivalentní, právě když identické zobrazení $\mathrm{id} : (X, \rho) \to (X, \sigma)$ je homeomorfismus.

Věta 2.66: Buď V lineární prostor a $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ normy na V. Potom normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, právě když

$$(\exists c, \tilde{c} > 0)(\forall x \in V)(c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \tilde{c}\|x\|_1).$$

Důkaz. Implikace $(\Rightarrow)$: Připomeňme, že v obecném normovaném prostoru $(V, \|\cdot\|)$ platí:

$$\overline{B_x(r)} = C_x(r) \equiv \{y \in V \mid \|x - y\| \leq r\}$$

pro lib. $x \in V$ a $r > 0$, viz Cvičení 2.6.

Předpokládejme, že jsou normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ na V ekvivalentní. Indukují tedy tutéž topologii na V. Uvažujme jednotkovou kouli

$$B_0^{(1)}(1) := \{y \in V \mid \|y\|_1 < 1\}$$

v prostoru $(V, \|\cdot\|_1)$. Množina $B_0^{(1)}(1)$ je otevřená v $(V, \|\cdot\|_1)$, a proto je podle předpokladu také otevřená v $(V, \|\cdot\|_2)$. Potom existuje $c > 0$ takové, že

$$B_0^{(2)}(c) := \{y \in V \mid \|y\|_2 < c\} \subset B_0^{(1)}(1).$$

Přejdeme-li v poslední inkluzi k uzávěrům v topologii indukované jak $\|\cdot\|_1$, tak $\|\cdot\|_2$ (je stejná), potom dostáváme inkluzi

$$\{y \in V \mid \|y\|_2 \leq c\} \subset \{y \in V \mid \|y\|_1 \leq 1\},$$

neboli

$$(\forall y \in V)(\|y\|_2 \leq c \ \Rightarrow \ \|y\|_1 \leq 1).$$

Pro $x = 0$ tvrzení triviálně platí. Pro $x \neq 0$ položme

$$y := c\frac{x}{\|x\|_2}.$$

Potom je $\|y\|_2 = c$ a podle odvozené implikace

$$1 \geq \|y\|_1 = c\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2},$$

neboli

$$\|x\|_2 \geq c\|x\|_1,$$

což je jedna z nerovností, kterou bylo třeba dokázat. Obdobný postup s prohozenou rolí norem $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ dokazuje druhou nerovnost.

Implikace ($\Leftarrow$): Dokážeme implikaci

$$A \subset V \text{ je otevřená v } (V, \|\cdot\|_2) \;\Rightarrow\; A \text{ je otevřená v } (V, \|\cdot\|_1).$$

Opačná implikace se potom opět dokáže analogicky. Získaná ekvivalence implikuje, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ indukují tutéž topologii na V a jsou proto ekvivalentní.

Pro $A = \emptyset$ implikace platí. Nechť $\emptyset \neq A \subset V$ je otevřená v $(V, \|\cdot\|_2)$ a $x \in A$. Potom existuje $r > 0$ tak, že

$$B_x^{(2)}(r) := \{y \in V \mid \|x - y\|_2 < r\} \subset A.$$

Nyní si stačí všimnout, že

$$B_x^{(1)}\left(\frac{r}{\tilde{c}}\right) := \left\{y \in V \;\middle|\; \|x - y\|_1 < \frac{r}{\tilde{c}}\right\} \subset B_x^{(2)}(r),$$

neboť pro $y \in B_x^{(1)}(r/\tilde{c})$ je podle předpokladu

$$\|x - y\|_2 \leq \tilde{c}\|x - y\|_1 < \tilde{c}\frac{r}{\tilde{c}} = r.$$

Celkem tedy máme

$$B_x^{(1)}\left(\frac{r}{\tilde{c}}\right) \subset B_x^{(2)}(r) \subset A,$$

a proto je množina A otevřená také v $(V, \|\cdot\|_1)$. $\square$

Poznámka: Podobné tvrzení jako Věta 2.66 neplatí pro metriky. Vlastnost

$$(\exists c, \tilde{c} > 0)(\forall x, y \in X)\left(c\rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq \tilde{c}\rho(x, y)\right)$$

se nazývá *silná ekvivalence* metrik ρ a σ na X. Silná ekvivalence metrik implikuje ekvivalenci metrik, ale ne naopak. Hlouběji se zde touto problematikou nebudeme zabývat.

Připomeňme, že topologii na $\mathbb{R}^n$ určenou Euklidovskou 2-normou jsme označovali jako *obvyklou.* Následující příklad ukazuje, že všechny p-normy jsou na $\mathbb{R}^n$ ekvivalentní. Všechny tedy indukují na $\mathbb{R}^n$ obvyklou topologii. Později dokonce ukážeme, že libovolné dvě normy na *konečnědimenzionálním* lineárním prostoru jsou ekvivalentní.

Příklad 2.67: Buď $p \geq 1$. Pro lib. $x \in \mathbb{R}^n$ je

$$\left(\max_{i\in\hat{n}} |x_i|\right)^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leq n \left(\max_{i\in\hat{n}} |x_i|\right)^p.$$

Z toho plyne, že pro $\forall x \in \mathbb{R}^n$, platí

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{n}\|x\|_\infty.$$

Tedy normy $\|\cdot\|_p$ a $\|\cdot\|_\infty$ jsou na $\mathbb{R}^n$ ekvivalentní. Protože je ekvivalence norem skutečně relace ekvivalence, speciálně je tranzitivní, jsou $\|\cdot\|_p$ a $\|\cdot\|_{p'}$ ekvivalentní na $\mathbb{R}^n$ pro libovolné $p, p' \in [1, \infty]$.

Na rozdíl od spojitosti zobrazení k definici *stejnoměrné spojitosti* již potřebujeme metriku.

Definice 2.68 (Stejnoměrná spojitost)**:** Buďte (X, ρ) a (Y, σ) metrické prostory. Zobrazení $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ nazveme *stejnoměrně spojité* (na X), právě když

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in X, \rho(x, y) < \delta)(\sigma(f(x), f(y)) < \epsilon).$$

Samozřejmě zobrazení spojité stejnoměrně je také spojité. Spojitost je ale lokální vlastností zobrazení f, kdežto stejnoměrná spojitost je vlastnost globální. Množina, na které je zobrazení definováno/uvažováno hraje důležitou roli. Rozmyslete si rozdíl na následujících jednoduchých příkladech.

Příklad 2.69: Funkce $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ je spojitá, tj. spojitá v každém bodě intervalu $(0, 1)$, ale není spojitá stejnoměrně.

Příklad 2.70: Funkce $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ je spojitá stejnoměrně.

Příklad 2.71: Funkce $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ je spojitá, ale není spojitá stejnoměrně.

Příklad 2.72: Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sin x$ je spojitá stejnoměrně.

Další fundamentální pojem v analýze je *limita zobrazení.*

Definice 2.73 (Limita zobrazení vzhledem k množině, limita zobrazení)**:** Nechť $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ je zobrazení mezi topologickými prostory, $\emptyset \neq A \subset X$ a x_0 hromadný bod A. Řekneme, že f má *limitu* $y \in Y$ *pro* $x \to x_0$ *vzhledem k množině* A, právě když

$$(\forall H_y)(\exists H_{x_0})(\forall x \in (H_{x_0} \setminus \{x_0\}) \cap A)(f(x) \in H_y).$$

Tuto skutečnost zapisujeme

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} f(x) = y.$$

Je-li speciálně $A = X$, říkáme jen, že f má *limitu* $y \in Y$ *pro* $x \to x_0$ a píšeme

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y.$$

Poznámka: Všimněte si, že limitu zobrazení definujeme pouze v *hromadném bodě* množiny A.

Opět je dobré si uvědomit, že speciálně pro funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je obecná definice limity ekvivalentní klasické ϵ–δ definici známé z 1. ročníku. Obecněji pro zobrazení $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ mezi metrickými prostory má ϵ–δ definice limity

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = y$$

tvar

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A, 0 < \rho(x, x_0) < \delta)(\sigma(f(x), y) < \epsilon).$$

Věta 2.74: Buď $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ a x_0 hromadný bod X. Potom je f spojité v bodě x_0, právě když

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Důkaz. Plyne okamžitě z příslušných definic. □

Limitu zobrazení a limitu posloupnosti dává v metrických prostorech do souvislosti Heineho věta.

Věta 2.75 (Heine)**:** Buďte (X, ρ), (Y, σ) metrické prostory, $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, $\emptyset \neq A \subset X$, $x_0 \in A'$ a $y \in Y$. Potom

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = y,$$

právě když

$$(\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{x_0\})(x_n \to x_0 \;\Rightarrow\; f(x_n) \to y).$$

Důkaz. Implikace $(\Rightarrow)$: Předpokládejme, že

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = y$$

a uvažujme $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{x_0\}$ takovou, že $x_n \to x_0$. Zvolme $\epsilon > 0$. Z předpokladu plyne, že

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \setminus \{x_0\}, \rho(x, x_0) < \delta)(\sigma(f(x), y) < \epsilon).$$

Protože $x_n \to x_0$, musí

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\rho(x_n, x_0) < \delta),$$

a proto je také

$$(\forall n \geq n_0)(\sigma(f(x_n), y) < \epsilon).$$

Celkem tedy dostáváme

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\sigma(f(x_n), y) < \epsilon),$$

což znamená, že $f(x_n) \to y$.

Implikace ($\Leftarrow$): Předpokládejme naopak, že *neplatí*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = y.$$

Potom

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in A \setminus \{x_0\})(\rho(x, x_0) < \delta \ \wedge \ \sigma(f(x), y) \geq \epsilon).$$

Volíme-li postupně v posledním výroku $\delta := 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}$, zkonstruujeme tak posloupnost bodů $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ s vlastnostmi

$$\rho(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad \sigma(f(x_n), y) \geq \epsilon$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. První vlastnost znamená, že $x_n \to x_0$ a druhá implikuje, že není pravda, že $f(x_n) \to y$. $\square$

2.4 Kompaktnost

Definice 2.76 (Otevřené pokrytí, podpokrytí)**:** Buď (X, τ) topologický prostor. Systém otevřených množin $\mathcal{U} \subset \tau$ nazveme *otevřené pokrytí* X, právě když

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X.$$

Systém $\mathcal{U}' \subset \tau$ nazveme *podpokrytí* $\mathcal{U}$, právě když $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ a $\mathcal{U}'$ je otevřené pokrytí X.

Příklad 2.77: Systém $\mathcal{U} = \{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Systém $\{(-2n, 2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je podpokrytí $\mathcal{U}$, kdežto systém $\{(-n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ není podpokrytí $\mathcal{U}$.

Definice 2.78 (Kompaktní prostor, kompaktní množina)**:** Topologický prostor (X, τ) nazveme *kompaktní*, pokud každé otevřené pokrytí X má konečné podpokrytí, tzn.

$$(\forall \mathcal{U} \text{ otevřené pokrytí } X)(\exists n \in \mathbb{N}, \exists U_1, \ldots U_n \in \mathcal{U}) \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i \supset X \right).$$

Množinu $\emptyset \neq A \subset X$ nazveme *kompaktní*, je-li (A, τ_A) kompaktní jakožto topologický podprostor (X, τ). Prázdnou množinu také řadíme mezi kompaktní množiny.

Poznámka: Rozmyslete si, že z předchozí definice vyplývá, že podmnožina A topologického prostoru (X, τ) je kompaktní, právě když

$$(\forall \{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau) \left(A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \right) (\exists n \in \mathbb{N})(\exists \alpha_1, \ldots \alpha_n \in I) \left(A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \right).$$

Příklad 2.79: Z definice ihned plyne, že každá konečná množina je kompaktní. Další příklad kompaktní množiny v $\mathbb{R}$ (s obvyklou topologií) je uzavřený interval $[a, b]$, kde $-\infty < a < b < \infty$. Obecněji uzavřený n-interval $\times_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall i \in \hat{n})(a_i \leq x_i \leq b_i)\}$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^n$. Důkaz tohoto tvrzení ale není triviální a dokážeme si ho až později.

Příklad 2.80: Prostor $\mathbb{R}$ není kompaktní, neboť např. z otevřeného pokrytí $\{(-n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ nelze vybrat konečné podpokrytí $\mathbb{R}$. Podobně interval $(0,1]$ není kompaktní množina, protože z otevřeného pokrytí $\{(1/n,1] \mid n \in \mathbb{N}\}$ intervalu $(0,1]$ nelze vybrat konečné podpokrytí.

Nejprve si dokážeme několik obecných vlastností kompaktních množin. Začneme s tím, že uzavřená podmnožina kompaktního prostoru je kompaktní.

Věta 2.81: Buď (X,τ) kompaktní topologický prostor a $A \subset X$ uzavřená. Potom A je kompaktní.

Důkaz. Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí A. Potom $\mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ je otevřené pokrytí kompaktního prostoru X, a proto z něj lze vybrat konečné podpokrytí X. Tzn., že $\exists \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ konečné takové, že $\mathcal{U}' \cup \{X \setminus A\}$ je otevřené pokrytí X. Tedy $\mathcal{U}'$ je konečné podpokrytí $\mathcal{U}$ množiny A. □

Věta 2.82: Nechť (X,τ) je Hausdorffův prostor a $A \subset X$ kompaktní. Potom je A uzavřená.

Poznámka: Předpoklad, že (X,τ) je Hausdorffův, je podstatný. Příklad ilustrující neplatnost věty v T_1-prostorech ukazuje Cvičení 2.36.

Důkaz Věty 2.82. Nechť A je kompaktní. Ukážeme, že $X \setminus A$ je otevřená. Pro $A = X$ je tvrzení triviální.

Nechť $A \neq X$ a $x \in X \setminus A$. Potom axiom T_2 implikuje

$$(\forall y \in A)(\exists H_x^{(y)}, H_y)(H_x^{(y)} \cap H_y = \emptyset),$$

kde $H_x^{(y)}$ označuje okolí x, které ovšem závisí na $y \in A$. Systém $\{H_y \mid y \in A\}$ je otevřené pokrytí A, neboť

$$A \subset \bigcup_{y \in A} H_y.$$

Jelikož je A kompaktní, existuje $n \in \mathbb{N}$ a body $y_1, \dots y_n \in A$ tak, že $\{H_{y_1}, \dots H_{y_n}\}$ je otevřené pokrytí A. Navíc máme

$$(\forall i \in \hat{n})(H_x^{(y_i)} \cap H_{y_i} = \emptyset).$$

Označme

$$H_x := \bigcap_{i=1}^{n} H_x^{(y_i)}.$$

Potom H_x je okolí x takové, že

$$(\forall i \in \hat{n})(H_x \cap H_{y_i} = \emptyset).$$

Navíc

$$H_x \cap A \subset H_x \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} H_{y_i} \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (H_x \cap H_{y_i}) = \emptyset,$$

neboli $H_x \subset X \setminus A$. □

Následuje ekvivalentní charakteristika kompaktnosti.

Věta 2.83: Topologický prostor (X,τ) je kompaktní, právě když každý systém *uzavřených* množin z X, jehož libovolný konečný podsystém má neprázdný průnik, má neprázdný průnik, tzn.

$$(\forall \mathcal{T} \subset c\tau)\left((\forall \mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ konečné })\left(\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset\right) \Rightarrow \bigcap \mathcal{T} \neq \emptyset\right).$$

Důkaz. Dokážeme ekvivalenci pro větu obměněnou: (X,τ) je kompaktní, právě když

$$(\forall \mathcal{T} \subset c\tau)\left(\bigcap \mathcal{T} = \emptyset \Rightarrow (\exists \mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ konečné })\left(\bigcap \mathcal{F} = \emptyset\right)\right).$$

Označme si množiny systému $\mathcal{T} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$, kde $I \neq \emptyset$ je indexová množina a $B_\alpha := X \setminus A_\alpha$. Podle de Morganových zákonů je

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = X \setminus \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad X \subset \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha.$$

Je-li X kompaktní, potom $\exists n \in \mathbb{N}$ a $\exists \alpha_1,\dots \alpha_n \in I$ tak, že

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\alpha_i},$$

což je ekvivalentní

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i} = \emptyset.$$

Opačnou implikaci dokážeme obdobně. □

Důsledek 2.84 (Cantor)**:** Buď (X,τ) kompaktní topologický prostor, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost *uzavřených neprázdných* množin z X taková, že $A_{n+1} \subset A_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

Důkaz. Buď $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}$ konečná. Protože $(\forall n \in \mathbb{N})(A_{n+1} \subset A_n)$ je

$$\bigcap_{n\in\mathcal{F}} A_n = A_{\max \mathcal{F}} \neq \emptyset$$

podle předpokladu. Aplikace Věty 2.83 nyní implikuje tvrzení. □

Naším dalším cílem je tzv. sekvenční kompaktnost. Důležitou roli budou hrát posloupnosti, které obsahují konvergentní podposloupnost. My se ale nejprve na chvíli zastavíme u obecnějšího pojmu *hromadná hodnota posloupnosti.*

Definice 2.85: (Hromadná hodnota posloupnosti) Buď (X,τ) topologický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost v X. Bod $x \in X$ nazveme *hromadná hodnota* posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, právě když každé okolí x obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka: Pozor na rozdíl mezi pojmy hromadná hodnota posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ a hromadný bod množiny $\cup_{n=1}^\infty \{x_n\}$. Např. posloupnost s členy $x_n = (-1)^n$ má v $\mathbb{R}$ dvě hromadné hodnoty ± 1, kdežto $\cup_{n=1}^\infty \{x_n\} = \{-1, 1\}$ je množina dvou izolovaných bodů.

Věta 2.86: V kompaktním prostoru (X, τ) má každá posloupnost hromadnou hodnotu.

Důkaz. Buď $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost v X. Definujme

$$B_n := \bigcup_{k \geq n} \{x_k\}$$

a $A_n := \overline{B_n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě $B_n \neq \emptyset$ a $B_{n+1} \subset B_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a proto také $A_n \neq \emptyset$ a $A_{n+1} \subset A_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom podle Důsledku 2.84 je

$$\bigcap_{n=1}^\infty A_n \neq \emptyset.$$

Ukážeme, že libovolný bod

$$x \in \bigcap_{n=1}^\infty A_n$$

je hromadná hodnota posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Buď H_x libovolné okolí x. Protože

$$(\forall n \in \mathbb{N})(x \in A_n)$$

je z definice uzávěru

$$(\forall n \in \mathbb{N})(H_x \cap B_n \neq \emptyset).$$

Z posledního plyne, že H_x musí obsahovat nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, jinak by muselo existovat $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $(\forall n \geq n_0)(H_x \cap B_n = \emptyset)$. □

Věta 2.87: V kompaktním Hausdorffově prostoru je posloupnost konvergentní, právě když má právě jednu hromadnou hodnotu.

Poznámka: Předpoklad kompaktnosti X je podstatný pro platnost implikace:

$$\{x_n\}_{n=1}^\infty \text{ má právě jednu hromadnou hodnotu} \quad \Rightarrow \quad \{x_n\}_{n=1}^\infty \text{ konverguje,}$$

jak ukazuje jednoduchý příklad posloupnosti

$$x_n := \begin{cases} 1/n, & \text{je-li } n \text{ liché,} \\ n, & \text{je-li } n \text{ sudé,} \end{cases}$$

v $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií.

Důkaz Věty 2.87. Pokud $x_n \to x$, plyne okamžitě z definice limity, že x je hromadná hodnota $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Stačí proto ukázat, že x je jedinou hromadnou hodnotou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Uvažujme libovolný $y \in X$, $y \neq x$. Potom axiom T_2 implikuje

$$(\exists H_x, H_y)(H_x \cap H_y = \emptyset).$$

Protože H_x obsahuje všechny členy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ až na konečně mnoho výjimek, může H_y obsahovat pouze konečně mnoho členů $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, a proto y není hromadná hodnota posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Předpokládejme naopak, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje. Z Věty 2.86 plyne, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má alespoň jednu hromadnou hodnotu. Označme ji x. Protože x není limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, existuje H_x tak, že doplněk $X \setminus H_x$ obsahuje ještě nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Množina $X \setminus H_x$ je uzavřená podmnožina kompaktního prostoru X, a proto je podle Věty 2.81 také kompaktní. A tedy podle Věty 2.86 musí mít posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hromadnou hodnotu v množině $X \setminus H_x$. Celkem tedy má posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ alespoň dvě hromadné hodnoty. $\square$

Zamysleme se nyní krátce nad rozdílem pojmů:

1. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má hromadnou hodnotu.
2. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má konvergentní podposloupnost.

V obecných topologických prostorech nejsou výroky 1. a 2. ekvivalentní. Platí pouze implikace 2. $\Rightarrow$ 1. (dokažte). Neplatnost opačné implikace ukazuje Cvičení 2.39. Nicméně v metrických prostorech už tvrzení 1. a 2. ekvivalentní jsou.

Věta 2.88: Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost v metrickém prostoru (X, ρ). Potom $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má hromadnou hodnotu, právě když $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má konvergentní podposloupnost.

Důkaz. Vzhledem k diskuzi výše stačí ukázat jednu implikaci. Předpokládejme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má hromadnou hodnotu $x \in X$. Jelikož pro každé $\epsilon > 0$ obsahuje okolí $B_x(\epsilon)$ nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, lze konvergentní podposloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$konstruovat induktivně. V prvním kroku vybereme libovolně $x_{k_1} \in B_x(1)$ a v n-tém $x_{k_n} \in B_x(1/n)$ pro nějaké $k_n > k_{n-1}$. Takto můžeme postupovat pro každé $n \geq 2$ a vybereme tak podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž členy splňují

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\rho(x, x_{k_n}) < \frac{1}{n} \right).$$

Odtud plyne $x_{k_n} \to x$. $\square$

Definice 2.89 (Sekvenčně kompaktní prostor)**:** Topologický prostor (X, τ) nazveme *sekvenčně kompaktní*, pokud každá posloupnost v X má konvergentní podposloupnost.

V obecných topologických prostorech není kompaktní prostor sekvenčně kompaktní a neplatí ani opačná implikace. Ukázat příklady topologických prostorů, které jsou kompaktní, ale ne sekvenčně kompaktní a naopak, které jsou sekvenčně kompaktní, ale ne kompaktní, už vyžaduje hlubší znalosti z obecné topologie, které jsou nad rámec tohoto kurzu. Čtenář je může najít např. v knize [26].

Naším cílem bude ukázat, že v *metrických prostorech* již kompaktnost a sekvenční kompaktnost znamená totéž. Tato věta má v matematické analýze hluboký význam.

Věta 2.90: Metrický prostor (X, ρ) je kompaktní, právě když je sekvenčně kompaktní.

Důkaz. Předpokládejme, že (X, ρ) je kompaktní. Podle Věty 2.86, má každá posloupnost v X hromadnou hodnotu, což v metrickém prostoru znamená, že každá posloupnost má konvergentní podposloupnost, viz Věta 2.88.

Půjde tedy zejména o to, dokázat opačnou implikaci. To provedeme prostřednictvím dvou pomocných tvrzení.

Lemma 2.91 (Lebesgue)**:** Buď (X, ρ) sekvenčně kompaktní metrický prostor a $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ otevřené pokrytí X. Potom existuje $\epsilon > 0$ takové, že každá ϵ-koule je obsažena alespoň v jedné z pokrývajících množin U_α, tj.

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists \alpha \in I)(B_x(\epsilon) \subset U_\alpha).$$

Důkaz Lemma 2.91. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists x \in X)(\forall \alpha \in I)(B_x(\epsilon) \not\subset U_\alpha).$$

Volíme-li $\epsilon = 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}$, dostaneme tak posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, pro její členy platí

$$(\forall \alpha \in I)(\forall n \in \mathbb{N})(B_{x_n}(1/n) \not\subset U_\alpha). \tag{16}$$

Jelikož je (X, ρ) sekvenčně kompaktní, posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ má konvergentní podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^\infty$, jejíž limitu označme x. Protože $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí X, $(\exists \alpha_0 \in I)(x \in U_{\alpha_0})$. Množina U_{α_0} je otevřená, a proto

$$(\exists r > 0)(B_x(r) \subset U_{\alpha_0}).$$

Z toho, že $x_{k_n} \to x$, plyne

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\rho(x, x_{k_n}) < r/2).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme také předpokládat, že n_0 je dost velké, aby platilo

$$(\forall n \geq n_0)\left(\frac{1}{n} < \frac{r}{2}\right).$$

Z posledních dvou vlastností plyne inkluze $B_{x_{k_n}}(1/k_n) \subset B_x(r)$ pro každé $n \geq n_0$, neboť je-li $y \in B_{x_{k_n}}(1/k_n)$, potom

$$\rho(y, x) \leq \rho(y, x_{k_n}) + \rho(x_{k_n}, x) < \frac{1}{n} + \frac{r}{2} < r,$$

a proto $y \in B_x(r)$. Odtud vidíme, že

$$(\forall n \geq n_0)\left(B_{x_{k_n}}(1/k_n) \subset B_x(r) \subset U_{\alpha_0}\right).$$

Celkem jsme tedy našli $\alpha_0 \in I$ a index $m \in \mathbb{N}$, např. $m := k_{n_0}$, takové, že $B_{x_m}(1/m) \subset U_{\alpha_0}$, což je spor s (16). □

Lemma 2.92 (Borel)**:** Buď (X, ρ) sekvenčně kompaktní metrický prostor. Potom je X tzv. *totálně omezený*, tj.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\exists x_1, \ldots, x_n)\left(X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{x_i}(\epsilon)\right).$$

Důkaz Lemma 2.92. Buď $\epsilon > 0$. Zvolme libovolně $x_1 \in X$. Je-li $X \setminus B_{x_1}(\epsilon) \neq \emptyset$, zvolíme opět libovolně $x_2 \in X \setminus B_{x_1}(\epsilon)$. Je-li $X \setminus (B_{x_2}(\epsilon) \cup B_{x_1}(\epsilon)) \neq \emptyset$, zvolíme $x_3 \in X \setminus (B_{x_1}(\epsilon) \cup B_{x_2}(\epsilon))$, atd. Tato procedura musí po konečně mnoha krocích skončit, tj.

$$(\exists n \in \mathbb{N})\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_{x_i}(\epsilon) = \emptyset\right),$$

z čehož vyplývá tvrzení lemma. Kdyby totiž procedura neskončila po konečně mnoha krocích, zkonstruovali bychom tak posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jejíž dva libovolné členy s různým indexem jsou od sebe vzdáleny alespoň o ϵ, tj.

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n)(\rho(x_m, x_n) \geq \epsilon).$$

Taková posloupnost nemůže mít konvergentní podposloupnost (dokažte), což je spor se sekvenční kompaktností X. □

Nyní můžeme dokázat implikaci:

$$(X, \rho) \text{ sekvenčně kompaktní} \quad \Rightarrow \quad (X, \rho) \text{ kompaktní.}$$

Uvažujme otevřené pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sekvenčně kompaktního prostoru (X, ρ). Podle Lemma 2.91

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists \alpha \in I)(B_x(\epsilon) \subset U_\alpha).$$

Navíc podle Lemma 2.92

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\exists x_1, \ldots, x_n)\left(X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{x_i}(\epsilon)\right).$$

Označíme-li tedy $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in I$ ty indexy, pro které platí, že

$$(\forall i \in \hat{n})(B_{x_i}(\epsilon) \subset U_{\alpha_i}),$$

je systém $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_2}\}$ konečné podpokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ prostoru X. □

Všimněte si, že z Lemma 2.92 a právě dokázané Věty 2.90 vyplývá, že kompaktní podmnožina metrického prostoru musí být omezená (dokonce totálně omezená). Připomeneme-li ještě Větu 2.82 dostáváme následující tvrzení.

Věta 2.93: Buď (X, ρ) metrický prostor a $A \subset X$ kompaktní. Potom A je omezená a uzavřená.

Poznámka: Opačná implikace neplatí a to ani pokud omezenost nahradíme totální omezeností, viz Cvičení 2.42. Ukazuje se, že místo uzavřenosti, zde klíčovou úlohu hraje tzv. úplnost, o které bude řeč až v následující kapitole, viz Věta 2.116. Pokud se ovšem omezíme na konečnědimenzionální normované prostory, jsou kompaktní množiny právě ty současně omezené a uzavřené, viz Věta 2.104.

V další části budeme studovat, jaké důsledky má kompaktnost pro spojitá zobrazení.

Věta 2.94: Buď $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ spojité a (X, τ_X) kompaktní. Potom je $f(X)$ kompaktní.

Důkaz. Buď $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ otevřené pokrytí $f(X)$. Podle Věty 2.61 jsou vzory $f^{-1}(U_\alpha)$ otevřené pro každé $\alpha \in I$. Dále z inkluze

$$f(X) \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

plyne

$$X \subset \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha).$$

Tedy $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí X. Protože je X kompaktní, existuje konečné podpokrytí, tzn. $\exists n \in \mathbb{N}$ a $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ tak, že

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_i}),$$

neboli

$$f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}.$$

To znamená, že $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$ je konečné podpokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ prostoru $f(X)$. $\square$

Jednoduché avšak velmi zásadní pozorování je následující věta. Připomeňme, že $\mathbb{R}$ uvažujeme s obvyklou topologií, není-li řečeno jinak.

Věta 2.95: Buď f spojitá reálná funkce na kompaktním prostoru (X, τ), tedy $f : X \to \mathbb{R}$. Potom f nabývá svého infima a suprema na X, tzn.

$$(\exists x_{\min}, x_{\max} \in X) \left(f(x_{\min}) = \inf_{x \in X} f(x) \quad \text{a} \quad f(x_{\max}) = \sup_{x \in X} f(x) \right).$$

Důkaz. Podle Věty 2.94 je $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompaktní. Z Věty 2.93 víme, že $f(X)$ je omezená a uzavřená. Nyní si stačí uvědomit, že pro libovolnou omezenou a uzavřenou množinu $A \subset \mathbb{R}$ plyne z definice infima a suprema, že $\inf A \in A$ a $\sup A \in A$. Pro $A = f(X)$ tak dostaneme tvrzení věty. $\square$

Spojitost a stejnoměrná spojitost jsou na kompaktních metrických prostorech totožné pojmy.

Věta 2.96 (Cantor)**:** Buď $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ spojité zobrazení mezi metrickými prostory a (X, ρ) kompaktní. Potom f je spojité stejnoměrně.

Důkaz. Je třeba dokázat, že

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in X, \rho(x, y) < \delta)(\sigma(f(x), f(y)) < \epsilon).$$

Důkaz provedeme sporem. Tedy předpokládejme

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x, y \in X, \rho(x, y) < \delta)(\sigma(f(x), f(y)) \geq \epsilon).$$

Položíme-li $\delta = 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}$, dostaneme tak posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \sigma(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon \right).$$

Jelikož je X kompaktní, Věta 2.90 implikuje, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má konvergentní podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž limitu si označme x. Vlastnost $(\forall n \in \mathbb{N})(\rho(x_n, y_n) < 1/n)$ implikuje, že také $y_{k_n} \to x$. Ze spojitosti f potom dostaneme, že $f(x_{k_n}) \to f(x)$ a $f(y_{k_n}) \to f(x)$, což je ve sporu s vlastností

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\sigma(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \geq \epsilon \right).$$

□

Cílem poslední části výkladu věnovanému kompaktnosti bude ukázat, že na *konečnědimenzionálním* normovaném prostoru je množina kompaktní, právě když je omezená a uzavřená. Důležitou ingrediencí pro odvození této věty je kompaktnost uzavřeného n-intervalu $\times_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$. Jako první krok si dokážeme, že uzavřený interval $[a, b]$ je kompaktní množina v $\mathbb{R}$. Tato věta se někdy též označuje jako Heineova–Borelova, my si ale toto označení necháme pro větu mnohem obecnější.

Lemma 2.97: Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom $[a, b]$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}$.

Důkaz. Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $[a, b]$. Ukážeme, že $\mathcal{U}$ má konečné podpokrytí.

Definujme množiny

$$S := \{x \in [a, b] \mid \text{ interval } [a, x] \text{ je pokryt konečně mnoha množinami z } \mathcal{U}\}.$$

Jistě $a \in S$, neboť množina $\{a\}$ je pokryta jedinou množinou z $\mathcal{U}$, a tedy $S \neq \emptyset$. Označme $s := \sup S$. Zřejmě $a \leq s \leq b$. Ukážeme, že $s \in S$ a $s = b$, z čehož už bude plynout existence konečného podpokrytí $\mathcal{U}$ intervalu $[a, b]$.

Bod s musí být pokryt nějakou množinou $V \in \mathcal{U}$. Protože je V otevřená, existuje $\epsilon > 0$ tak, že $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subset V$. Bod $s - \epsilon$ není horní závora S, a proto musí existovat $y \in (s - \epsilon, s]$ takové, že $y \in S$. Tzn., že interval $[a, y]$ je pokryt konečně mnoha množinami z $\mathcal{U}$. Označme si je $U_1, \ldots, U_n$.

Uvažujme libovolné $z \in [a, b]$ takové, že $y \leq z < s + \epsilon$. Potom

$$[a, z] \subset [a, y] \cup (s - \epsilon, s + \epsilon) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup V.$$

Tzn., že $[a, z]$ je pokryt konečně mnoha množinami z $\mathcal{U}$, neboli $z \in S$. Z toho speciálně vyplývá, že $s \in S$ a také, že $s = b$, jinak by s nebyla horní závora S. $\square$

Abychom zobecnili předchozí větu do prostoru $\mathbb{R}^n$, musíme nejprve zavést tzv. *produktovou topologii* na kartézském součinu konečně mnoha topologických prostorů. Tuto topologii lze zavést i na kartézském součinu nekonečně mnoha topologických prostorů. V našem výkladu to ale nebudeme potřebovat.

Definice 2.98 (Produktová topologie)**:** Buďte $n \in \mathbb{N}$ a $(X_1, \tau_1), \ldots, (X_n, \tau_n)$ topologické prostory. *Produktová topologie* $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_n$ na kartézském součinu množin $X_1 \times \cdots \times X_n$ je topologie určená bází

$$\{A_1 \times \cdots \times A_n \mid A_1 \in \tau_1, \ldots, A_n \in \tau_n\}.$$

Poznámka: Korektnost definice produktové topologie, tedy že systém $\{A_1 \times \cdots \times A_n \mid A_1 \in \tau_1, \ldots, A_n \in \tau_n\}$ skutečně určuje topologii na $X_1 \times \cdots \times X_n$ plyne z Věty 2.26 (ověřte).

Není-li řečeno jinak uvažujeme na kartézském součinu konečně mnoha topologických prostorů topologii produktovou. Prostor $\mathbb{R}^n$ lze chápat jako kartézský součin n kopií $\mathbb{R}$. Obvyklá topologie na $\mathbb{R}^n$ indukovaná euklidovskou metrikou a produktová topologie určená obvyklou topologií na $\mathbb{R}$ jsou totožné, viz Cvičení 2.46. Následující tvrzení je speciální případ tzv. *Tychonovovy věty*, která platí i pro nekonečný kartézský součin topologických prostorů.

Věta 2.99 (Tychonov)**:** Kartézský součin konečně mnoha kompaktních topologických prostorů je kompaktní prostor.

Důkaz. Důkaz stačí provést pro dva kompaktní prostory (X, τ_X) a (Y, τ_Y). Tvrzení pro libovolný konečný počet prostorů pak dokážeme indukcí (rozmyslete).

Budeme potřebovat jedno pomocné tvrzení, tzv. *tubulární lemma.*

Lemma 2.100: Buďte (X, τ_X), (Y, τ_Y) topologické prostory, $K \subset Y$ kompaktní a $U \subset X \times Y$ otevřená. Potom je množina

$$V := \{x \in X \mid \{x\} \times K \subset U\}$$

otevřená v X.

Důkaz Lemma 2.100. Nechť $x \in V$. Protože je U otevřená, máme

$$(\forall y \in K)(\exists A_y \in \tau_X, B_y \in \tau_Y)((x, y) \in A_y \times B_y \subset U).$$

Systém $\{B_y \mid y \in K\}$ je otevřené pokrytí kompaktní množiny K, a proto

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\exists y_1, \ldots, y_n \in K)\,(K \subset B_{y_1} \cup \cdots \cup B_{y_n})\,.$$

Označme

$$H_x := A_{y_1} \cap \cdots \cap A_{y_n}$$

Zřejmě $x \in H_x \in \tau_X$. Dále je také

$$H_x \times K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (H_x \times B_{y_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (A_{y_i} \times B_{y_i}) \subset U,$$

a tedy $H_x \subset V$. Dokázali jsme, že libovolný bod z V leží ve V i s nějakým svým okolím, a proto je V otevřená. $\square$

Nyní se vrátíme k samotnému důkazu Věty 2.99. Předpokládejme, že (X, τ_X) a (Y, τ_Y) jsou kompaktní topologické prostory a $\mathcal{U}$ otevřené pokrytí $X \times Y$.

Buď $x \in X$ fixní. Snadno se ověří, že zobrazení $f_x : Y \to X \times Y : y \mapsto (x, y)$ je spojité, a proto je podle Věty 2.94 množina $f_x(Y) = \{x\} \times Y$ kompaktní. Proto

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\exists U_1, \ldots, U_n \subset \mathcal{U})(\{x\} \times Y \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n).$$

Označme

$$V_x := \{x' \in X \mid \{x'\} \times Y \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n\}.$$

Potom $x \in V_x$ a podle Lemma 2.100 je V_x otevřená.

Systém $\{V_x \mid x \in X\}$ je tedy otevřené pokrytí X. Z kompaktnosti X plyne

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\exists x_1, \ldots, x_m \in X)(X \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_m}).$$

Potom

$$X \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i} \times Y.$$

Z předchozího odstavce plyne, že každá z množin $V_{x_i} \times Y$, kde $i \in \hat{m}$, je pokryta konečně mnoha množinami z $\mathcal{U}$. Sjednocením všech těchto množin dostaneme konečné podpokrytí $\mathcal{U}$ prostoru $X \times Y$. $\square$

Kombinací Lemma 2.97 a Věty 2.99 dostaneme okamžitě následující důsledek.

Důsledek 2.101: Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ takové, že $a_i < b_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Potom $\times_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ je kompaktní podmnožina prostoru $\mathbb{R}^n$.

Nyní si ukážeme důležitou větu, ze které plyne, že všechny normy na *konečnědimenzionálním* lineárním prostoru indukují tutéž topologii. Tento fakt vzápětí použijeme v důkazu Heineovy–Borelovy věty. Nezávisle na tom má tato věta zásadní význam v analýze funkcí více proměnných.

Věta 2.102: Libovolné dvě normy na lineárním prostoru *konečné dimenze* jsou ekvivalentní.

Poznámka: Větu dokážeme pro lineární prostory nad $\mathbb{R}$. Je-li tělesem $\mathbb{C}$, postupuje se podobně. Detaily přenecháme čtenáři.

Důkaz Věty 2.102. Buď V_n lineární prostor nad $\mathbb{R}$, $\dim V_n = n \in \mathbb{N}$. Ve V_n zvolme bázi $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ a definujme normu

$$\|x\|_{\mathcal{X},\infty} := \max_{i \in \hat{n}} |x_i^{\#}(x)|, \quad x \in V_n,$$

kde $x_i^{\#}(x)$ je i-tá souřadnice x v bázi $\mathcal{X}$ (ověřte, že jde skutečně o normu na V_n).

Uvažujme dále nějakou (libovolnou) normu $\|\cdot\|$ na V_n. Ukážeme, že

$$(\exists c, \tilde{c} > 0)(\forall x \in V_n)\, (c\|x\|_{\mathcal{X},\infty} \leq \|x\| \leq \tilde{c}\|x\|_{\mathcal{X},\infty})\,.$$

Tedy že normy $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty}$ na V_n jsou ekvivalentní. Protože je relace ekvivalence norem tranzitivní, plyne odtud, že také libovolné dvě normy na V_n musí být ekvivalentní.

Jedna nerovnost plyne rovnou z obecných vlastností normy, neboť pro $x \in V_n$ máme

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i^{\#}(x) x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i^{\#}(x)| \|x_i\| \leq \max_{j \in \hat{n}} |x_j^{\#}(x)| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| = \tilde{c}\|x\|_{\mathcal{X},\infty},$$

kde jsme označili

$$\tilde{c} := \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|.$$

Tím je jedna nerovnost dokázána. Navíc z odhadů výše také plyne, že je identické zobrazení $\mathrm{id} : (V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty}) \to (V_n, \|\cdot\|)$ spojité.

K důkazu druhé nerovnosti budeme potřebovat následující pomocné tvrzení.

Lemma 2.103: Množina

$$S := \{x \in V_n \mid \|x\|_{\mathcal{X},\infty} = 1\}$$

je kompaktní podmnožina $(V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty})$.

Důkaz Lemma 2.103. Nejprve uvažme zobrazení $\Psi : \mathbb{R}^n \to V_n$ definované vztahem

$$\Psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

pro každé $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Protože

$$\|\Psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\|_{\mathcal{X},\infty} = \max_{i \in \hat{n}} |\alpha_i| = \|(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\|_\infty,$$

je zobrazení Ψ, jakožto zobrazení z $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ do $(V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty})$, spojité.

Zřejmě

$$\|\Psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\|_{\mathcal{X},\infty} = \max_{i \in \hat{n}} |\alpha_i| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [-1, 1]^n,$$

z čehož plyne

$$\Psi\left([-1, 1]^n\right) = \overline{B} := \{x \in V_n \mid \|x\|_{\mathcal{X},\infty} \leq 1\}.$$

Podle Důsledku 2.101 je množina $[-1, 1]^n$ kompaktní v prostoru $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, a proto je její spojitý obraz $\overline{B} = \Psi\left([-1, 1]^n\right)$ kompaktní v $(V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty})$, viz Věta 2.94.

Abychom ukázali také kompaktnost množiny S, stačí nyní dokázat, že S je uzavřená podmnožina $\overline{B}$ a aplikovat Větu 2.81. Zřejmě $S \subset \overline{B}$. Připomeneme-li si, že je norma spojitá; přesněji v tomto případě zobrazení $f : (V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty}) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definované vztahem

$$f(x) := \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty}$$

je spojité a navíc $S = f^{-1}(\{1\})$, vyplývá uzavřenost S z uzavřenosti množiny $\{1\}$ a Věty 2.61. $\square$

Připomeňme, že identita $\mathrm{id} : (V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty}) \to (V_n, \|\cdot\|)$ i norma $\|\cdot\| : (V_n, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ jsou spojitá zobrazení. Potom podle Věty 2.95 musí spojité (složené) zobrazení $\|\mathrm{id}\| : (V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty}) \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$ nabývat svého minima na kompaktní množině S, tzn., že existuje $y_{\min} \in S$ takové, že

$$(\forall y \in S)(\|y\| \geq c),$$

kde jsme označili $c := \|y_{\min}\|$. Všimněte si, že $c > 0$, tedy $c \neq 0$, neboť $y_{\min} \neq 0$, protože $0 \notin S$.

Nyní je-li $0 \neq x \in V_n$, je vektor

$$y := \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{X},\infty}} \in S,$$

a proto

$$c \leq \|y\| = \left\| \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{X},\infty}} \right\|,$$

neboli

$$c\|x\|_{\mathcal{X},\infty} \leq \|x\|.$$

$\square$

Nyní si konečně můžeme ukázat, že v konečnědimenzionálním normovaném prostoru lze implikaci ve Větě 2.93 obrátit.

Věta 2.104 (Heine–Borel)**:** V normovaném prostoru *konečné dimenze* je množina kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.

Důkaz. Důkaz provedeme pouze pro lineární prostor nad reálným tělesem. Buď tedy $(V_n, \|\cdot\|)$ normovaný prostor nad $\mathbb{R}$, $\dim V_n = n \in \mathbb{N}$ a $A \subset V_n$. Jelikož máme Větu 2.93, stačí dokázat implikaci:

$$A \text{ omezená a uzavřená} \quad \Rightarrow \quad A \text{ kompaktní.}$$

Ukážeme, že se stačí omezit na prostor $\mathbb{R}^n$. Buď $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ báze V_n a $\Phi_{\mathcal{X}} : V_n \to \mathbb{R}^n$ souřadnicový izomorfismus

$$\Phi_{\mathcal{X}}(x) := (x_1^{\#}(x), \ldots, x_n^{\#}(x)), \quad x \in V_n.$$

Zobrazení $\Phi_{\mathcal{X}}$ je bijekce a navíc je spojité i se svojí inverzí jako zobrazení mezi V_n a $\mathbb{R}^n$ s libovolnými normami. To vyplývá z Věty 2.102 a vztahu

$$\|\Phi_{\mathcal{X}}(x)\|_\infty = \max_{i \in \hat{n}} |x_i^{\#}(x)| = \|x\|_{\mathcal{X},\infty},$$

který platí pro každé $x \in V_n$, kde $\|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty}$ je norma na V_n (jako v důkazu Věty 2.102). Jinými slovy $\Phi_{\mathcal{X}}$ je homeomorfismus z V_n do $\mathbb{R}^n$ s libovolnými normami. Odtud plyne, že

$$A \text{ je kompaktní} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\mathcal{X}}(A) \text{ je kompaktní},$$

viz Věta 2.94 a

$$A \text{ je uzavřená} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\mathcal{X}}(A) \text{ je uzavřená},$$

viz Věta 2.61. Platí také

$$A \text{ je omezená} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\mathcal{X}}(A) \text{ je omezená},$$

(ověřte).

Stačí tedy uvažovat speciální případ $V_n = \mathbb{R}^n$. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je omezená a uzavřená. Z omezenosti A vyplývá, že A musí být podmnožinou nějakého n-intervalu $\times_{i=1}^n [a_i, b_i]$, který je kompaktní podle Důsledku 2.101. Protože je A navíc uzavřená, plyne z Věty 2.81, že A je kompaktní. □

Následující tvrzení je přímým důsledkem předchozích vět. Pro jeho důležitost ho ovšem zformulujeme jako větu. Toto tvrzení jako fundamentální vlastnost $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ bylo nezávisle na sobě objeveno B. Bolzanem a K. Weierstrassem.

Věta 2.105 (Bolzano–Weierstrass)**:** Každá *omezená* posloupnost v normovaném prostoru *konečné dimenze* má konvergentní podposloupnost.

Důkaz. Buď $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost z nějakého konečnědimenzionálního normovaného prostoru. Potom je množina

$$A := \bigcup_{n=1}^\infty \{x_n\}$$

omezená. Jelikož je A podmnožina normovaného prostoru, je i její uzávěr $\overline{A}$ omezený (ověřte). Podle Heinovy–Borelovy věty 2.104 je $\overline{A}$ kompaktní. Dále podle Věty 2.90 je $\overline{A}$ sekvenčně kompaktní, a proto posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, jejíž členy jsou z $\overline{A}$, má konvergentní podposloupnost. □

Poznámka: Bolzanova–Weierstrassova věta neplatí v metrických prostorech ani v normovaných prostorech nekonečné dimenze, viz Cvičení 2.47

2.5 Úplnost

Celá tato část se bude týkat pouze *metrických prostorů.*

Definice 2.106 (Cauchyovská posloupnost)**:** Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ v metrickém prostoru (X, ρ) nazveme *cauchyovskou*, právě když

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(\rho(x_m, x_n) < \epsilon)$$

nebo ekvivalentně

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon).$$

Lemma 2.107: Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost v metrickém prostoru (X, ρ). Potom platí:

1. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, pak je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská.
2. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská, pak je i libovolná její podposloupnost cauchyovská.
3. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská, pak je omezená.
4. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská a má konvergentní podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, tj. $x_{k_n} \to x$ pro nějaké $x \in X$, potom $x_n \to x$.

Důkaz. 1. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, potom existuje $x \in X$ tak, že $x_n \to x$. Z definice konvergence plyne, že

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\left(\rho(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Zvolme tedy $\epsilon > 0$. Potom s použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme pro libovolné $m, n \geq n_0$ odhad

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x) + \rho(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

a tedy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.

2. Tvrzení plyne přímo z definice cauchyovské posloupnosti.

3. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Definice cauchyovské posloupnosti pro $\epsilon = 1$ implikuje existenci $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že všechny členy posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, až na konečně mnoho výjimek, leží v kouli $B_{x_{n_0}}(1)$. Taková posloupnost je nutně omezená.

4. Předpokládejme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská a $x_{k_n} \to x$. Připomeňme, že posloupnost indexů k_n u vybrané posloupnosti je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel, a proto $k_n \geq n$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Protože je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská, plyne z definice, že

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_1)\left(\rho(x_n, x_{k_n}) < \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Dále z předpokladu $x_{k_n} \to x$ máme

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_2)\left(\rho(x_{k_n}, x) < \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Nyní stačí ke zvolenému $\epsilon > 0$ položit $n_0 := \max(n_1, n_2)$ a z výroků výše dostaneme, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{k_n}) + \rho(x_{k_n}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

neboli $x_n \to x$. $\square$

Obrácená implikace z 1. tvrzení Lemma 2.107 obecně neplatí. Metrické prostory, kde tato implikace platí pro každou posloupnost, se nazývají *úplné*.

Definice 2.108 (Úplný prostor, úplná množina)**:** Metrický prostor (X, ρ) nazveme ***úplný***, právě když každá cauchyovská posloupnost z X je konvergentní (tzn., že má v X limitu). Podobně množinu $A \subset X$ nazveme ***úplnou***, právě když každá cauchyovská posloupnost z A má v A limitu.

Definice 2.109 (Banachův prostor, Hilbertův prostor)**:** Úplný normovaný prostor se nazývá *Banachův prostor*. Úplný pre-Hilbertův prostor se nazývá *Hilbertův prostor*.

Příklad 2.110: Normovaný prostor V *konečné dimenze* je úplný. Tedy např. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ nebo $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ s libovolnými normami jsou všechno příklady úplných prostorů. Tvrzení, že $(V, \|\cdot\|)$ je úplný není nic jiného, než jedna implikace z Bolzanovy–Cauchyovy podmínky:

$$x_n \to x \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(\|x_m - x_n\| < \epsilon).$$

Netriviální implikaci $(\Leftarrow)$ odvodíme nyní snadno z již dokázaných vět. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská posloupnost v $(V, \|\cdot\|)$, je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená podle Lemma 2.107. Potom podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty 2.105 má $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergetní podposloupnost a opět podle Lemma 2.107 musí být i posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní.

Další příklad ilustruje to, že úplnost je metrická vlastnost. Na $\mathbb{R}$ zvolíme jinou metriku než v Příkladu 2.110 a výsledný prostor již nebude úplný.

Příklad 2.111: Zobrazení $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované pro $x, y \in \mathbb{R}$ vztahem

$$\rho(x, y) := |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$$

je metrika na $\mathbb{R}$ (ověřte). Ukážeme, že metrický prostor $(\mathbb{R}, \rho)$ není úplný.

Uvažujme posloupnost s členy $x_n := n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pro $n, p \in \mathbb{N}$ máme

$$\rho(x_{n+p}, x_n) = \operatorname{arctg}(n + p) - \operatorname{arctg} n \leq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n.$$

Jelikož výraz napravo jde k nule pro $n \to \infty$, je posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská v $(\mathbb{R}, \rho)$. Na druhou stranu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ není konvergentní v $(\mathbb{R}, \rho)$. Kdyby byla konvergetní, muselo by existovat $x \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0,$$

což znamená

$$0 = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg} x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

Rovnost $\operatorname{arctg} x = \pi/2$ ovšem neplatí pro žádné $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 2.112: Prostor $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ není úplný, neboť v něm existují cauchyovské posloupnosti, které nemají limitu v $\mathbb{Q}$. Stačí vzít jakoukoliv posloupnost racionálních čísel, která konverguje k číslu iracionálnímu jako je např.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Příklad 2.113: Prostor $(\mathbb{Q}, \rho_d)$, kde ρ_d je diskrétní metrika, je úplný. Stačí si rozmyslet, že cauchyovské posloupnosti v $(\mathbb{Q}, \rho_d)$ jsou právě ty posloupnosti, které jsou od jistého indexu konstantní. Takové posloupnosti jsou konvergentní v $(\mathbb{Q}, \rho_d)$.

Následující dvě věty ukazují, že je jistý vztah mezi uzavřeností a úplností množiny.

Věta 2.114: Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $A \subset X$ úplná množina. Potom je A uzavřená.

Důkaz. Předpokládejme, že $A \neq \emptyset$, jinak je tvrzení triviální. Nechť $x \in \overline{A}$. Potom podle 2. tvrzení Věty 2.52 existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v A taková, že $x_n \to x$. Podle 1. tvrzení Lemma 2.107 je konvergetní posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská. A protože je A úplná, má $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu v A, tj. $x \in A$. Tedy $A = \overline{A}$. □

Věta 2.115: Nechť (X, ρ) je ***úplný*** metrický prostor a $A \subset X$. Je-li A uzavřená, pak je A úplná.

Důkaz. Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská posloupnost z A. Úplnost (X, ρ) implikuje, že je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, tzn. $\exists x \in X$ a $x_n \to x$. Z uzavřenosti A plyne, že limita $x \in A$. Celkem tedy má libovolná cauchyovská posloupnost z A limitu v A, a proto je A úplná. □

Dokážeme si ještě jednu větu o vztahu kompaktnosti a úplnosti metrického prostoru. Z toho, co už víme, snadno vyplývá že (X, ρ) kompaktní metrický prostor je úplný. Stačí si uvědomit, že ze sekvenční kompaktnosti (X, ρ), viz Věta 2.90, plyne, že každá cauchyovská posloupnost v (X, ρ) má konvergentní podposloupnost a aplikovat tvrzení 4. Lemma 2.107. Naopak to samozřejmě neplatí, jak ilustruje např. prostor $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, který je úplný, ale ne kompaktní. Ani dodatečný předpoklad omezenosti (X, ρ) by ještě nestačil. Klíčem k opačné implikaci je omezenost totální, viz Lemma 2.92.

Věta 2.116: Metrický prostor (X, ρ) je kompaktní právě tehdy, když je (X, ρ) úplný a totálně omezený.

Důkaz. Je-li (X, ρ) kompaktní, potom z diskuze výše už víme, že je úplný. Totální omezenost kompaktního prostoru (X, ρ) plyne přímo z Věty 2.90 a Lemma 2.92. Je třeba tedy dokázat implikaci opačnou.

Předpokládejme, že (X, ρ) je úplný a totálně omezený. V pomocném tvrzení níže ukážeme, že z totální omezenosti (X, ρ) plyne, že každá posloupnost v (X, ρ) má cauchyovskou podposloupnost. Úplnost (X, ρ) implikuje, že tato cauchyovská podposloupnost je konvergentní. To znamená, že je prostor (X, ρ) sekvenčně kompaktní, a tedy i kompaktní, jak víme z Věty 2.90.

Zbývá nám tedy dokázat následující pomocné tvrzení.

Lemma 2.117: V totálně omezeném metrickém prostoru (X, ρ) má každá posloupnost cauchyovskou podposloupnost.

Důkaz Lemma 2.117. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost v X. Z totální omezenosti (X, ρ) plyne, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ lze X pokrýt konečně mnoha koulemi o poloměru $1/n$, jejichž středy jsou v množině, kterou označíme S_n. Tedy

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists S_n \subset X \text{ konečná }) \left(X = \bigcup_{y \in S_n} B_y(1/n) \right)$$

Pro $n = 1$ musí existovat $y_1 \in S_1$ takové, že koule $B_{y_1}(1)$ obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Označme si jejich indexy

$$A_1 := \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B_{y_1}(1)\}.$$

Podobně, je-li $n = 2$, existuje $y_2 \in S_2$ takové, že koule $B_{y_2}(1/2)$ obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n \in A_1}$ a označme

$$A_2 := \{n \in A_1 \mid x_n \in B_{y_2}(1/2)\}.$$

Všimněte si, že $A_2 \subset A_1$. Tímto způsobem najdeme $y_k \in S_k$ a nekonečné množiny

$$A_k := \{n \in A_{k-1} \mid x_n \in B_{y_k}(1/k)\}$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$ (zde je $A_0 := \mathbb{N}$). Platí $A_{k+1} \subset A_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Nyní zvolme ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $k_n \in A_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Pro $n, p \in \mathbb{N}$ z trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\rho(x_{k_n}, x_{k_{n+p}}) \leq \rho(x_{k_n}, y_n) + \rho(y_n, x_{k_{n+p}})$$

Protože $k_n \in A_n$, je $\rho(x_{k_n}, y_n) < 1/n$. Podobně z $k_{n+p} \in A_{n+p} \subset A_n$, plyne $\rho(y_n, x_{k_{n+p}}) < 1/n$. Odtud dostáváme

$$\rho(x_{k_n}, x_{k_{n+p}}) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n},$$

z čehož už jednoduše plyne, že posloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. □

□

V poslední části kapitoly o úplnosti si dokážeme Banachovu větu o pevném bodě kontrahujícího zobrazení.

Definice 2.118 (Kontrahující zobrazení)**:** Buď (X, ρ) metrický prostor. Zobrazení $f : (X, \rho) \to (X, \rho)$ nazýváme *kontrahující*, právě když

$$(\exists q \in [0, 1))(\forall x, y \in X) \left(\rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y)\right).$$

Poznámka: Všimněte si, že kontrahující zobrazení je spojité.

Věta 2.119 (Banachova o pevném bodě)**:** Nechť (X, ρ) je *úplný* metrický prostor a $f : (X, \rho) \to (X, \rho)$ kontrahující zobrazení. Potom má f právě jeden *pevný bod*, tzn.

$$(\exists_1 x \in X)(f(x) = x).$$

Důkaz. Nejprve dokážeme existenci pevného bodu f. Zvolme libovolně $x_0 \in X$ a definujme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ rekurentně podle předpisu

$$x_n := f(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ukážeme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.

Protože pro $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq q\rho(x_{n-1}, x_n),$$

dokážeme indukcí, že

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq q^n \rho(x_0, x_1).$$

Potom s využitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme pro $n, p \in \mathbb{N}$ odhad

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_{n+p}) &\leq \sum_{i=1}^{p} \rho(x_{n+i-1}, x_{n+i}) \leq \rho(x_0, x_1) \sum_{i=1}^{p} q^{n+i-1} \leq \rho(x_0, x_1) q^n \sum_{i=0}^{\infty} q^i \\ &= \rho(x_0, x_1) \frac{q^n}{1-q},\end{aligned}$$

kde jsme využily podstatný předpoklad $q \in [0, 1)$. Odtud k libovolnému $\epsilon > 0$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby

$$\rho(x_0, x_1) \frac{q^{n_0}}{1-q} < \epsilon.$$

Potom pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ je $\rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$, a tedy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.

Prostor (X, ρ) je úplný, a proto $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nějakému $x \in X$. Protože je f spojité, neboť je kontrahující, máme také $f(x_n) \to f(x)$. Nyní stačí provést limitní přechod v rovnici $x_n = f(x_{n-1})$ pro $n \to \infty$ a dostaneme rovnost $x = f(x)$. Bod x je tedy pevným bodem f.

Pro důkaz jednoznačnosti předpokládejme, že existují $x, y \in X$ takové, že $x = f(x)$ a $y = f(y)$. Potom

$$\rho(x, y) = \rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y).$$

Je-li $x \neq y$, potom $\rho(x, y) \neq 0$ a poslední nerovnost implikuje $q \geq 1$, což je ve sporu s předpokladem. Proto musí být $x = y$. □

Banachova věta o pevném bodě má v matematice mnoho aplikací. Také idea důkazu je pro aplikace podstatná. Všimněte si, že z důkazu plyne, že „iniciační bod“ x_0 lze volit zcela libovolně a přesto se iterováním

$$f^{(n)}(x_0) = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n\text{krát}}(x_0)$$

limitně blížíme k pevnému bodu zobrazení f. Tato jednoduchá myšlenka se používá např. v iteračních metodách numerické analýzy nebo k důkazu existence a jednoznačnosti řešení různorodých úloh (parciálně diferenciální rovnice, integrální rovnice, nelineární problémy), kdykoliv můžeme studovaný problém formulovat jako rovnost $f(x) = x$ s kontrahujícím zobrazením f na úplném prostoru.

Ne vždy ale pracujeme s kontrahujícím zobrazením. Dnes existuje řada zobecnění či rozšíření Banachovy věty o pevném bodě a také další věty implikující existenci pevného bodu zobrazení. Spolu s Banachovou větou patří mezi nejznámější takové výsledky ještě *Brouwerova věta o pevném bodě*. Jelikož je tato věta jedním z nejdůležitějších výsledků analýzy a topologie 1. poloviny 20. století, větu si zde zformulujeme. Nicméně její důkaz je velice netriviální a zcela jistě nad rámec tohoto kurzu, a proto jej neuvádíme. Lze ho najít např. v [1].

Věta 2.120 (Brouwerova o pevném bodě)**:** Buď $(V, \|\cdot\|)$ normovaný konečnědimenzionální prostor (nad $\mathbb{R}$) a $K \subset V$ *kompaktní* a *konvexní* množina. Potom každé *spojité* zobrazení $f : K \to K$ má pevný bod.

Poznámka: Připomeňme, že množina $K \subset V$ je konvexní, právě když

$$(\forall x, y \in K)(\forall \lambda \in [0,1])(\lambda x + (1-\lambda)y \in K).$$

Pevný bod zobrazení z Brouwerovy věty nemusí být jediný. Zobecnění Brouwerovy věty, kde je předpoklad konečné dimenze nahrazen úplností $(V, \|\cdot\|)$, je známé jako *Schauderova věta o pevném bodě.*

2.6 Souvislost

Nakonec se ještě jednou vrátíme k obecným topologickým prostorům a prostudujeme některé vlastnosti týkající se tzv. souvislosti prostorů.

Definice 2.121 (Obojetná množina, souvislý prostor)**:** Buď (X, τ) topologický prostor. Množina $A \subset X$ se nazývá *obojetná*, je-li současně otevřená i uzavřená. Prostor (X, τ) nazveme *souvislý*, právě když jediné obojetné podmnožiny X jsou $\emptyset$ a X.

Definice 2.122 (Souvislá množina)**:** Buď (X, τ) topologický prostor. Množinu $\emptyset \neq A \subset X$ nazveme *souvislou*, právě když (A, τ_A) je souvislý jakožto topologický podprostor (X, τ). Prázdná množina je souvislá.

Příklad 2.123: Prostor $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií τ je souvislý, ale důkaz tohoto tvrzení uvedeme později, viz Lemma 2.128. Množina $A = [0,1) \cup (2,3]$ není souvislá, neboť množiny $[0,1)$ a $(2,3]$ jsou obojetné v topologii podprostoru (A, τ_A).

Příklad 2.124: Je-li X množina obsahující alespoň 2 prvky a τ_d diskrétní topologie na X, potom (X, τ_d) není souvislý, neboť každá podmnožina X je obojetná.

Souvislost prostoru lze vyjádřit několika alternativními způsoby, viz také Cvičení 2.49.

Lemma 2.125: Buď (X, τ) topologický prostor. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. (X, τ) *není* souvislý,
2. $(\exists A, B \in \tau)(A, B \neq \emptyset)(A \cap B = \emptyset \ \wedge\ A \cup B = X)$,
3. $(\exists A, B \in c\tau)(A, B \neq \emptyset)(A \cap B = \emptyset \ \wedge\ A \cup B = X)$.

Důkaz. Dokážeme jen ekvivalenci 1. $\Leftrightarrow$ 2. Pro důkaz ekvivalence 2. $\Leftrightarrow$ 3. stačí použít to, že doplněk otevřené množiny je uzavřená množina a naopak.

Předpokládejme, že (X, τ) není souvislý. Potom existuje obojetná množina $A \subset X$ taková, že $A \neq \emptyset$, ani $A \neq X$. Položme $B := X \setminus A$. Potom $A \in \tau$ a $B \in \tau$, protože A je také uzavřená. Zřejmě také $A \cap B = \emptyset$ a $A \cup B = X$, čímž dostáváme tvrzení 2.

Naopak předpokládáme-li platnost výroku 2., je množina $A \in \tau$ a také $A = X \setminus B \in c\tau$, protože $B \in \tau$. Tedy A je obojetná. Navíc $A \neq \emptyset$ a $A = X \setminus B \neq X$, protože $B \neq \emptyset$. Z toho plyne, že (X, τ) není souvislý. $\square$

Věta 2.126: Buď (X, τ) topologický prostor a $A_\alpha \subset X$ *souvislé* množiny pro každé $\alpha \in I$, kde $I \neq \emptyset$ je indexová množina libovolné mohutnosti. Je-li

$$(\forall \alpha, \alpha' \in I)(A_\alpha \cap A_{\alpha'} \neq \emptyset),$$

potom

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \quad \text{je souvislá.}$$

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že množina $A := \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$ není souvislá. Podle Lemma 2.125 existují *neprázdné* množiny B, C otevřené v (A, τ_A) a takové, že

$$B \cap C = \emptyset \quad \text{a} \quad B \cup C = A.$$

Potom $A_\alpha = (A_\alpha \cap B) \cup (A_\alpha \cap C)$, kde $\alpha \in I$. Protože jsou B a C otevřené v (A, τ_A) nadmnožiny A, jsou množiny $A_\alpha \cap B$ a $A_\alpha \cap C$ otevřené také v topologickém podprostoru $(A_\alpha, \tau_{A_\alpha})$. Jelikož je A_α souvislá musí být alespoň jedna z disjunktních množin $A_\alpha \cap B$, nebo $A_\alpha \cap C$ prázdná, jinak bychom dostali spor s tvrzením 2. Lemma 2.125. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A_\alpha \cap C = \emptyset$. Potom $A_\alpha \subset B$. Uvědomte si, že platí-li inkluze $A_\alpha \subset B$ pro jedno $\alpha \in I$, musí platit pro všechna $\alpha \in I$. Kdy totiž existovali $\alpha, \alpha' \in I$ tak, že $A_\alpha \subset B$ a $A_{\alpha'} \subset C$, byl by $A_\alpha \cap A_{\alpha'} = \emptyset$, což je ve sporu s předpokladem. Máme tedy

$$A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \subset B.$$

Odtud ovšem plyne, že $C = A \setminus B = \emptyset$, což je spor. □

Věta 2.127: Buď (X, τ) topologický prostor, $A \subset X$ a $A \subset B \subset \overline{A}$. Je-li A souvislá, potom je i B souvislá.

Důkaz. Větu stačí dokázat pro speciální případ $B = \overline{A}$. K tomu si stačí uvědomit, že B je uzávěr A v topologii (B, τ_B), protože je $B = B \cap \overline{A}$. Proto uvažujeme-li namísto (X, τ) prostor (B, τ_B) a víme-li, že uzávěr souvislé množiny je souvislý, dokážeme souvislost množiny B.

Ve zbytku důkazu ukážeme, že $\overline{A}$ je souvislá za předpokladu, že A je souvislá. K tomu opět použijeme Lemma 2.125 tentokrát formulaci z tvrzení 3. Pro spor předpokládejme, že

$$(\exists B, C \in c\tau_{\overline{A}})(B, C \neq \emptyset)(B \cap C = \emptyset \ \wedge \ B \cup C = \overline{A}).$$

Uvědomte si, že množina B je uzavřená v $(\overline{A}, \tau_{\overline{A}})$, tj. $B \in c\tau_{\overline{A}}$, právě když je B uzavřená v (X, τ), tj. $B \in c\tau$.

Z předpokladu $B \neq \emptyset$ plyne, že existuje nějaké $b \in B$. Protože $B = \overline{A} \setminus C \subset X \setminus C$ a $C \in c\tau$, existuje $H_b \subset X \setminus C$. Tudíž $H_b \cap C = \emptyset$.

Protože je také $b \in \overline{A}$, máme $H_b \cap A \neq \emptyset$. Vezměme nějaké $x \in H_b \cap A$. Protože $H_b \cap C = \emptyset$, je $x \notin C$, a proto $x \in A \cap B$. Celkem jsme tedy dokázali, že $A \cap B \neq \emptyset$. Analogickým postupem, který vychází z předpokladu $C \neq \emptyset$, se ukáže, že také $A \cap C \neq \emptyset$.

Nyní si stačí uvědomit, že neprázdné množiny $A \cap B, A \cap C \in c\tau_A$ a tvoří rozklad A, tj.

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{a} \quad (A \cap B) \cap (A \cap C) = \emptyset.$$

To je ale spor s tím, že A je souvislá. □

Už v kapitole o kompaktnosti jsme si mohli uvědomit, že k důkazu důležitých vět (Heine–Borel, atd.) bylo důležitou ingrediencí dokázat kompaktnost uzavřeného intervalu. I v této části bude podstatné nejprve ukázat, že interval je souvislou množinou v $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Zanedlouho si ukážeme dokonce víc, viz Věta 2.131. Začneme tím, že si dokážeme souvislost $\mathbb{R}$.

Lemma 2.128: Prostor $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií je souvislý.

Důkaz. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je obojetná. Ukážeme, že je-li $A \neq \emptyset$, potom musí být $A = \mathbb{R}$. Přesněji dokážeme, že vezmeme-li libovolné $c \in \mathbb{R}$, potom $c \in A$.

Buď tedy $A \neq \emptyset$ a zvolme $c \in \mathbb{R}$. Pro spor předpokládejme, že $c \notin A$. Protože $A \neq \emptyset$, existuje nějaké $a \in A$. Tedy $a \neq c$. Předpokládejme, že $a < c$. V případě $a > c$ by se postupovalo analogicky.

Definujme
$$S := \{x \in A \mid x < c\} \equiv A \cap (-\infty, c).$$
Množina $S \neq \emptyset$, protože $a \in S$. Dále označme
$$s := \sup S.$$
Zřejmě $s \leq c$.

Protože $c \notin A$, můžeme psát $S = A \cap (-\infty, c]$. Z toho plyne, že S je uzavřená, neboť A je uzavřená. A proto $s \in \overline{S} = S$, z čehož plyne $s < c$.

Protože S je, jako průnik dvou otevřených množin A a $(-\infty, c)$, také otevřená a $s \in S$, existuje $\epsilon > 0$ tak, že $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subset S$. Z toho ovšem plyne, že např. prvek $s + \epsilon/2 \in S$, což je ve sporu s tím, že $s = \sup S$. □

Další věta ukazuje, že spojitý obraz souvislé množiny musí být souvislý.

Věta 2.129: Nechť $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ je spojité zobrazení mezi topologickými prostory a (X, τ_X) je souvislý. Potom $f(X)$ je souvislá množina.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $f(X)$ není souvislá. Podle Lemma 2.125 musí existovat $\emptyset \neq B, C \subset f(X)$ otevřené v $(f(X), \tau_{f(X)})$ takové, že
$$B \cap C = \emptyset \quad \text{a} \quad B \cup C = f(X).$$
Ze spojitosti f plyne, že množiny $f^{-1}(B)$ a $f^{-1}(C)$ jsou otevřené v (X, τ_X), viz Věta 2.61. Skutečně jelikož $B \in \tau_{f(X)}$, existuje $\tilde{B} \in \tau_Y$ tak, že $B = \tilde{B} \cap f(X)$, z čehož plyne $f^{-1}(B) = f^{-1}(\tilde{B})$ a $f^{-1}(\tilde{B}) \in \tau_X$ díky spojitosti f. Podobně je $f^{-1}(C) \in \tau_X$. Dále platí:
$$f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C) = \emptyset \quad \text{a} \quad f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C) = X.$$
Nakonec musí být také obě množiny $f^{-1}(B)$ a $f^{-1}(C)$ neprázdné, protože B, C jsou neprázdné podmnožiny $f(X)$. To je ovšem spor s předpokladem souvislosti (X, τ_X) podle Lemma 2.125. □

Důsledek 2.130: Jsou-li (X, τ_X) a (Y, τ_Y) homeomorfní topologické prostory, potom
$$(X, \tau_X) \text{ je souvislý} \quad \Leftrightarrow \quad (Y, \tau_Y) \text{ je souvislý}.$$

Nyní už můžeme ukázat, že intervaly jsou souvislé podmnožiny $\mathbb{R}$. Dokonce jiné souvislé podmnožiny než intervaly v $\mathbb{R}$ neexistují. Ve speciálním případě prostoru $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií máme tedy jednoduchou charakterizaci souvislých množin.

Věta 2.131: Množina $A \subset \mathbb{R}$ je souvislá, právě když je A interval.

Poznámka: Poznamenejme, že intervalem v $\mathbb{R}$ rozumíme všechny množiny typu

$$(a, b),\ [a, b),\ (a, b],\ [a, b],$$

kde $a \leq b$, a také všechny jejich (polo)nekonečné varianty. Speciálně také jednobodová množina je interval.

Důkaz Věty 2.131. 1) Předpokládejme nejprve, že $A \subset \mathbb{R}$ je interval. Ukážeme, že A je souvislá.

Je-li A jednobodová, nebo prázdná množina, je tvrzení triviální. Dále stačí uvažovat A otevřený interval, tzn. $A = (a, b)$, kde $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Souvislost všech ostatních typů potom dostaneme aplikací Věty 2.127.

Prostory (a, b) a $\mathbb{R}$ (s obvyklými topologiemi) jsou homeomorfní. Jeden příklad homeomorfismu $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, pokud jsou $a, b \in \mathbb{R}$, je funkce

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\pi \frac{x - b}{b - a} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $b = \infty$, pak lze volit homeomorfismus $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ např. $f(x) = \ln(x - a)$ a podobně pro případ $a = -\infty$ a $b \in \mathbb{R}$ (najděte příklad homeomorfismu). Potom Lemma 2.128 spolu s Důsledkem 2.130 implikují souvislost intervalu (a, b).

2) Naopak předpokládejme, že $A \subset \mathbb{R}$ není interval. Potom existují $x, y \in A$, $x < y$ a bod $z \notin A$ tak, že $x < z < y$. Položme

$$B_1 := A \cap (-\infty, z) \quad \text{a} \quad B_2 := A \cap (z, +\infty).$$

Potom $B_1, B_2 \neq \emptyset$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B_1 \cup B_2 = A$ a obě množiny B_1 a B_2 jsou otevřené v podprostoru (A, τ_A). To podle Lemma 2.125 znamená, že A není souvislá. $\square$

S předpokladem souvislosti můžeme ještě doplnit tvrzení Věty 2.95.

Věta 2.132: Reálná spojitá funkce na kompaktním souvislém topologickém prostoru nabývá svého minima, maxima i všech hodnot mezi nimi.

Důkaz. Je-li $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ spojitá (topologie na $\mathbb{R}$ je opět obvyklá) a (X, τ) souvislý, potom podle Vět 2.129 a 2.131 je $f(X)$ interval. Navíc protože je (X, τ) kompaktní, musí být podle Vět 2.94 a 2.104 interval $f(X)$ omezený a uzavřený, z čehož ihned plyne tvrzení věty. $\square$

V dalším si ukážeme, že každý topologický prostor se rozkládá na sjednocení svých maximálních souvislých částí - tzv. *komponent souvislosti.*

Definice 2.133 (Komponenta souvislosti)**:** Buď (X, τ) topologický prostor. Neprázdná množina $S \subset X$ se nazývá *komponenta souvislosti* prostoru (X, τ), právě když platí:

1. S je souvislá.
2. Je-li $A \subset X$ souvislá a $A \supset S$, potom $S = A$.

Příklad 2.134: Následující množiny chápeme jako topologické podprostory $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Prostor $X = [0,1) \cup (1,2]$ má dvě komponenty souvislosti $[0,1)$ a $(1,2]$. Komponentami souvislosti prostoru $Y = \cup_{n\in\mathbb{Z}}[2n, 2n+1]$ jsou množiny $[2n, 2n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Příklad 2.135: Komponentami souvislosti prostoru (X, τ_d), kde τ_d je diskrétní topologie na množině $X \neq \emptyset$, jsou právě všechny jednobodové množiny.

Následující věta shrnuje vlastnosti komponent souvislosti.

Věta 2.136: Buď (X, τ) topologický prostor. Potom platí:

1. Každý bod $x \in X$ leží právě v jedné komponentě souvislosti (X, τ).
2. Dvě různé komponenty souvislosti (X, τ) jsou disjunktní.
3. Komponenty souvislosti (X, τ) jsou uzavřené množiny.
4. Prostor (X, τ) je souvislý, právě když má jedinou komponentu souvislosti.
5. Je-li $\emptyset \neq A \subset X$ souvislá, potom existuje právě jedna komponenta souvislosti S taková, že $A \subset S$.

Důkaz. 1. Buď $x \in X$. Označme

$$\mathcal{S} := \{A \subset X \mid x \in A \ \wedge \ A \text{ je souvislá } \}.$$

Potom jistě $\mathcal{S} \neq \emptyset$, neboť $\{x\} \in \mathcal{S}$. Sjednocení $S := \cup\mathcal{S}$ je souvislá množina podle Věty 2.126. Navíc je jednoduché ověřit, že S je komponenta souvislosti obsahující bod x. Nechť také $T \subset X$ je komponenta souvislosti (X, τ) obsahující x. Potom $T \in \mathcal{S}$, a proto $T \subset S$. Z vlastnosti 2. z definice komponenty souvislosti T pak ale plyne, že $T = S$.

2. Je přímým důsledkem tvrzení 1.

3. Vyplývá z Věty 2.127 a definice komponenty souvislosti.

4. Zřejmé.

5. Jelikož je $A \neq \emptyset$, můžeme zvolit $a \in A$. Podle 1. tvrzení má (X, τ) komponentu souvislosti $S \subset X$ obsahující a. Množina $A \cup S$ je souvislá podle Věty 2.126. Potom z definice komponenty souvislosti S plyne, že $A \cup S = S$, neboli $A \subset S$. To, že je množina S určená jednoznačně, plyne opět z tvrzení 1. $\square$

Předchozí věta má následující důsledek.

Důsledek 2.137: Každý topologický prostor lze napsat jako sjednocení svých komponent souvislosti, tj. sjednocení maximálních souvislých uzavřených množin, které jsou po dvou disjunktní.

Definice 2.138 (Oblast)**:** Otevřená a souvislá podmnožina topologického prostoru se nazývá *oblast*.

Nakonec se ještě seznámíme s jednou silnější vlastností než je souvislost, a to tzv. *křivkovou souvislostí.*

Definice 2.139 (Křivka, stopa křivky)**:** *Křivka* v topologickém prostoru (X, τ) je spojité zobrazení $\varphi : [a, b] \to X$, kde $-\infty < a < b < \infty$. Obor hodnot φ se nazývá *stopa křivky* a značí $[\varphi]$.

Poznámka: Všimněte si, že stopa křivky $[\varphi]$ je souvislá množina, neboť je to spojitý obraz souvislé množiny $[a, b]$, viz Věty 2.129 a 2.131.

Definice 2.140 (Křivkově souvislý prostor, křivkově souvislá množina)**:** Topologický prostor (X, τ) nazýváme *křivkově souvislý* (nebo také *dráhově souvislý*), právě když každé dva body v X lze spojit křivkou, tzn.

$$(\forall x, y \in X)(\exists \varphi \text{ křivka v } (X, \tau))(x, y \in [\varphi]).$$

Analogicky množinu $\emptyset \neq A \subset X$ nazveme *křivkově souvislou*, právě když je (A, τ_A) křivkově souvislý topologický podprostor (X, τ). Prázdná množina je křivkově souvislá.

Věta 2.141: Křivkově souvislý topologický prostor (X, τ) je souvislý.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že (X, τ) je křivkově souvislý, ale není souvislý. Potom podle Lemma 2.125 existují otevřené a neprázdné množiny $A, B \subset X$ takové, že $A \cap B = \emptyset$ a $A \cup B = X$. Zvolme $a \in A$ a $b \in B$. Jelikož je (X, τ) je křivkově souvislý, existuje křivka φ v (X, τ) spojující body a a b.

Stopu φ lze rozložit na $[\varphi] = (A \cap [\varphi]) \cup (B \cap [\varphi])$, kde množiny $A \cap [\varphi]$ a $B \cap [\varphi]$ jsou otevřené v $([\varphi], \tau_{[\varphi]})$, neprázdné, neboť $a \in A \cap [\varphi]$ a $b \in B \cap [\varphi]$, a také disjunktní. To je ovšem spor se souvislostí $[\varphi]$. $\square$

Intervaly jsou zřejmě křivkově souvislé množiny, a proto podle Věty 2.131 pojmy souvislá množina a křivkově souvislá množina znamenají totéž v prostoru $\mathbb{R}$. Obecně ale implikaci ve Větě 2.141 nelze obrátit, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 2.142 (Topologická sinusoida)**:** V $\mathbb{R}^2$ s obvyklou topologií uvažujme množinu

$$S := (0, 0) \cup \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in (0, 1] \right\},$$

viz Obrázek 5.

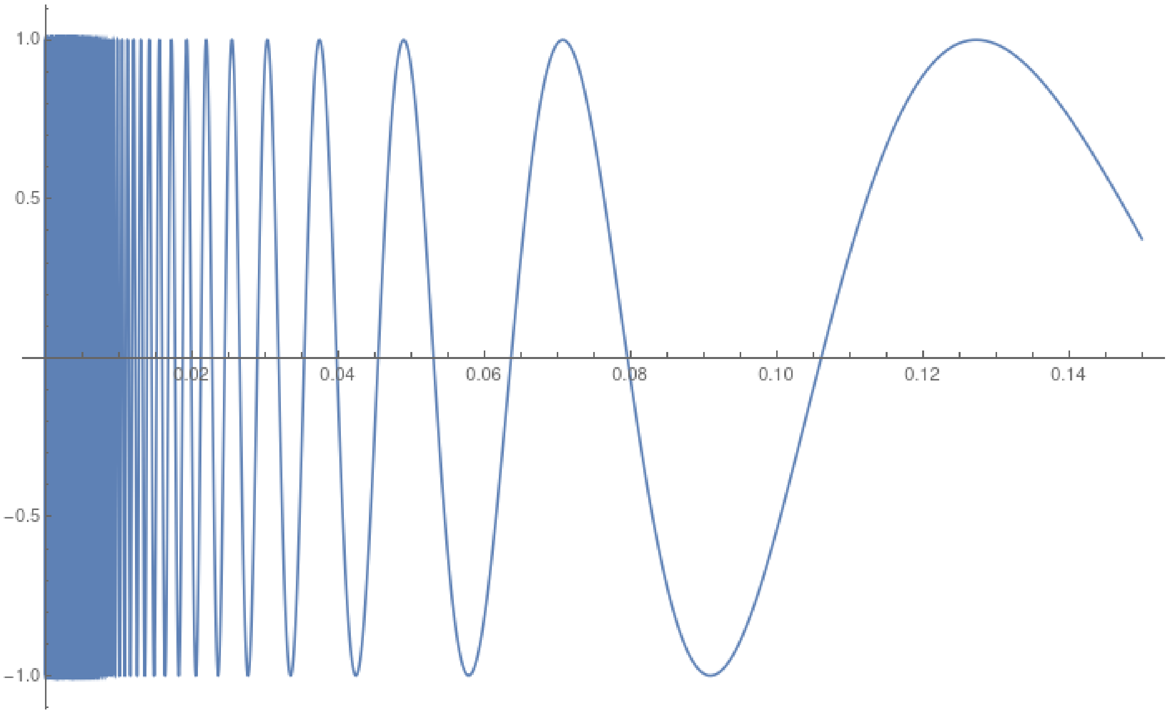
Množina S je souvislá. To je vidět např. z toho, že část

$$S_0 = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in (0, 1] \right\}$$

je spojitý obraz souvislého intervalu $(0, 1]$, a tedy souvislá a $S_0 \subset S \subset \overline{S}$, kde

$$\overline{S} = \{0\} \times [-1, 1] \cup \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in (0, 1] \right\},$$

viz Věta 2.127.



Obrázek 5: Topologická sinusoida.

Na druhou stranu S není křivkově souvislá, protože bod $(0,0)$ nelze v S spojit křivkou s žádným z bodů z S_0. Předpokládejme, že bod $(0,0)$ je možné spojit s nějakým bodem $(a, \sin(1/a))$ v S, tzn., že existuje $\varphi : [0,1] :\to S$ je spojité takové, že $\varphi(0) = (0,0)$ a $\varphi(1) = (a, \sin(1/a))$. Potom i každý bod $(x, \sin(1/x))$, kde $0 < x < a$, musí ležet v $[\varphi]$, jinak by $[\varphi]$ nebyla souvislá.

Položme

$$K_n := [\varphi] \cap \left\{ (x,1) \;\middle|\; 0 \le x \le \frac{1}{n} \right\}$$

Protože $[\varphi]$ je kompaktní (je to spojitý obraz kompaktní množiny $[0,1]$) a K_n jsou uzavřené neprázdné množiny takové, že $K_{n+1} \subset K_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, plyne z Cantorovy věty (Důsledek 2.84), že

$$K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset.$$

Z definice K_n plyne, že K nemůže obsahovat žádný bod z $\mathbb{R}^2$, který má kladnou první složku. Jediný bod v $[\varphi]$, který nemá pozitivní první složku je $(0,0)$, a proto $K = \{(0,0)\}$. Na druhou stranu z definice množin K_n plyne, že druhá složka musí být limitou konstantní posloupnosti $y_n = 1$ pro $n \to \infty$. A tedy druhá složka bodu $(0,0)$ by měla být 1, což je spor.

Definice 2.143 (Lokálně křivkově souvislý prostor, lokálně křivkově souvislá množina)**:** Topologický prostor (X,τ) nazveme *lokálně křivkově souvislý*, právě když

$$(\forall x \in X)(\exists H_x \text{ křivkově souvislé}).$$

Množina $\emptyset \neq A \subset X$ je ***lokálně křivkově souvislá***, právě když je (A, τ_A) lokálně křivkově souvislý topologický prostor. Prázdná množina je lokálně křivkově souvislá.

Zřejmě křivkově souvislý prostor je také lokálně křivkově souvislý. Naopak to ovšem neplatí. Lokálně křivkově souvislý prostor nemusí být totiž ani souvislý, uvažte např. množinu $A = (-1, 1) \setminus \{0\}$ v $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Ani souvislost neimplikuje lokálně křivkovou souvislost, jak ukazuje příklad topologické sinusoidy, viz Příklad 2.142, kde bod $(0, 0)$ nemá žádné křivkově souvislé okolí. Platí ale následující tvrzení.

Věta 2.144: Je-li (X, τ) souvislý a lokálně křivkově souvislý topologický prostor, potom je (X, τ) křivkově souvislý.

Důkaz. Buď $p \in X$. Označme S_p množinu všech bodů z X, které lze spojit s p křivkou (tzv. komponenta křivkové souvislosti). Ukážeme, že S_p je obojetná. Potom, protože $S_p \neq \emptyset$, neboť $p \in S_p$, plyne ze souvislosti (X, τ), že $S_p = X$. Tudíž každý bod z x lze spojit s p křivkou, a proto také každé dva body z X lze spojit křivkou tranzitivně přes p.

Zbývá tedy dokázat, že S_p je obojetná. Nejprve ukážeme, že S_p je otevřená. Buď $x \in S_p$. Potom existuje H_x křivkově souvislé okolí x, protože (X, τ) je lokálně křivkově souvislý. Vezměme libovolně $u \in H_x$. Potom u lze spojit s x křivkou. Také x lze spojit s p křivkou, což plyne z toho, že $x \in S_p$. Celkem tedy je možné u spojit s p křivkou opět tranzitivně přes x, a proto $u \in S_p$. Protože jsme u volili z H_x libovolně, je $H_x \subset S_p$.

Nakonec dokážeme, že S_p je také uzavřená. Buď $y \in \overline{S_p}$ a H_y křivkově souvislé okolí y. Protože $H_y \cap S_p \neq \emptyset$, existuje nějaké $v \in H_y \cap S_p$. Toto v lze spojit křivkou jak s y, tak s p, a proto lze spojit křivkou také y a p. Neboli $y \in S_p$, a protože bylo y voleno libovolně, je $\overline{S_p} \subset S_p$. Tedy $\overline{S_p} = S_p$. □

Věta 2.144 má jeden speciální důsledek pro oblasti v normovaných prostorech, který se nám bude později hodit.

Důsledek 2.145: Je-li $(V, \|\cdot\|)$ normovaný prostor a $A \subset V$ oblast, potom je A křivkově souvislá. Speciálně oblast v $\mathbb{R}^n$ je křivkově souvislá množina.

Důkaz. Stačí ukázat, že otevřená podmnožina normovaného prostoru je lokálně křivkově souvislá. Tvrzení potom plyne z Věty 2.144.

Nechť je tedy A otevřená a neprázdná množina v V (jinak triviální). Buď $x \in A$. Potom existuje $r > 0$ tak, že $B_x(r) \subset A$. Protože je koule $B_x(r)$ konvexní, viz Cvičení 2.5, lze v ní každé dva body spojit speciální křivkou, totiž úsečkou. Z toho plyne, že A je lokálně křivkově souvislá. □

Z toho, co už nyní víme, si můžeme dokázat speciální případ tvrzení, které představuje velmi silný topologický výsledek, viz Věta 2.147.

Věta 2.146: Prostory $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ nejsou homeomorfní.

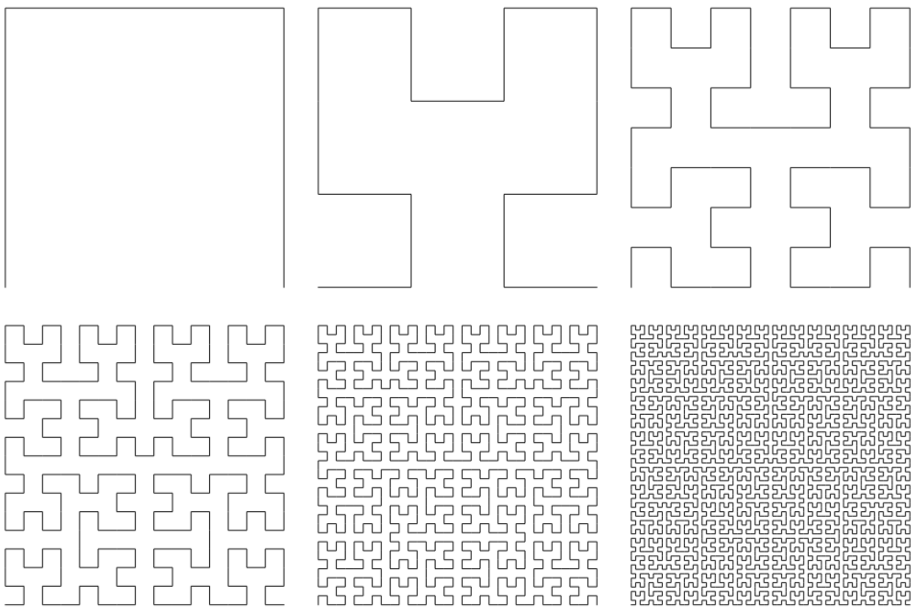
Důkaz. Předpokládejme naopak, že $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ jsou homeomorfní a označme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ homeomorfismus. Z prostoru $\mathbb{R}$ vyjměme nějaký pevně zvolený bod $a \in \mathbb{R}$. Prostor $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ není souvislý, protože to není interval, viz Věta 2.131. Na druhou stranu $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(a)\}$ je souvislý, protože je křivkově souvislý (rozmyslete), viz Věta 2.141. Nakonec si stačí uvědomit, že zobrazení f zúžené na $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ je homeomorfismem prostorů $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ a $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(a)\}$. To je ale spor s Větou 2.130. □

Ideu důkazu Věty 2.146 lze jednoduše rozšířit na prostory $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ s $n \geq 2$. Intuitivně lze očekávat, že ani $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ nebudou homeomorfní, pokud $m \neq n$. To je skutečně pravda, ale důkaz tohoto tvrzení vyžaduje mnohem sofistikovanější metody, konkrétně tzv. Větu o invarianci domén v $\mathbb{R}^n$, kterou dokázal Brouwer v roce 1912 s využitím Věty 2.120. Důkaz může čtenář najít např. v [16].

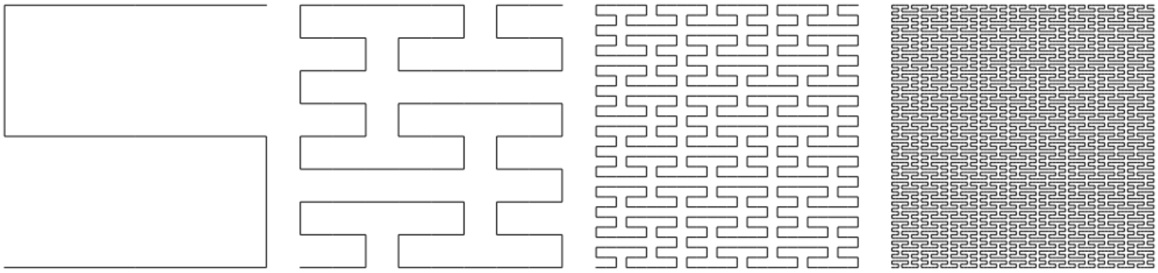
Věta 2.147: Jsou-li $m, n \in \mathbb{N}$ a $m \neq n$, potom prostory $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ nejsou homeomorfní.

Podobně jako ve Větě 2.146 dokážeme, že $[0,1]$ a $[0,1] \times [0,1]$ nejsou homeomorfní, viz Cvičení 2.52. Tzn., že neexistuje spojitá bijekce z $[0,1]$ na $[0,1] \times [0,1]$, protože takové zobrazení by už musel být homeomorfismus, neboť $[0,1]$ je kompaktní, viz Cvičení 2.43.

Jen pro zajímavost poznamenejme na závěr, že existují spojitá zobrazení $\varphi : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$, která jsou surjektivní; tedy křivky, které zcela vyplní čtverec $[0,1] \times [0,1]$. Tyto křivky jsou definovány jako limity určitých specifickým způsobem konstruovaných posloupností křivek a patří mezi ně např. Hilbertova nebo Peanova křivka, viz Obrázky 6 a 7. Z předchozího odstavce plyne, že tyto křivky nemohou být v žádném případě injektivní.



Obrázek 6: Prvních šest iterací konstrukce Hilbertovy křivky.



Obrázek 7: Prvních čtyři iterace konstrukce Peanovy křivky.

2.7 Cvičení

Cvičení 2.1: Dokažte, že v normovaném prostoru $(V, \|\cdot\|)$ platí nerovnost

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

pro všechny $x, y \in V$. Z této nerovnosti plyne spojitost normy jakožto zobrazení $(V, \|\cdot\|) \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$.

Cvičení 2.2: Ukažte detailně, že zobrazení $\|\cdot\|_p$ z Příkladu 2.2 splňují vlastnosti z definice normy. Trojúhelníkovou nerovnost ukažte jen pro speciální případy $p = 2$ a $p = \infty$.

Cvičení* 2.3: Dokažte trojúhelníkovou nerovnost pro $\|\cdot\|_p$ na $\mathbb{C}^n$, je-li $p \in [1, \infty)$.
(Hint: 1. Využijte homogenity $\|\cdot\|_p$ a ukažte, že stačí dokázat nerovnost

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|_p \leq 1, \qquad \text{pro} \;\; \|x\|_p = 1, \|y\|_p = 1 \;\text{ a }\; \lambda \in [0,1].$$

2. Dokažte nerovnost $|\lambda t + (1-\lambda)s|^p \leq \lambda|t|^p + (1-\lambda)|s|^p$ pro $t, s \in \mathbb{R}$ a $\lambda \in [0,1]$, která plyne z konvexnosti funkce $f(t) := |t|^p$, a aplikujte ji k důkazu nerovnosti z kroku 1.)

Cvičení 2.4: Ukažte, že pokud je $p \in (0, 1)$, zobrazení $\|\cdot\|_p$ nesplňuje trojúhelníkovou nerovnost.

Cvičení 2.5: Dokažte, že r-koule $B_x(r)$ se středem $x \in V$ v normovaném prostoru $(V, \|\cdot\|)$ je konvexní množina, tzn. pro $\forall u, v \in B_x(r)$ a $\forall \lambda \in [0, 1]$ je $\lambda u + (1-\lambda)v \in B_x(r)$.

Cvičení 2.6: V metrickém prostoru (X, ρ) můžeme definovat uzavřenou kouli o poloměru $r > 0$ se středem $x \in X$ vztahem $C_x(r) := \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq r\}$. Ukažte, že rovnost $C_x(r) = \overline{B_x(r)}$ obecně neplatí v metrickém prostoru, ale platí v prostorech normovaných.
(Hint: Uvažujte diskrétní metriku.)

Cvičení 2.7: Ukažte, že diskrétní topologie τ_d je indukována diskrétní metrikou ρ_d.

Cvičení 2.8: Dokažte Větu 2.29.

Cvičení 2.9: Dokončete důkaz Věty 2.31.

Cvičení 2.10: Najděte příklad ilustrující, že inkluze $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$ může být striktní.

Cvičení 2.11: Dokončete důkaz Věty 2.34.

Cvičení 2.12: Najděte příklad ilustrující, že inkluze $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ může být striktní.

Cvičení 2.13: Ukažte, že mezi množinami $\overline{A^\circ}$ a $\left(\overline{A}\right)^\circ$ neplatí ani jedna inkluze.

Cvičení 2.14: Dokažte inkluze $\partial(A\cup B) \subset \partial A \cup \partial B$ a $\partial(A\cap B) \subset \partial A \cup \partial B$ a najděte příklady ilustrující neplatnost opačných inkluzí.

Cvičení 2.15: Uvažujte dvouprvkovou množinu $X = \{a, b\}$ s triviální topologií τ_0 a $A = \{a\}$. Určete A'. Všimněte si, že A' není uzavřená.

Cvičení 2.16: Uvažujte topologii na $\mathbb{R}$ tvořenou množinami $\{(x, \infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$ spolu s $\emptyset$ a $\mathbb{R}$. Určete A°, $\overline{A}$ a A' pro jednobodovou množinu $A = \{a\}$ a pro interval $A = (a, b)$.

Cvičení 2.17: Uvažujte topologii τ na $X = \mathbb{R}$ danou systémem lokálních bází $\beta_x = \{U_\epsilon(x) \mid \epsilon > 0\}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, kde

$$U_\epsilon(x) := \{x\} \cup (-\epsilon, \epsilon).$$

Nejprve ověřte, že (X, τ) je T_0-prostor. Poté pro $A = \{0\}$ ukažte, že $A' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a že tato množina není uzavřená v (X, τ).

Cvičení 2.18: Ukažte, že v obecném topologickém prostoru neplatí inkluze $(A')' \subset A'$. (Hint: Uvažujte tříprvkovou množinu $X = \{a, b, c\}$ s triviální topologií τ_0.)

Cvičení 2.19: Ukažte, že $X = \{a, b\}$ s triviální topologií τ_0 není T_0-prostor.

Cvičení 2.20: Ukažte, že $X = \{a, b\}$ s topologií $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ je T_0-prostor, ale není T_1-prostor.

Cvičení 2.21: Ukažte, že $X = \mathbb{R}$ s topologií $\tau_{fin} = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R} \setminus F \mid F \subset \mathbb{R} \text{ konečná}\}$ je T_1-prostor, ale není T_2-prostor.

Cvičení* 2.22: Uvažujte topologii τ na $X = \mathbb{R}$ určenou bází

$$\beta = \{U \subset \mathbb{R} \mid U = (a, b) \text{ nebo } U = (a, b) \setminus K, a < b\}.$$

kde $K := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ukažte, že (X, τ) je T_2-prostor. Dále ukažte, že K je uzavřená množina v (X, τ) a že pro bod $x = 0$ a množinu K neplatí axiom oddělitelnosti T_3. Tzn., že (X, τ) není T_3-prostor.

Cvičení 2.23** (Moorova polorovina s tečnými kruhy)**:** Uvažujte polorovinu $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ s topologií τ určenou lokálními bázemi v každém bodě $(x, y) \in X$ následovně:

- Pro $(x, y) \in X$ s $y > 0$ je $U_\epsilon(x, y) := B_{(x,y)}(\epsilon)$, $0 < \epsilon < y$.
- Pro $(x, 0) \in X$ je $U_\epsilon(x) := \{(x, 0)\} \cup B_{(x,\epsilon)}(\epsilon)$, $\epsilon > 0$.

Ukažte, že (X, τ) je T_3-prostor, ale není T_4-prostor.

Cvičení 2.24: Dokažte, že topologický prostor (X, τ) je Hausdorffův, právě když pro každé $x \in X$ platí:

$$\{x\} = \bigcap_{H_x} \overline{H_x}.$$

Cvičení* 2.25: Dokažte, že topologický prostor (X, τ) je regulární, právě když

$$(\forall x \in X)(\forall H_x)(\exists H'_x)\left(\overline{H'_x} \subset H_x\right).$$

Cvičení 2.26: Na množině $X = \mathbb{N}$ uvažujte topologii $\tau = \emptyset \cup \{\{n, n+1, n+2, \dots\} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Rozhodněte, pro která $n \in \mathbb{N}$ je $\{n\}$ uzavřená a určete $\overline{\{n\}}$. Je (X, τ) T_0-prostor, resp. T_1-prostor?

Cvičení 2.27: Uvažujte $\mathbb{R}^2$ s obvyklou topologií. Spočítejte A' a $(A')'$ pro množinu

$$A := \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Cvičení 2.28: Dokončete důkaz Věty 2.52.

Cvičení 2.29: Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A, B \subset X$ uzavřené a disjunktní množiny. Je pravda, že $d(A, B) > 0$?
Hint: Uvažujte např. $X = \mathbb{R}^2$ s euklidovskou metrikou ρ_2 a množiny

$$A = \mathbb{R} \times \{0\} \quad \text{a} \quad B = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) \,\middle|\, x > 0 \right\}.$$

Cvičení 2.30: Dokažte Větu 2.56.

Cvičení 2.31: Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $A \subset X$. Dokažte, že zobrazení $f : X \to \mathbb{R}$ definované vztahem $f(x) := d(x, A) \equiv \inf\{\rho(x, y) \mid y \in A\}$ je spojité.

Cvičení 2.32: Uvažujme identické zobrazení $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$, tj. $f(x) = x$, kde d označuje diskrétní metriku. Rozhodněte o spojitosti f a f^{-1}.

Cvičení 2.33: Uvažujte intervaly $(0, 1), [0, 1), (0, 1], [0, 1]$ jakožto topologické podprostory $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Pro každou dvojici intervalů rozhodně, zda jsou homeomorfní.
(Hint: Pro dvojici $[0, 1)$ a $(0, 1]$ zkoumejte zobrazení $f(x) = 1 - x$.)

Cvičení 2.34: Ukažte, že $\mathbb{R}$ a interval (a, b) vybavené obvyklou topologií, kde $-\infty \le a < b \le \infty$, jsou homeomorfní topologické prostory.

Cvičení 2.35: Ukažte, že otevřený jednotkový kruh v $\mathbb{R}^2$ a otevřený čtverec $(0, 1) \times (0, 1)$ jsou homeomorfní (jakožto topologické podprostory $\mathbb{R}^2$ s obvyklou topologií).

Cvičení 2.36: Uvažujte $X = \mathbb{Z}$ s topologií $\tau_{fin} = \{\mathbb{Z} \setminus F \mid F \subset \mathbb{Z} \text{ konečná}\}$. Ukažte, že libovolná množina z $(\mathbb{Z}, \tau_{fin})$ je kompaktní, kdežto uzavřené množiny jsou jen podmnožiny konečné.

Cvičení 2.37: Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A, B \subset X$ kompaktní množiny. Dokažte, že

1. $A \cup B$ je kompaktní,
2. $A \cap B$ je kompaktní za předpokladu, že (X, τ) je T_2-prostor.

(Hint: V důkazu 2. tvrzení použijte Větu 2.81.)

Cvičení 2.38: Uvažujte množinu $X = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$ s topologií definovanou následovně:

$$U \subset X \text{ je otevřená } \stackrel{\text{def}}{\iff} U \subset \mathbb{Z}, \text{ nebo } X \setminus U \text{ je konečná.}$$

Dokažte, že množiny $A := \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ and $B := \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ jsou kompaktní, ale $A \cap B$ kompaktní není.

Cvičení 2.39: Uvažujte množinu $X = \{0\} \cup \mathbb{N}^2$ s topologií τ určenou lokální bází následovně. Pro $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ je $\beta_{(m,n)} := \{(m, n)\}$, neboli všechny body $\mathbb{N}^2$ jsou izolované. Systém β_0 okolí 0 tvoří množiny

$$\{0\} \cup \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N} \setminus F, F \subset \mathbb{N} \text{ konečná }, n \geq N_m, N_m \in \mathbb{N}\}.$$

Vhodným očíslováním prvků $\mathbb{N}^2$ definujte posloupnost v (X, τ), jejíž jedinou hromadnou hodnotou je 0, ale která nemá žádnou konvergentní podposloupnost.

Cvičení 2.40: Přímo z definice kompaktnosti dokažte, že kompaktní metrický prostor je nutně omezený.

Cvičení 2.41: Najděte příklad metrického prostoru, který je omezený, ale není totálně omezený.
(Hint: Uvažujte nekonečnou množinu s diskrétní metrikou.)

Cvičení* 2.42: Uvažujte $X = \mathbb{Q}$ jako topologický podprostor $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Ukažte, že množina $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ je uzavřená a totálně omezená, avšak není kompaktní v X.

Cvičení 2.43: Buď $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ spojité, (X, τ_X) kompaktní a (Y, τ_Y) Hausdorffův. Dokažte, že

1. je-li $A \subset X$ uzavřená, potom je $f(A)$ uzavřená,
2. je-li f bijekce, je f homeomorfismus.

Cvičení 2.44: Ověřte vlastnosti kartézského součinu množin:

1. $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,
2. $(A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Na konkrétním příkladu ukažte, že v druhém tvrzení neplatí rovnost.

Cvičení 2.45: Nechť β_X a β_Y jsou báze topologických prostorů (X, τ_X) a (Y, τ_Y). Dokažte, že

$$\beta_X \times \beta_Y = \{U \times V \mid U \in \beta_X, V \in \beta_Y\}$$

je báze $(X \times Y, \tau_X \otimes \tau_Y)$

Cvičení 2.46: Ukažte, že produktová topologie na $\mathbb{R}^n$ (chápáno jako kartézský součin prostorů $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií) a obvyklá topologie na $\mathbb{R}^n$ jsou totožné.

Cvičení 2.47: Ukažte, že Bolzanova–Weierstrassova věta neplatí v metrických prostorech ani v normovaných prostorech nekonečné dimenze.
(Hint: a) Uvažujte např. $\mathbb{R}$ s diskrétní metrikou a posloupnost $\{n\}_{n=1}^{\infty}$. b) Uvažujte lineární prostor omezených posloupností s normou $\|x\| := \max_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$ a v něm posloupnost $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $(e_n)_i := \delta_{i,n}$ (Kroneckerovo delta).)

Cvičení 2.48: Ukažte na příkladě, že ani předpoklad kompaktnosti, ani předpoklad konvexnosti, nelze z Brouwerovy věty o pevném bodě vynechat.

Cvičení 2.49: Dokažte, že (X, τ) není souvislý, právě když existují neprázdné množiny $A, B \subset X$ takové, že
$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset \quad \text{a} \quad A \cup B = X.$$

Cvičení 2.50: Nechť U je otevřená množina v $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Dokažte, že

1. U je spočetné sjednocení otevřených intervalů,

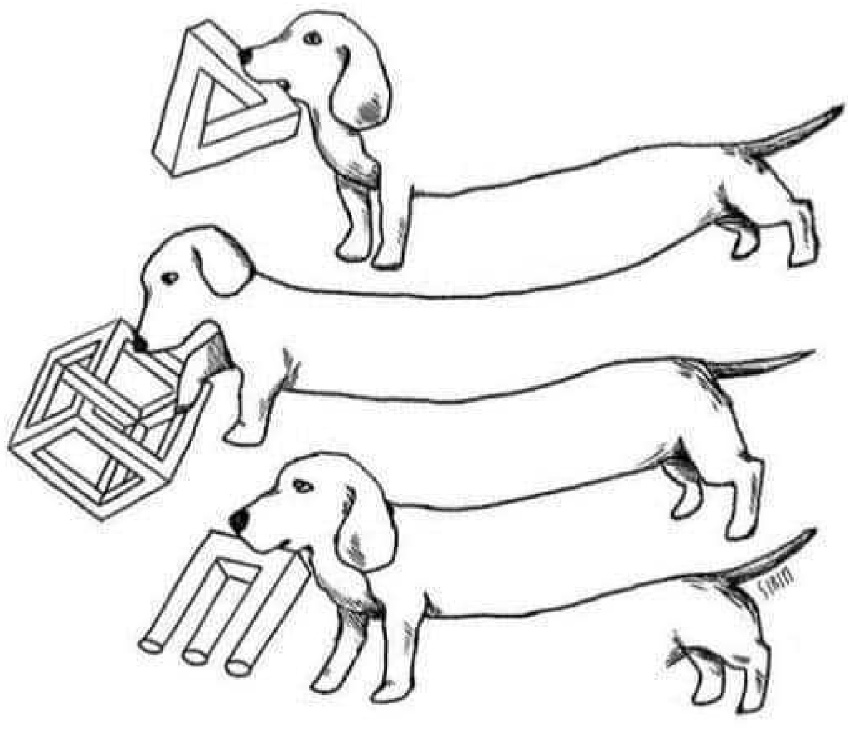
2. U je spočetné sjednocení uzavřených intervalů,

3. U je spočetné sjednocení polootevřených intervalů, tj. intervalů typu $(a, b]$, nebo $[a, b)$.

(Hint: 1. Pro $x \in U \cap \mathbb{Q}$ definujte I_x jako sjednocení otevřených intervalů $(a, b) \subset U$ obsahujících x a ukažte, že I_x je otevřený interval ležící v U. Pro $x \in U \setminus \mathbb{Q}$ ukažte, že existuje $y \in U \cap \mathbb{Q}$ tak, že $x \in I_y$. Potom $U = \cup_{x \in U \cap \mathbb{Q}} I_x$. 2. Ukažte, že každý otevřený interval je spočetným sjednocením uzavřených intervalů a použijte bod 1. 3. Postupujte analogicky jako v bodě 2.)

Cvičení 2.51: Předpokládejme, že v prostoru (X, τ) je dána množina $A \subset X$ a křivka φ, které spojuje vnitřní a vnější bod A, tzn. $A^\circ \cap [\varphi] \neq \emptyset$ a $(X \setminus A)^\circ \cap [\varphi] \neq \emptyset$. Dokažte, že φ protíná hranici A, tj. $\partial A \cap [\varphi] \neq \emptyset$.

Cvičení 2.52: Dokažte, že interval $[0, 1]$ a čtverec $[0, 1] \times [0, 1]$ nejsou homeomorfní.



3 Funkce více proměnných

Naším základním cílem bude zobecnit diferenciální počet funkcí jedné proměnné na funkce *více* proměnných. Budeme uvažovat pouze zobrazení mezi prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, tj. reálné vektorové funkce konečně mnoha reálných proměnných, ačkoliv některé definice a věty je možné vyslovit i pro zobrazení mezi obecnějšími prostory bez větších změn. Odtud dále se budeme také držet konvence, že elementy prostoru $\mathbb{R}^n$ jsou **sloupcové vektory**.

3.1 Derivace funkce více proměnných

Připomeňme si definici derivace funkce jedné proměnné. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je *diferencovatelná* v bodě $a \in \Omega$, existuje-li konečná limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =: f'(a).$$

Číslo $f'(a)$ se nazývá *derivace* f v bodě a a geometricky je směrnicí tečny ke grafu f v bodě $(a, f(a))$. Je jasné, že tuto definici nelze použít pro funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, neboť elementy prostorů $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ mezi sebou nelze dělit.

Definici derivace lze ale ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)|}{|x - a|} = 0$$

za předpokladu, že číslo $f'(a)$ existuje. Předpis $Tx := f'(a)x$, kde $x \in \mathbb{R}$, definuje lineární zobrazení $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funkce f je diferencovatelná v bodě a, pokud lze hodnoty funkce v okolí bodu a „dobře aproximovat“ hodnotami afinní funkce $x \mapsto f(a) + T(x - a)$. Totiž tak, že zbytek $R_a(x) := f(x) - f(a) - T(x - a)$ klesá k nule rychleji než $|x - a|$ pro $x \to a$, tj.

$$\lim_{x \to a} \frac{R_a(x)}{|x - a|} = 0.$$

Tyto úvahy jsou motivací pro následující definici. Připomeňme, že množinu lineárních zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ značíme $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Definice 3.1 (Diferencovatelná funkce, derivace)**:** Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ a $a \in \Omega$. Řekneme, že funkce f je *diferencovatelná v bodě* a, pokud existuje $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tak, že

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x - a)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x - a\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

Lineární zobrazení T nazýváme *derivací* f *v bodě* a a značíme $Df(a)$. Je-li f diferencovatelná v každém bodě množiny Ω, říkáme, že f je *diferencovatelná na* Ω.

Poznámka: 1. V Definici 3.1 je $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ nějaká pevně zvolená norma na $\mathbb{R}^n$ a podobně $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$. Nicméně z Věty 2.102 víme, že všechny normy na $\mathbb{R}^n$ jsou ekvivalentní, z čehož jednoduše vyplývá, že ani diferencovatelnost ani derivace na volbě normy na $\mathbb{R}^n$ resp. $\mathbb{R}^m$ nezávisí (rozmyslete). Proto dále nebudeme normy indexovat a normou $\|\cdot\|$ budeme rozumět euklidovskou normu na $\mathbb{R}^n$ resp. $\mathbb{R}^m$, nebude-li řečeno jinak.
2. Derivace $Df(a)$ se někdy nazývá ***úplná*** nebo ***totální derivace*** f v bodě a. Definici 3.1 lze vyslovit i pro zobrazení mezi obecnými normovanými prostory. V takovém případě se $Df(a)$ nazývá *Fréchetova derivace*.
3. Limitu z Definice 3.1 lze ekvivalentně psát ve tvaru

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Th\|}{\|h\|} = 0.$$

4. Ještě jedna ekvivalentní formulace diferencovatelnosti je užitečná (dokažte jako Cvičení 3.1). Funkce f je diferencovatelná v a, právě když existuje $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, okolí H_a bodu a a funkce $\epsilon_a : H_a \to \mathbb{R}^m$ tak, že

$$(\forall x \in H_a)\,(f(x) = f(a) + T(x-a) + \epsilon_a(x)\|x-a\|)\,,$$

kde $\epsilon_a(x) \to 0$ pro $x \to a$.

Zdůrazněme, že derivace $Df(a)$ funkce více proměnných již není číslo, nýbrž lineární zobrazení! V dalším textu budeme pořád uvažovat funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definované na nějaké neprázdné otevřené množině Ω, a proto **budeme mlčky otevřenost a neprázdnost Ω předpokládat**, aniž bychom to explicitně psali. Podobně m, n budou vždy indexy z množiny $\mathbb{N}$.

Je dobré si uvědomit, že pokud derivace funkce v bodě existuje, je určená jednoznačně.

Lemma 3.2: Derivace diferencovatelné funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $a \in \Omega$ je určena jednoznačně.

Důkaz. Předpokládejme, že dvě zobrazení $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ jsou derivace f v bodě a. Potom existují funkce $\epsilon_a^{(T)}$ a $\epsilon_a^{(S)}$ definované na okolí počátku H_0 tak, že

$$\lim_{h\to 0} \epsilon_a^{(T)}(h) = \lim_{h\to 0} \epsilon_a^{(S)}(h) = 0$$

a

$$f(a+h) = f(a) + Th + \epsilon_a^{(T)}(h)\|h\|,$$
$$f(a+h) = f(a) + Sh + \epsilon_a^{(S)}(h)\|h\|$$

pro všechna $h \in H_0$. Odečtením rovnic dostaneme pro lineární zobrazení $L := T - S$ vztah

$$Lh = \left(\epsilon_a^{(S)}(h) - \epsilon_a^{(T)}(h)\right)\|h\|$$

pro všechna $h \in H_0$. Odtud plyne, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{Lh}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \left(\epsilon_a^{(T)}(h) - \epsilon_a^{(S)}(h)\right) = 0.$$

Zvolíme-li libovolné $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, potom pro $t > 0$ dostatečně malé můžeme položit $h := tx$ a dostaneme

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{Lh}{\|h\|} = \lim_{t \to 0} \frac{L(tx)}{\|tx\|} = \lim_{t \to 0} \frac{tLx}{t\|x\|} = \frac{Lx}{\|x\|}.$$

Tedy $Lx = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$, což znamená, že $L = 0$. Neboli $T = S$. □

Stejně jako v případě funkcí jedné proměnné diferencovatelnost implikuje spojitost. Než si toto jednoduché, ale důležité tvrzení dokážeme, musíme si nejprve vyjasnit pojem norma lineárního zobrazení a omezenost lineárního zobrazení.

Definice 3.3 (Norma lineárního zobrazení, omezené lineární zobrazení)**:** Buďte $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Číslo $\|T\| \in [0, \infty]$ definované vztahem

$$\|T\| := \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y$$

nazýváme *normou lineárního zobrazení* T. Je-li $\|T\| < \infty$, nazýváme T *omezené* lineární zobrazení.

Norma lineárního zobrazení tedy nemusí být konečná, viz Cvičení 3.4. Nicméně množina lineárních zobrazení s konečnou normou je lineární prostor a norma lineárního zobrazení je skutečně normou na tomto prostoru, viz Cvičení 3.2. Norma lineárního zobrazení závisí také na normách $\|\cdot\|_X$ a $\|\cdot\|_Y$ na prostorech X a Y, ačkoliv to ve značení nezdůrazňujeme.

Lemma 3.4: Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Potom platí:

1. $(\forall x \in X)(\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X)$. (*V případě, že je* $x = 0$ *a* $\|T\| = \infty$*, klademe* $\infty \cdot 0 := 0$.)
2. T je omezené $\Leftrightarrow$ T je spojité $\Leftrightarrow$ T je spojité v 0.
3. Je-li $\dim X < \infty$, potom je T omezený.

Důkaz. 1. Pro $x = 0$ platí nerovnost triviálně. Jinak pro libovolné $x \in X$, $x \neq 0$, máme

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X \left\| T \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_Y \leq \|x\|_X \sup_{\|u\|_X = 1} \|Tu\|_Y = \|x\|_X \|T\|.$$

2. Dokážeme řetězec implikací pro $0 \neq T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pro $T = 0$ je tvrzení triviální.

Nechť T je omezené. Buď $x_0 \in X$. Potom pro každé $x \in X$ je

$$\|Tx - Tx_0\|_Y = \|T(x - x_0)\|_Y \leq \|T\|\|x - x_0\|_X.$$

Jelikož je $\|T\| < \infty$, lze k libovolnému $\epsilon > 0$ zvolit číslo $0 < \delta < \epsilon/\|T\|$. S touto volbou pak pro všechna $x \in X$ taková, že $\|x - x_0\|_X < \delta$, platí $\|Tx - Tx_0\|_Y < \epsilon$. Neboli T je spojité v x_0. Protože x_0 bylo libovolné, je T spojité.

Zřejmě, je-li T spojité, je speciálně spojité i v bodě $x = 0$.

Předpokládejme nakonec, že T je spojité v 0. Položíme-li v definici spojitosti $\epsilon = 1$, dostaneme, že

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, \|x\|_X < \delta)(\|Tx\|_Y < 1).$$

Potom pro libovolné $u \in X$ s $\|u\|_X = 1$ můžeme odhadovat

$$\|Tu\|_Y = \frac{2}{\delta} \left\| T\left(\frac{\delta}{2} u\right) \right\|_Y < \frac{2}{\delta},$$

neboť $\|\delta u/2\|_X = \delta/2 < \delta$. Z toho plyne, že $\|T\| \leq 2/\delta$, a tudíž je T omezené.
3. Je-li $\dim X = 0$ je tvrzení triviální. Předpokládejme, že $\dim X = n \in \mathbb{N}$ a zvolme v X bázi $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$. Potom zobrazení $\|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty} : X \to [0, \infty)$ definované vztahem

$$\|x\|_{\mathcal{X},\infty} := \max_{i \in \hat{n}} |x_i^\#(x)|$$

je norma v X. Protože je $\dim X < \infty$, jsou všechny normy na X ekvivalentní (Věta 2.102), a tudíž

$$(\exists K > 0)(\forall x \in X)(\|x\|_{\mathcal{X},\infty} \leq K\|x\|_X).$$

Odtud dále dostaneme pro $x \in X$ odhad

$$\begin{aligned} \|Tx\|_Y &= \left\| T\left(\sum_{i=1}^n x_i^\#(x) x_i\right) \right\|_Y = \left\| \sum_{i=1}^n x_i^\#(x) T x_i \right\|_Y \leq \sum_{i=1}^n |x_i^\#(x)| \, \|Tx_i\|_Y \\ &\leq \|x\|_{\mathcal{X},\infty} \sum_{i=1}^n \|Tx_i\|_Y \leq K\|x\|_X \sum_{i=1}^n \|Tx_i\|_Y = C\|x\|_X, \end{aligned}$$

kde jsme označili

$$C := K \sum_{i=1}^n \|Tx_i\|_Y \,.$$

Z nerovnosti $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$, která platí pro všechna $x \in X$, plyne, že $\|T\| \leq C$, a tudíž je T omezené. $\square$

Věta 3.5: Je-li $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$, potom je f spojitá v bodě a.

Důkaz. Protože je $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferencovatelná v a, platí pro všechna x z nějakého okolí H_a rovnost

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x - a) + \epsilon_a(x)\|x - a\|,$$

kde $\epsilon_a(x) \to 0$ pro $x \to a$. Pošleme-li v poslední rovnosti $x \to a$, jde třetí člen napravo k nule. Totéž platí i o druhém členu, neboť z tvrzení 3. a 1. Lemma 3.4 plyne, že

$$\|Df(a)(x - a)\| \leq \underbrace{\|Df(a)\|}_{<\infty} \|x - a\|$$

pro všechna $x \in H_a$. Celkem tedy je $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, neboli f je spojité v a. $\square$

Další dvě tvrzení se týkají pravidel pro derivování funkcí. Důkaz prvního tvrzení je jednoduchou modifikací důkazu analogické věty pro funkce jedné proměnné. Jediný podstatný rozdíl je v tom, že místo absolutních hodnot píšeme příslušné normy. Důkaz je proto přenechán čtenáři jako cvičení.

Věta 3.6: Nechť $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jsou diferencovatelné v bodě $a \in \Omega$. Potom platí:

1. Pro $c \in \mathbb{R}$ je funkce $f + cg$ diferencovatelná v a a platí
$$D(f + cg)(a) = Df(a) + cDg(a).$$

2. Je-li $m = 1$, je součin fg diferencovatelná funkce v a a platí
$$D(fg)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a).$$

3. Je-li $m = 1$ a $g(a) \neq 0$, je podíl f/g diferencovatelná funkce v a a platí
$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)}{g^2(a)}.$$

Důkaz. Proveďte jako Cvičení 3.5. □

Tvrzení následující věty o derivaci složené funkce se někdy nazývá *řetězové pravidlo* (chain rule), viz také Důsledek 3.19.

Věta 3.7 (Derivace složené funkce)**:** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ a $g : U \to \mathbb{R}^p$, kde $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená taková, že $f(\Omega) \subset U$. Je-li f diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$ a g diferencovatelná v $f(a)$, potom je složená funkce $g \circ f$ diferencovatelná v a a platí
$$D(g \circ f)(a) = Dg\,(f(a))\,Df(a).$$

Důkaz. Označme $b := f(a)$. Z předpokladu diferencovatelnosti funkcí f a g plyne, že
$$f(x) = f(a) + Df(a)(x - a) + \epsilon_1(x)\|x - a\|$$
pro x z nějakého okolí H_a bodu a a podobně
$$g(y) = g(b) + Dg(b)(y - b) + \epsilon_2(y)\|y - b\|$$
pro y z nějakého okolí H_b bodu b, kde $\epsilon_1(x) \to 0$ pro $x \to a$ a $\epsilon_2(y) \to 0$ pro $y \to b$. Jelikož je f spojitá v bodě a, viz Věta 3.5, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $f(H_a) \subset H_b$. Položíme-li nyní $y = f(x)$ a využijeme-li obou předchozích rovnic, dostaneme
$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= g(f(a)) + Dg(f(a))\left(Df(a)(x - a) + \epsilon_1(x)\|x - a\|\right)\\
&\quad + \epsilon_2(f(x))\left\|Df(a)(x - a) + \epsilon_1(x)\|x - a\|\right\|\\
&= g(f(a)) + Dg(f(a))Df(a)(x - a) + \|x - a\|Dg(f(a))\epsilon_1(x)\\
&\quad + \epsilon_2(f(x))\left\|Df(a)\frac{x - a}{\|x - a\|} + \epsilon_1(x)\right\|\|x - a\|
\end{aligned}$$

pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$. Neboli

$$g(f(x)) = g(f(a)) + Dg(f(a))Df(a)(x-a) + \epsilon(x)\|x-a\|,$$

pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$, kde jsme označili

$$\epsilon(x) := Dg(f(a))\epsilon_1(x) + \epsilon_2(f(x)) \left\| Df(a)\frac{x-a}{\|x-a\|} + \epsilon_1(x) \right\|.$$

Důkaz tvrzení bude kompletní, ukážeme-li, že $\epsilon(x) \to 0$ pro $x \to a$. K tomu stačí využít omezenosti derivací jakožto lineárních zobrazení, viz Lemma 3.4, a trojúhelníkové nerovnosti, odkud plyne, že

$$\|\epsilon(x)\| \leq \|Dg(f(a))\|\|\epsilon_1(x)\| + \|\epsilon_2(f(x))\| \left(\|Df(a)\| + \|\epsilon_1(x)\|\right)$$

pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$. Jelikož $\|\epsilon_1(x)\| \to 0$ pro $x \to a$ a vzhledem ke spojitosti f v a také $\|\epsilon_2(f(x))\| \to 0$ pro $x \to a$, vidíme, že skutečně

$$\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0.$$

□

3.2 Parciální a směrové derivace

Nyní se budeme chvíli zabývat pouze **skalárními** funkcemi $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaných na otevřené množině Ω a diferencovatelných v bodě $a \in \Omega$. V tomto případě je $Df(a)$ lineární funkcionál na $\mathbb{R}^n$, tj. $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Z Rieszovy věty vyplývá, že existuje právě jeden vektor $w \in \mathbb{R}^n$ takový, že pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$w^T x = Df(a)x, \tag{17}$$

neboť $w^T x = (w, x)$ a $(\cdot,\cdot)$ značí euklidovský skalární součin na $\mathbb{R}^n$.

Definice 3.8 (Gradient)**:** Buď $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v $a \in \Omega$. Řádkový vektor w^T splňující (17) pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ nazýváme *gradient* funkce f v bodě a a značíme $\nabla f(a)$.

Tedy pro funkci $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencovatelnou v bodě $a \in \Omega$ můžeme psát:

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a)(x-a) + \epsilon_a(x)\|x-a\|$$

pro x z nějakého okolí H_a, kde $\epsilon_a(x) \to 0$ pro $x \to a$. Naším cílem bude najít vhodné explicitní vyjádření pro gradient f.

Definice 3.9 (Směr, směrová derivace)**:** Libovolný nenulový vektor $v \in \mathbb{R}^n$ nazýváme *směr* v $\mathbb{R}^n$. Buď $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a $a \in \Omega$. Existuje-li konečná limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} =: D_v f(a),$$

nazýváme ji *(směrová) derivace f ve směru v a v bodě a.*

Všimněte si, že funkce $g(t) := f(a + tv)$, která je zúžením funkce f na přímku $t \to a + tv$ procházející bodem a se směrnicí v, splňuje

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} =: D_v f(a).$$

Proto směrová derivace $D_v f(a)$ udává „míru změny“ f ve směru v na okolí bodu a.

Věta 3.10: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$. Potom pro každý směr $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existuje směrová derivace $D_v f(a)$ a platí:

$$D_v f(a) = \nabla f(a) v.$$

Důkaz. Z diferencovatelnosti f v bodě a máme

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a)(x - a) + \epsilon_a(x)\|x - a\|$$

pro $x \in H_a$, kde H_a je okolí a a $\epsilon_a(x) \to 0$ pro $x \to a$. Položíme-li $x = a + tv$ pro $t \in \mathbb{R}$ dostatečně malé, aby $a + tv \in H_a$, dostaneme z poslední rovnosti

$$f(a + tv) = f(a) + t\nabla f(a)v + \epsilon_a(a + tv)|t|\|v\|,$$

neboli

$$\left| \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} - \nabla f(a)v \right| = |\epsilon_a(a + tv)|\, \|v\|.$$

Jelikož výraz napravo jde k nule pro $t \to 0$, máme

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \nabla f(a)v,$$

což implikuje tvrzení věty. □

Důsledek 3.11: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$, $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a $c \in \mathbb{R}$ tak, že $u + cv \neq 0$. Potom

$$D_{u+cv} f(a) = D_u f(a) + c D_v f(a).$$

Ještě jeden důsledek Věty 3.10 stojí za pozornost, neboť ukazuje jeden **geometrický význam gradientu**. Z Cauchy–Schwarzovy nerovnosti plyne, že

$$|D_v f(a)| = |\nabla f(a)v| \leq \|\nabla f(a)\|\|v\|$$

a rovnost nastává, pokud je v skalárním násobkem $\nabla f(a)$. Odtud a z Věty 3.10 vidíme, že mezi všemi vektory v se zafixovanou normou rovnou $\|\nabla f(a)\|$ je hodnota směrové derivace $D_v f(a)$ maximální pro $v = \nabla f(a)$ a minimální pro $v = -\nabla f(a)$, pokud $\nabla f(a) \neq 0$. To lze slovy interpretovat tak, že gradient $\nabla f(a)$ udává směr, v němž funkční hodnoty f nejvíce rostou („kudy je to po grafu funkce f nejvíce do kopce, vyrážíme-li z bodu a“). Podobně vektor $-\nabla f(a)$ udává směr, v němž funkční hodnoty f nejvíce klesají.

Vezmeme-li v definici směrové derivace za směr speciálně vektory standardní báze e_i, $i \in \hat{n}$, prostoru $\mathbb{R}^n$ dostaneme se k tzv. *derivaci parciální.*

Definice 3.12 (Parciální derivace)**:** Buď $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \hat{n}$ a $a \in \Omega$. Existuje-li konečná limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \equiv \partial_{x_i} f(a) \equiv \partial_i f(a),$$

kde e_i je i-tý vektor standardní báze $\mathbb{R}^n$, nazýváme ji *parciální derivace f podle i-té proměnné v bodě a.*

Poznámka: Všimněte si, že definice parciální derivace f podle i-té proměnné v bodě a splývá s obvyklou derivací funkce jedné proměnné $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, s, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, tj. funkce, kterou získáme z f zafixováním všech proměnných kromě i-té na okolí a, protože

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g_i(a_i + t) - g_i(a)}{t} = g_i'(a_i).$$

Je zřejmé, že parciální derivace je speciálním případem derivace směrové, neboť $\partial_{x_i} f(a) = D_{e_i} f(a)$. Položíme-li $v = e_i$ ve Větě 3.10, zjistíme, že $\partial_{x_i} f(a)$ je i-tou souřadnicí gradientu $\nabla f(a)$. Dostáváme tak důležité pozorování, že pro $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencovatelnou v bodě $a \in \Omega$ platí:

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Navíc, protože $Df(a)x = \nabla f(a)x$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$, je vektor $\nabla f(a)$ současně maticí zobrazení $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vzhledem ke standardním bázím. Připomeňme, že mezi lineárním zobrazením $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a jeho maticí vzhledem k bázím $\mathcal{X} = (x_1, \ldots x_n)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots y_m)$ prostorů $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ platí vztah

$$\left({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \right)_{j,i} = y_j^{\#}(Ax_i)$$

pro všechna $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$. Vyjádření matice derivace $Df(a)$ vzhledem ke standardním bázím pomocí derivací parciálních není speciální vlastností skalárních funkcí, ale platí obecně i pro funkce vektorové.

Věta 3.13: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$. Označme komponenty $f = (f_1, \ldots f_m)$. Potom pro každé $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$ existuje $\partial_{x_i} f_j$ v bodě a a platí:

$$^{\mathcal{E}_n}(Df(a))^{\mathcal{E}_m} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(a) & \partial_{x_2} f_1(a) & \ldots & \partial_{x_n} f_1(a) \\ \partial_{x_1} f_2(a) & \partial_{x_2} f_2(a) & \ldots & \partial_{x_n} f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(a) & \partial_{x_2} f_m(a) & \ldots & \partial_{x_n} f_m(a) \end{pmatrix}.$$

Poznámka: Je obvyklé ztotožnit lineární zobrazení z $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a jejich matice z $\mathbb{R}^{m,n}$ vzhledem ke standardním bázím. I my **odtud dále ztotožníme** $Df(a)$ a $^{\mathcal{E}_n}(Df(a))^{\mathcal{E}_m}$ a budeme jednoduše psát $Df(a)$ v obou případech. To, zda $Df(a)$ představuje lineární zobrazení, či jeho matici vzhledem ke standardním bázím, bude vždy jasné z kontextu.

Důkaz Věty 3.13. Nejprve si uvědomíme, že konvergence v obvyklé topologii $\mathbb{R}^n$ je ekvivalentní konvergenci v jednotlivých složkách, tj.

$$\lim_{x\to a} \phi(x) = c \quad \Leftrightarrow \quad (\forall j \in \hat{m}) \left(\lim_{x\to a} \phi_j(x) = c_j \right)$$

kde $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}^m$. Skutečně vzhledem k ekvivalenci norem na $\mathbb{R}^m$, viz Věta 2.66, je $\phi(x) \to c$ pro $x \to a$, právě když

$$\lim_{x\to a} \|\phi(x) - c\|_\infty = \lim_{x\to a} \max_{j\in\hat{m}} |\phi_j(x) - c_j| = 0,$$

z čehož tvrzení už přímo vyplývá. Tento fakt budeme často používat.

Vraťme se k důkazu věty. Předpoklad diferencovatelnosti f v bodě a lze psát jako limitu

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)h\|}{\|h\|} = 0.$$

Odtud ve složkách pro libovolné $j \in \hat{m}$ dostaneme

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f_j(a+h) - f_j(a) - (Df(a)h)_j|}{\|h\|} = 0.$$

Položíme-li $h = te_i$, kde $i \in \hat{n}$ a $t \in \mathbb{R}$ dostatečně malé, vyplývá z předchozí rovnosti, že

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f_j(a+te_i) - f_j(a) - t\,(Df(a)e_i)_j|}{|t|\|e_i\|} = 0.$$

Neboli

$$\lim_{t\to 0} \left| \frac{f_j(a+te_i) - f_j(a)}{t} - (Df(a))_{j,i} \right| = 0,$$

kde $(Df(a))_{j,i} = (Df(a)e_i)_j$ značí (j,i)-tý element matice ${}^{\mathcal{E}_n}(Df(a))^{\mathcal{E}_m}$. Zjistili jsme tedy, že $\partial_{x_i} f_j(a)$ existuje a platí pro ni rovnost

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) = (Df(a))_{j,i}\,.$$

$\square$

Definice 3.14 (Jacobiho matice zobrazení, jakobián)**:** Matici

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(a) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(a) & \partial_{x_2} f_1(a) & \ldots & \partial_{x_n} f_1(a) \\ \partial_{x_1} f_2(a) & \partial_{x_2} f_2(a) & \ldots & \partial_{x_n} f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(a) & \partial_{x_2} f_m(a) & \ldots & \partial_{x_n} f_m(a) \end{pmatrix}$$

nazýváme *Jacobiho maticí zobrazení* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě a za předpokladu, že parciální derivace $\partial_{x_i} f_j(a)$ existují pro všechna $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$. Pokud je $m = n$, nazýváme determinant Jacobiho matice f *jakobián* f.

Tedy maticí derivace diferencovatelného zobrazení $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $a \in \Omega$ (vzhledem ke standardním bázím) je jeho Jacobiho matice

$$Df(a) = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(a).$$

Jacobiho matice f je ovšem definovaná, existují-li všechny parciální derivace f, které tvoří elementy této matice. Nabízí se tedy otázka, zda existence všech parciálních derivací $\partial_{x_i} f_j(a)$ pro $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$ implikuje diferencovatelnost f v bodě a. Následující příklad ukazuje, že tomu tak není. Zesílíme-li ovšem předpoklad tak, že budeme požadovat existenci všech parciálních derivací f na nějakém okolí a a jejich spojitost v a, bude již diferencovatelnost f v bodě a zaručena, viz Věta 3.16.

Příklad 3.15: Mějme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x = 0 \text{ nebo } y = 0, \\ 1, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Podobně vyjde $\partial_y f(0, 0) = 0$. Avšak funkce f není v bodě $(0, 0)$ spojitá (ověřte), a proto podle Věty 3.5 nemůže být f ani diferencovatelná v $(0, 0)$. Tento fakt je důsledkem toho, že parciální derivace funkce závisejí jen na chování funkce ve směrech kartézských os (tj. vektorů standardní báze) v okolí a, kdežto derivace f zohledňuje chování f na celém okolí a. Ani existence všech směrových derivací neimplikuje diferencovatelnost, jak ukazuje Cvičení 3.9.

Věta 3.16: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a $a \in \Omega$. Existují-li parciální derivace $\partial_{x_i} f_j$ na okolí a a jsou spojité v a pro všechna $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$, potom je f diferencovatelné v a.

Důkaz. Má-li derivace f v bodě a existovat, musí být dána Jacobiho maticí f v a. Chceme dokázat, že

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

kde jsme označili

$$T := \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(a).$$

K tomu stačí ukázat konvergenci v jednotlivých složkách

$$\lim_{x \to a} \frac{|f_j(x) - f_j(a) - (T(x - a))_j|}{\|x - a\|} = 0.$$

pro všechna $j \in \hat{m}$ (viz začátek důkazu Věty 3.13). Odtud plyne, že větu stačí dokázat pro speciální případ $m = 1$, tj. pro skalární funkci $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bez újmy na obecnosti. Chceme tedy ukázat, že

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - \nabla f(a)(x - a)|}{\|x - a\|} = 0.$$

Nechť B_a označuje nějakou kouli se středem v a poloměrem dostatečně malým, aby na ní existovaly všechny parciální derivace $\partial_{x_i} f$, $i \in \hat{n}$. Nejprve si pro $x \in B_a$ zapíšeme rozdíl $f(x) - f(a)$ následujícím způsobem:

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(v_i) - f(v_{i-1}) \right), \tag{18}$$

kde $v_0 = a$, $v_i = (x_1, \ldots, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ pro $i \in \widehat{n-1}$ a $v_n = x$. Funkce

$$g_i(t) := f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

zobrazuje uzavřený interval s koncovými body a_i a x_i do $\mathbb{R}$, je na něm spojitá a diferencovatelná na jeho vnitřku, neboť

$$g_i'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

a parciální derivace vpravo existují podle předpokladů. Zde je třeba si uvědomit, že

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in B_a$$

pro každé t z uzavřeného intervalu s koncovými body a_i a x_i a $i \in \hat{n}$ (ověřte). Můžeme proto na g_i aplikovat Lagrangeovu větu o přírůstku. Přihlédneme-li ještě k tomu, že $g_i(x_i) = f(v_i)$ a $g_i(a_i) = f(v_{i-1})$, dostaneme

$$f(v_i) - f(v_{i-1}) = (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi, a_{i+1}, \ldots, a_n), \tag{19}$$

kde ξ_i leží uvnitř intervalu s koncovými body a_i a x_i.

Označme $u_i := (x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Potom využijeme-li rovnic (18), (19) a nerovnosti $|x_i - a_i| \leq \|x - a\|$, která platí pro euklidovskou normu, dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\left| f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f(a)(x_i - a_i) \right|}{\|x - a\|} &= \frac{\left| \sum_{i=1}^{n} \left[\partial_{x_i} f(u_i) - \partial_{x_i} f(a) \right] (x_i - a_i) \right|}{\|x - a\|} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(u_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right|. \end{aligned}$$

Poslední výraz jde k 0, pokud $x \to a$, neboť $u_i \to a$ pro $x \to a$ a funkce $\partial_{x_i} f$ jsou spojité v a pro všechna $i \in \hat{n}$ podle předpokladu. Odtud plyne rovnost

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - \nabla f(a)(x - a)|}{\|x - a\|} = 0,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Následující příklad ukazuje, že kritérium diferencovatelnosti z Věty 3.16 je pouze postačující podmínka.

Příklad 3.17: Vyšetříme diferencovatelnost funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované vztahem

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{je-li } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{je-li } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

V bodech $(x,y) \neq (0,0)$ spočítáme parciální derivace f přímým výpočtem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Jelikož jsou obě funkce $\partial_x f$ a $\partial_y f$ spojité na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, je podle Věty 3.16 funkce f diferencovatelná na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pro bod $(x,y) = (0,0)$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} t\sin\frac{1}{t} = 0$$

a podobně je také $\partial_y f(0,0) = 0$. Nicméně zúžíme-li $\partial_x f$ na osu x, dostaneme pro $x \neq 0$ z předchozího výpočtu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x\sin\frac{1}{|x|} - \frac{x}{|x|}\cos\frac{1}{|x|}.$$

Tato funkce nemá limitu pro $x \to 0$, a proto parciální derivace $\partial_x f$ není v bodě $(0,0)$ spojitá. Stejný závěr dostaneme i pro $\partial_y f$. Ukážeme nicméně, že f je diferencovatelná i v bodě $(0,0)$, ačkoliv v tomto případě nemůžeme použít Větu 3.16. K tomu stačí ukázat, že funkce

$$\epsilon(x,y) := \frac{f(x,y)-f(0,0)-\partial_x f(0,0)x-\partial_y f(0,0)y}{\|(x,y)\|} = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

jde k 0 pro $(x,y) \to (0,0)$. To je ovšem pravda, neboť pro $(x,y) \neq (0,0)$ platí odhad

$$\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

Příklad 3.18: Vyšetříme diferencovatelnost funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{je-li } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{je-li } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

V bodech množiny $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ je f diferencovatelná, neboť podobně jako v předchozím příkladě obě parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

existují a jsou spojité na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Snadno také spočítáme, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0.$$

Můžeme se analogickým způsobem jako v předchozí úloze také přesvědčit, že ani nyní nejsou funkce $\partial_x f$ a $\partial_y f$ spojité v bodě $(0,0)$. Z toho nemůžeme udělat žádný závěr o diferencovatelnosti f v počátku a musíme opět analyzovat funkci

$$\epsilon(x,y) := \frac{f(x,y) - f(0,0) - \partial_x f(0,0)x - \partial_y f(0,0)y}{\|(x,y)\|} = \frac{xy}{x^2+y^2},$$

kde $(x,y) \neq (0,0)$. Funkce f je diferencovatelná v počátku, právě když $\epsilon(x,y) \to 0$ pro $(x,y) \to (0,0)$. To ale neplatí, neboť

$$\epsilon(x,x) = \frac{1}{2}, \quad \forall x \neq 0,$$

a proto f není diferencovatelná v bodě $(0,0)$. Všimněte si ale, že f je spojitá v bodě $(0,0)$. To vyplývá z definice spojitosti a odhadu

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Věta 3.13 umožňuje vyjádřit řetězové pravidlo z Věty 3.7 pomocí parciálních derivací, neboť za předpokladů Věty 3.7 dostaneme přechodem k maticím vztah

$$D(g\circ f)(a) = \begin{pmatrix} \partial_{y_1} g_1(f(a)) & \dots & \partial_{y_m} g_1(f(a)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{y_1} g_p(f(a)) & \dots & \partial_{y_m} g_p(f(a)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(a) & \dots & \partial_{x_n} f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(a) & \dots & \partial_{x_n} f_m(a) \end{pmatrix},$$

který lze ekvivalentně také napsat ve tvaru

$$\frac{\partial\left((g\circ f)_1, \dots, (g\circ f)_p\right)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(a) = \frac{\partial\left(g_1,\dots,g_p\right)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}(f(a)) \cdot \frac{\partial\left(f_1,\dots,f_m\right)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(a).$$

Srovnáme-li (k,i)-té elementy matic na obou stranách, dostaneme následující důsledek.

Důsledek 3.19 (Řetězové pravidlo)**:** Za předpokladů Věty 3.7 platí:

$$\frac{\partial(g\circ f)_k}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(a)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$$

pro každé $i \in \hat{n}$ a $k \in \hat{p}$.

Dva speciální případy se objevují častěji. První je případ skalární funkce $g : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. tj. $p = 1$. Potom

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(a)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a), \quad i \in \hat{n}.$$

V druhém ještě speciálnějším případě skládáme skalární funkci $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s vektorovou funkcí jedné proměnné $\phi : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. V takovém případě je $f \circ \phi$ skalární funkce jedné reálné proměnné, pro jejíž derivaci dostáváme

$$(f \circ \phi)'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(t))\phi_i'(t) = \nabla f(\phi(t))\phi'(t),$$

kde jsme pro tentokrát použili značení $\phi'(t) \equiv D\phi(t) = (\phi_1'(t), \dots, \phi_m'(t))^T$.

Vektorová funkce ϕ, je-li spojitá, je křivkou v $\mathbb{R}^m$. Je-li navíc diferencovatelná v nějakém bodě t, představuje vektor $\phi'(t)$ *tečný vektor* ke křivce ϕ v bodě t. Fyzikální interpretace stopy křivky ϕ může být trajektorie, po které se pohybuje částice. Vektor $\phi'(t)$ je potom vektor rychlosti částice v čase t (velocity) a euklidovská norma $\|\phi'(t)\|$ je rychlost částice v t (speed).

Dále se podíváme na vztah gradientu funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a tzv. *vrstevnic* funkce f, tj. množin $S_c := \{x \in \Omega \mid f(x) = c\}$, kde $c \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že f je diferencovatelná v $a \in \Omega$. Potom lze stručně říct, že gradient $\nabla f(a)$ je kolmý na vrstevnici $S_{f(a)}$. Přesný smysl předchozí věty je následující: *Je-li ϕ libovolná křivka s hodnotami v $S_{f(a)}$ definovaná na okolí 0, diferencovatelná v 0 a $\phi(0) = a$, potom je $\nabla f(a)$ kolmý na tečný vektor $\phi'(0)$.* Skutečně podle řetězového pravidla je

$$\nabla f(a)\phi'(0) = (f \circ \phi)'(0) = 0.$$

Nulovost derivace $f \circ \phi$ plyne z toho, že $f \circ \phi$ je konstantní funkce, neboť podle předpokladu $f(\phi(t)) = f(a)$ pro všechna t z okolí 0. Je-li $\nabla f(a) \neq 0$, představuje množina tečných vektorů v a ke křivkám z vrstevnice $S_{f(a)}$ nadrovinu v $\mathbb{R}^n$ s normálovým vektorem $\nabla f(a)$. Tato nadrovina je určena rovnicí

$$\nabla f(a)(x - a) = 0.$$

Tyto úvahy nás motivují k následující definici.

Definice 3.20 (Tečná nadrovina k vrstevnici, tečný prostor)**:** Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce v $a \in \Omega$. Pokud $\nabla f(a) \neq 0$, nazýváme množinu

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(a)(x - a) = 0\}$$

tečnou nadrovinou k vrstevnici $S_{f(a)}$ v bodě a. Zaměření tečné nadroviny, tj. ortogonální doplněk k $\nabla f(a)$ nazýváme *tečný prostor k $S_{f(a)}$ v bodě a* a značíme $T_a(S_{f(a)})$.

Příklad 3.21 (Tečná nadrovina ke grafu funkce)**:** Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce v $a \in \Omega$. Její graf $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \Omega\}$ můžeme chápat také jako vrstevnici $S := \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid F(x, y) = 0\}$ funkce $F(x, y) := f(x) - y$. Buď $a \in \Omega$. Protože

$$\nabla F(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x), -1\right)$$

lze rovnici tečné nadroviny k S v $(a, f(a))$

$$\nabla F(a, f(a))\,[(x, y) - (a, f(a))] = 0$$

vyjádřit jako rovnici

$$y = f(a) + \nabla f(a)(x - a),$$

kterou nazýváme rovnice *tečné nadroviny ke grafu funkce f v bodě* $(a, f(a))$. Rozepíšeme-li ještě poslední rovnici, dostaneme

$$y = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i).$$

Ve speciálním případě funkce jedné proměnné ($n = 1$), je rovnice tečné nadroviny ke grafu f v bodě $(x_0, f(x_0))$ známá rovnice tečné přímky

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

V případě funkce dvou proměnných ($n = 2$) má rovnice tečné (nad)roviny ke grafu f v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tvar

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0)\,.$$

Všimněte si dimenzionální rozdílu u pojmů tečná nadrovina k vrstevnici funkce v bodě a tečná nadrovina ke grafu funkce v bodě. Tečná nadrovina k vrstevnici funkce f v bodě a je lineární varieta v $\mathbb{R}^n$ dimenze $n-1$, pokud $\nabla f(a) \neq 0$, kdežto tečná nadrovina ke grafu funkce f v bodě $(a, f(a))$ je lineární varieta v $\mathbb{R}^{n+1}$ dimenze n.

Příklad 3.22: Uvažujme funkci

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Pro $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} = \frac{a_i}{\|a\|}, \quad \forall i \in \hat{n}.$$

Odtud máme

$$\nabla f(a)(x - a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) = \frac{a^T x}{\|a\|} - \|a\|.$$

Tudíž tečná nadrovina k vrstevnici $S_{f(a)}$ v a je dána rovnicí

$$a^T x = \|a\|^2$$

a tečná nadrovina ke grafu f v $(a, f(a))$ je dána rovnicí

$$y = \frac{a^T x}{\|a\|}.$$

V bodě $a = 0$ není f diferencovatelná, neboť neexistují ani parciální derivace f v 0, což vyplývá z toho, že neexistuje limita funkce

$$\frac{f(0 + te_i) - f(0)}{t} = \frac{|t|}{t}$$

pro $t \to 0$.

3.3 Věta o přírůstku

Už jsme několikrát použili Lagrangeovu větu o přírůstku pro funkci jedné proměnné. Nyní si větu zobecníme na funkce více proměnných.

Věta 3.23 (O přírůstku)**:** Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce na otevřené a *konvexní* množině Ω. Jsou-li $a, b \in \Omega$, potom existuje c na úsečce spojující body a a b tak, že

$$f(b) - f(a) = \nabla f(c)(b - a).$$

Důkaz. Označme $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ křivku, jejíž stopou je úsečka spojující a a b, tj.

$$\phi(t) = a + t(b - a), \quad t \in [0, 1].$$

Potom funkce jedné proměnné $g := f \circ \phi$ je spojitá na $[0, 1]$ a diferencovatelná na $(0, 1)$ podle Věty 3.7. Můžeme proto na g aplikovat Lagrangeovu větu o přírůstku, podle které existuje $t_0 \in (0, 1)$ tak, že

$$g(1) - g(0) = g'(t_0).$$

Tuto rovnost lze přepsat s použitím řetězového pravidla do tvaru

$$f(b) - f(a) = \nabla f(\phi(t_0))(b - a).$$

Nyní stačí označit $c := \phi(t_0)$ a dostáváme tvrzení věty. □

Důsledek 3.24: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná na Ω. Nechť dále $K \subset \Omega$ je konvexní množina a $(\exists M > 0)(\forall x \in K)(\|\nabla f(x)\| \leq M)$. Potom

$$|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|$$

pro všechna $x, y \in K$.

Důkaz. Stačí použít Větu 3.23 a Cauchyho–Schwarzovu nerovnost. □

Na tomto místě je dobré upozornit, že Větu o přírůstku nelze zobecnit na vektorové funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, kde $m \geq 2$. To znamená, že pro vektorovou funkci f diferencovatelnou na konvexní množině Ω **neplatí**

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a)$$

pro nějaká $a, b, c \in \Omega$, jak by člověk mohl čekat v analogii s Lagrangeovou větou o přírůstku funkce jedné proměnné. Tento fakt ilustruje následující příklad.

Příklad 3.25: Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definovanou předpisem

$$f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Zkoumejme, zda pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ platí

$$f(1) - f(0) = Df(c)(1 - 0),$$

což je ekvivalentní rovnosti

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2c\\3c^2\end{pmatrix}.$$

Žádné $c \in \mathbb{R}$ ovšem nevyhovuje současně rovnicím $2c = 1$ a $3c^2 = 1$.

Vektorová analogie Důsledku 3.24 už ale platí.

Věta 3.26: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná na Ω. Nechť dále $K \subset \Omega$ je konvexní množina a

$$(\exists M > 0)(\forall x \in K)(\|Df(x)\| \leq M).$$

Potom

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$$

pro všechna $x, y \in K$.

Důkaz. Buďte $x, y \in K$ a označme $h := y - x$. Dále pro $j \in \hat{m}$ definujme funkci $g_j : [0, 1] \to \mathbb{R}$ vztahem

$$g_j(t) := f_j(x + th).$$

Všimněte si, že $x + th$ pro $t \in [0, 1]$ jsou body úsečky spojující x a y, a proto $x + th \in K$ pro všechna $t \in [0, 1]$ z konvexnosti K. Dále z diferencovatelnosti f plyne, že jsou funkce g_j spojité na $[0, 1]$ a diferencovatelné na $(0, 1)$ pro všechna $j \in \hat{m}$. Potom s využitím Základní věty integrálního počtu a řetězového pravidla dostaneme

$$f_j(x + h) - f_j(x) = g_j(1) - g_j(0) = \int_0^1 g_j'(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \nabla f_j(x + th)h\mathrm{d}t, \quad \forall j \in \hat{m},$$

což můžeme zapsat vektorově ve tvaru

$$f(x + h) - f(x) = \int_0^1 Df(x + th)h\mathrm{d}t, \tag{20}$$

kde Df chápeme jako Jacobiho matici zobrazení f a integrál s vektorovým integrandem aplikujeme po jednotlivých složkách.

Lemma 3.27: Je-li $g : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ spojité na intervalu $[a, b]$, potom platí

$$\left\|\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right\| \leq \int_a^b \|g(t)\|\mathrm{d}t.$$

Důkaz Lemma 3.27. Označme

$$u := \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Potom z Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti plyne, že

$$\|u\|^2 = u^T u = u^T \int_a^b g(t)\mathrm{d}t = \int_a^b u^T g(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b \|u\|\|g(t)\|\mathrm{d}t = \|u\| \int_a^b \|g(t)\|\mathrm{d}t.$$

Nyní stačí na obou stranách zkrátit $\|u\|$, pokud $u \neq 0$, a dostáváme kýženou nerovnost. Je-li $u = 0$, platí lemma triviálně. □

Aplikujeme-li nyní Lemma 3.27 v rovnici (20) a použijeme-li také nerovnost z 1. trzení Lemma 3.4, dostaneme

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \int_0^1 \|Df(x+th)h\| \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \|Df(x+th)\| \|h\| \mathrm{d}t \leq M\|h\|,$$

neboli

$$\|f(y) - f(x)\| \leq M\|y - x\|.$$

□

Dalším důsledkem Věty o přírůstku je, že za jistých předpokladů funkce s nulovou derivací jsou funkce konstantní.

Důsledek 3.28: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce na otevřené a konvexní množině Ω. Je-li $\nabla f = 0$ na Ω, potom je f konstantní na Ω.

Důkaz. Zvolme libovolně $a, b \in \Omega$. Z Věty 3.23 a nulovosti gradientu f na Ω plyne, že $f(a) - f(b) = 0$. Tzn., že $f(a) = f(b)$ pro všechna $a, b \in \Omega$, neboli f je konstantní. □

Poslední důsledek lze zobecnit. Jednak funkce f nemusí být pouze skalární. Za druhé množina Ω nemusí být konvexní, stačí aby byla souvislá. Předpoklad souvislosti Ω je už docela přirozený, jak ukazuje následující jednoduchý příklad.

Příklad 3.29: Buď $\Omega = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x > 0, \\ -1, & \text{je-li } x < 0. \end{cases}$$

Potom $(\forall x \in \Omega)(f'(x) = 0)$, ale f není konstantní na Ω.

Věta 3.30: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná na *oblasti* Ω. Pokud

$$(\forall x \in \Omega)(Df(x) = 0),$$

potom je f konstantní na Ω.

Důkaz. Nejprve větu dokážeme pro případ skalární funkce $m = 1$. Ukážeme, že množina

$$S_c := \{x \in \Omega \mid f(x) = c\},$$

je obojetná pro každé $c \in \mathbb{R}$. Potom zvolíme-li libovolně $a \in \Omega$, bude $S_{f(a)} \neq \emptyset$, neboť $a \in S_{f(a)}$. Ze souvislosti Ω vyvodíme, že $S_{f(a)} = \Omega$, neboli $f(x) = f(a)$ pro všechna $x \in \Omega$, což znamená, že f je na Ω konstantní.

Zbývá tedy ověřit obojetnost množin S_c. Jelikož $S_c = f^{-1}(\{c\})$ a f je spojitá na Ω, viz Věta 3.5, je podle Věty 2.61 množina S_c uzavřená (tj. v $c\tau_\Omega$). Ukážeme, že je S_c také otevřená. To platí triviálně, pokud $S_c = \emptyset$. Předpokládejme proto, že $S_c \neq \emptyset$ a zvolme libovolně $x \in S_c$. Z otevřenosti Ω plyne existence $r > 0$ tak, že $B_x(r) \subset \Omega$. Podle předpokladu je $\nabla f = 0$ na

$B_x(r)$, a tudíž podle Důsledku 3.28 je $f = c$ na $B_x(r)$, neboť koule je konvexní množina, viz Cvičení 2.5. Tedy $B_x(r) \subset S_c$ a S_c je proto otevřená.

V případě vektorové funkce f, kdy $m \in \mathbb{N}$, si stačí uvědomit, že z předpokladu $Df(x) = 0$ plyne $\nabla f_j(x) = 0$, $\forall j \in \hat{m}$, neboť tyto gradienty jsou řádky matice $Df(x)$. Z předchozí části potom plyne, že komponenty f_j jsou konstantní na Ω pro všechna $j \in \hat{m}$, a tudíž i vektorová funkce $f = (f_1, \dots, f_m)$ je konstantní na Ω. $\square$

3.4 Derivace vyšších řádů

Nejprve se zaměříme na derivace parciální. Předpokládejme, že funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má parciální derivaci $\partial_{x_i} f$ na okolí bodu $a \in \Omega$ pro nějaké $i \in \hat{n}$. Potom můžeme opět aplikovat definici parciální derivace např. podle j-té proměnné tentokrát na funkci $\partial_{x_i} f$ a dostaneme *parciální derivaci f vyššího (druhého) řádu*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \equiv \partial^2_{x_j, x_i} f(a) := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = \lim_{t \to 0} \frac{\partial_{x_i} f(a + te_j) - \partial_{x_i} f(a)}{t}$$

za předpokladu, že limita vpravo existuje. Je-li $i = j$, používáme stručnější značení

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a).$$

Opakováním téhož postupu definujeme parciální derivace třetího a vyšších řádů, např.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(a) := \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)(a)$$

nebo

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i^2}(a) := \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)(a)$$

a analogicky pro další případy. Všimněte si, že použité značení ukazuje v jakém pořadí funkci parciálně derivujeme. Obecně totiž na tomto pořadí záleží.

Příklad 3.31: Spočítáme *smíšené* druhé parciální derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

v bodě $(0, 0)$ funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & \text{je-li } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{je-li } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Nejprve spočítáme parciální derivace prvního řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 y(x^2 + y^2) - 2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 y(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{je-li } (x, y) \neq (0, 0), \\ \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0, & \text{je-li } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3(x^2+y^2)-2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{je-li } (x,y) \neq (0,0), \\ \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0, & \text{je-li } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Odtud dále dostaneme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = 1$$

a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = 0.$$

Pozorujeme tedy, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Pro $(x,y) \neq (0,0)$ ověříme přímým výpočtem, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{x^6 + 6x^4y^2 - 3x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}.$$

Všimněte si, že tato funkce není spojitá v bodě $(0,0)$.

Pokud jsou ale smíšené derivace spojité, na pořadí parciálního derivování už nezáleží. Toto tvrzení lze vyslovit i za mírně slabších předpokladů.

Věta 3.32: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \Omega$ a $i, j \in \hat{n}$. Pokud $\partial_{x_i} f$ a $\partial^2_{x_i,x_j} f$ existují na okolí a a $\partial^2_{x_i,x_j} f$ je spojitá v a, potom existuje také $\partial^2_{x_j,x_i} f(a)$ a platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Důkaz. Jelikož se ve větě objevují jen proměnné x_i a x_j, stačí tvrzení dokázat pro funkci dvou proměnných. Předpokládejme tedy, že $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taková, že existují $\partial_y f$ a $\partial^2_{y,x} f$ na okolí bodu $(a,b) \in \Omega$ a $\partial^2_{y,x} f$ je spojitá v bodě (a,b).

Pro $s \in \mathbb{R}$ dostatečně malé, máme

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a+s,b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{g_t(s) - g_t(0)}{t},$$

kde jsme označili

$$g_t(\xi) := f(a+\xi, b+t) - f(a+\xi, b).$$

Podle Lagrangeovy věty o přírůstku je

$$\frac{g_t(s) - g_t(0)}{s} = g_t'(\tilde{s}) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+\tilde{s}, b+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\tilde{s}, b),$$

kde $\tilde{s}$ leží mezi 0 a s. Odtud pak dostaneme

$$\frac{1}{s}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a+s,b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a+\tilde{s}, b+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\tilde{s}, b)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\tilde{s}, b).$$

Pošleme-li v poslední rovnosti $s \to 0$, potom také $\tilde{s} \to 0$ a vzhledem ke spojitosti funkce $\partial^2_{y,x} f$ v bodě (a, b), dostaneme

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a + s, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b),$$

z čehož plyne tvrzení věty. □

Definice 3.33 (Třídy C^k, hladká funkce)**:** Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kde Ω je otevřená, a $k \in \mathbb{N}$. Pokud všechny parciální derivace f řádu k, tj. funkce

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}},$$

kde $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}_0$, $j_1 + \dots + j_n = k$, existují a jsou spojité na Ω, nazýváme f funkcí *třídy* C^k *na* Ω a píšeme $f \in C^k(\Omega)$. Pokud $f \in C^k(\Omega)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, nazýváme f *hladká* funkce na Ω a píšeme $f \in C^\infty(\Omega)$. Množinu spojitých funkcí na Ω značíme $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$.

Je-li $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vektorová funkce $f = (f_1, \dots f_m)^T$ a $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, řekneme, že f je *třídy* C^k *na* Ω a opět píšeme $f \in C^k(\Omega)$, právě když $f_j \in C^k(\Omega)$ pro všechna $j \in \hat{m}$.

Z Věty 3.16 plyne, že funkce $f \in C^1(\Omega)$ je diferencovatelná na Ω a Věta 3.5 implikuje inkluzi

$$C^1(\Omega) \subset C^0(\Omega).$$

Obecněji máme řetězec inkluzí

$$C^\infty(\Omega) \subset \dots \subset C^k(\Omega) \subset C^{k-1}(\Omega) \subset \dots \subset C^1(\Omega) \subset C^0(\Omega).$$

Dále z Věty 3.32 vyplývá, že při výpočtu libovolné parciální derivace k-tého řádu funkce $f \in C^k(\Omega)$ nezáleží na pořadí jednotlivých parciálních derivací.

Zamysleme se dále nad tím, jak definovat (totální) derivace vyšších řádů. Předpokládejme, že je dána funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, která je diferencovatelná na okolí H_a bodu $a \in \Omega$. Její derivace Df je tedy zobrazení z $\mathbb{R}^n$ s hodnotami v $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, přesněji $Df : H_a \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Použijeme-li zobecnění Definice 3.1 na zobrazení mezi obecnými normovanými prostory, dospějeme k následující definici: Řekneme, že funkce f je *dvakrát diferencovatelná v bodě* a, právě když existuje lineární zobrazení $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ takové, že

$$\lim_{x \to a} \frac{\|Df(x) - Df(a) - T(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

Druhou derivaci f v bodě a značíme $D^2 f(a) := T$.

Analogicky bychom zavedli i derivace vyšších řádů a dostali tak zobrazení:

$$\begin{aligned}
&D^3 f(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))), \\
&D^4 f(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)))), \\
&D^5 f(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))))), \text{ atd.}
\end{aligned}$$

Prostor $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je izomorfní s prostorem matic $\mathbb{R}^{m,n}$, a proto bylo možné první derivaci $Df(a)$ reprezentovat (Jacobiho) maticí a používat maticový počet pro práci s první derivací. U vyšších derivací roli matic přebírají tzv. *tenzory*, jež lze chápat jako vícerozměrné analogie matic. Např. druhá derivace $D^2 f(a)$ je element prostoru $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$, který je izomorfní prostoru $\mathbb{R}^{m,n,n}$ objektů (tenzorů) indexovanými třemi indexy. Existuje partie lineární algebry věnovaná tenzorovému počtu, která se ale v základním kurzu nepřednáší.

My se zde práci s tenzory vyhneme, protože v dalším výkladu vystačíme s druhou derivací skalární funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. V tomto případě ztotožňujeme první derivaci Df diferencovatelné funkce f s gradientem ∇f a můžeme proto Df reprezentovat jako zobrazení

$$Df : H_a \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x) \end{pmatrix}.$$

Zde výjimečně interpretujeme gradient jako sloupcový vektor, abychom se drželi konvence, že elementy $\mathbb{R}^n$ jsou sloupcové vektory. Toto zobrazení Df můžeme znovu derivovat podle Definice 3.1 a dostáváme se tak k následující definici.

Definice 3.34 (Druhá derivace skalární funkce)**:** Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce na okolí $a \in \Omega$. Řekneme, že f je *dvakrát diferencovatelná v bodě* a, právě když existuje $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tak, že

$$\lim_{x \to a} \frac{\|Df(x) - Df(a) - B(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0.$$

Zobrazení B nazýváme *druhá derivace* f *v bodě* a a značíme $D^2 f(a)$.

Podobně jako tomu bylo u první derivace můžeme elementy matice zobrazení $Df(a)$ vyjádřit pomocí parciálních derivací f tentokrát druhého řádu.

Věta 3.35: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná funkce v bodě $a \in \Omega$. Potom parciální derivace druhého řádu $\partial^2_{x_i,x_j} f(a)$ existují pro všechna $i, j \in \hat{n}$ a platí

$$\mathcal{E}_n\left(D^2 f(a)\right) = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1,x_1} f(a) & \partial^2_{x_2,x_1} f(a) & \dots & \partial^2_{x_n,x_1} f(a) \\ \partial^2_{x_1,x_2} f(a) & \partial^2_{x_2,x_2} f(a) & \dots & \partial^2_{x_n,x_2} f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2_{x_1,x_n} f(a) & \partial^2_{x_2,x_n} f(a) & \dots & \partial^2_{x_n,x_n} f(a) \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Vyplývá přímo z Věty 3.13. □

Definice 3.36 (Hessova matice)**:** Má-li funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ všechny parciální derivace druhého řádu v bodě $a \in \Omega$, nazýváme matici $\nabla^2 f(a) \in \mathbb{R}^{n,n}$ s elementy

$$\left(\nabla^2 f(a)\right)_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \quad i, j \in \hat{n},$$

Hessova matice funkce f *v bodě* a.

Poznámka (Hessián)**:** Matice $\nabla^2 f(a)$ se také často v literatuře nazývá *Hessián* f v bodě a, ačkoliv by logika tohoto názvosloví spíše naznačovala, že Hessián je determinant Hessovy matice podobně jako tomu je u Jacobiho matice zobrazení a Jacobiánu.

Podle Věty 3.35 je Hessova matice maticí druhé derivace (vzhledem ke standardním bázím) dvakrát diferencovatelného zobrazení. Jak jsme viděli v Příkladu 3.31, Hessova matice nemusí být symetrická. Avšak z Věty 3.32 dostáváme speciálně následující důsledek.

Důsledek 3.37: Je-li $f \in C^2(\Omega)$, potom je matice $\nabla^2 f(x)$ symetrická pro všechna $x \in \Omega$.

3.5 Taylorova věta

Zobecnit Taylorovu větu na funkce více proměnných lze jednoduše na základě Taylorovy věty pro funkce jedné proměnné. Pro pochopení postupu si nejprve spočítáme první dva členy Taylorova rozvoje a zbytek (v Lagrangeově tvaru).

Uvažujme funkci $f \in C^3(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní otevřená množina (např. koule). Zvolme body $a, x \in \Omega$ a nechť $\phi : [0,1] \to \Omega$ je úsečka spojující a a x, tj. $\phi(t) = a + t(x-a)$. Podle Taylorovy věty (s Langrangeovým tvarem zbytku) aplikované na funkci jedné proměnné $g(t) := f(\phi(t)) = f(a + t(x-a))$ dostaneme rozvoj

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2!} g''(0) + \frac{1}{3!} g'''(\xi), \tag{21}$$

kde $\xi \in (0,1)$. Zřejmě $g(1) = f(x)$ a $g(0) = f(a)$. Pomocí řetězového pravidla dále spočítáme, že

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x-a))(x_i - a_i),$$

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a + t(x-a))(x_j - a_j)(x_i - a_i)$$

a

$$g'''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(a + t(x-a))(x_k - a_k)(x_j - a_j)(x_i - a_i).$$

Dosazením spočítaných výrazů do (21) dostáváme výsledek

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)(x_j - a_j)(x_i - a_i) + R_3(x;a),$$

kde

$$R_3(x;a) := \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(a + \xi(x-a))(x_k - a_k)(x_j - a_j)(x_i - a_i).$$

Všimněte si, že bod $a + \xi(x-a)$ je bod uvnitř úsečky spojující body a a x. Dále také platí, že

$$\lim_{x \to a} \frac{R_3(x;a)}{\|x - a\|^2} = 0,$$

neboť

$$|R_3(x;a)| \leq \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(a+\xi(x-a))\right| |x_k-a_k||x_j-a_j||x_i-a_i| \leq \frac{Cn^3}{3!}\|x-a\|^3$$

kde

$$C := \max_{i,j,k\in\hat{n}} \max_{t\in[0,1]}\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(a+t(x-a))\right|$$

je konečné, protože funkce $\partial^3_{x_k,x_j,x_i} f$ jsou podle předpokladu spojité na kompaktní množině $[\phi]$.

Analogickým způsobem dokážeme následující obecný tvar Taylorovy věty.

Věta 3.38 (Taylor)**:** Buď $f \in C^{s+1}(\Omega)$, kde $s \in \mathbb{N}_0$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvexní otevřená množina. Potom pro $a, x \in \Omega$ platí:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{s}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(a)(x_{i_1}-a_{i_1})\ldots(x_{i_k}-a_{i_k}) + R_{s+1}(x;a),$$

kde

$$R_{s+1}(x;a) := \frac{1}{(s+1)!}\sum_{i_1,\ldots,i_{s+1}=1}^{n}\frac{\partial^{s+1} f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{s+1}}}(c)(x_{i_1}-a_{i_1})\ldots(x_{i_{s+1}}-a_{i_{s+1}})$$

a bod c leží uvnitř úsečky spojující body a a x. Navíc

$$\lim_{x\to a}\frac{R_{s+1}(x;a)}{\|x-a\|^s} = 0.$$

Definice 3.39 (Taylorův polynom, zbytek)**:** V Taylorově Větě 3.38 se objevující polynom více proměnných

$$P_s(x;a) := f(a) + \sum_{k=1}^{s}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(a)(x_{i_1}-a_{i_1})\ldots(x_{i_k}-a_{i_k})$$

se nazývá *s-tý Taylorův polynom funkce f se středem v bodě a*. Dále $R_{s+1}(x;a)$ nazýváme *zbytkem po s-tém Taylorově polynomu funkce f se středem v a*.

Pro $f \in C^\infty(\Omega)$ je dle Taylorovy věty

$$f(x) = P_s(x;a) + R_{s+1}(x;a)$$

pro každé $s \in \mathbb{N}_0$. Nicméně z hladkosti f ještě **neplyne**, že

$$\lim_{s\to\infty} R_{s+1}(x;a) = 0,$$

jak jsme viděli už v Příkladu 1.50. Podobně jako ve Větě 1.52 zajistí limitu $R_{s+1}(x;a) \to 0$ pro $s \to \infty$ určitá kontrola všech parciálních derivací f.

Důsledek 3.40: Nechť $f \in C^\infty(\Omega)$ a $a \in \Omega$. Pokud

$$(\exists C > 0)(\exists s_0 \in \mathbb{N})(\forall s \geq s_0)(\forall i_1, \dots i_s \in \hat{n}) \left(\max_{x\in\Omega} \left| \frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}}(x) \right| \leq C^s s! \right),$$

potom existuje $r > 0$ tak, že

$$\lim_{s\to\infty} R_s(x; a) = 0$$

pro všechna $x \in B_a(r)$.

Důkaz. Předpoklady věty umožňují odhadnout zbytek R_s následovně:

$$|R_s(x; a)| \leq \frac{1}{s!} \sum_{i_1,\dots i_s=1}^{n} \max_{x\in\Omega} \left| \frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}}(x) \right| |x_{i_1} - a_{i_1}| \dots |x_{i_s} - a_{i_s}| \leq (nC\|x - a\|)^s .$$

Tudíž, zvolíme-li $r < 1/(nC)$ také dostatečně malé, aby $B_a(r) \subset \Omega$, bude $\|x - a\| < 1/(nC)$ pro každé $x \in B_a(r)$, a proto pravá strana horního odhadu zbytku $R_s(x; a)$ jde k nule pro $s \to \infty$. □

Lineární a kvadratický člen v Taylorově polynomu lze vyjádřit elegantně pomocí gradientu a Hessovy matice f, neboť

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) = \nabla f(a)(x - a)$$

a

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)(x_j - a_j)(x_i - a_i) = (x - a)^T \nabla^2 f(a)(x - a).$$

Taylorova věta pro funkci $f \in C^3(\Omega)$ nám tedy dává vzorec

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a)(x - a) + \frac{1}{2}(x - a)^T \nabla^2 f(a)(x - a) + R_3(x; a).$$

Všimněte si, že první dva členy rozvoje určují tečnou nadrovinu ke grafu funkce f v bodě a:

$$y = f(a) + \nabla f(a)(x - a),$$

což představuje nejlepší lineární aproximaci hodnot funkce f v okolí bodu a. Přidáme-li i kvadratický člen, je

$$y = f(a) + \nabla f(a)(x - a) + \frac{1}{2}(x - a)^T \nabla^2 f(a)(x - a)$$

nejlepší kvadratickou aproximací hodnot funkce f v okolí bodu a a odpovídající plochu bychom mohli nazývat tečnou kvadratickou plochou ke grafu funkce f v bodě a (pokud $\nabla^2 f(a) \neq 0$).

Příklad 3.41: Uvažujme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$f(x, y) = e^{x+y} \sin(xy).$$

Snadným výpočet parciálních derivací f v bodě $(0, 0)$ dostaneme

$$\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0)$$

a

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

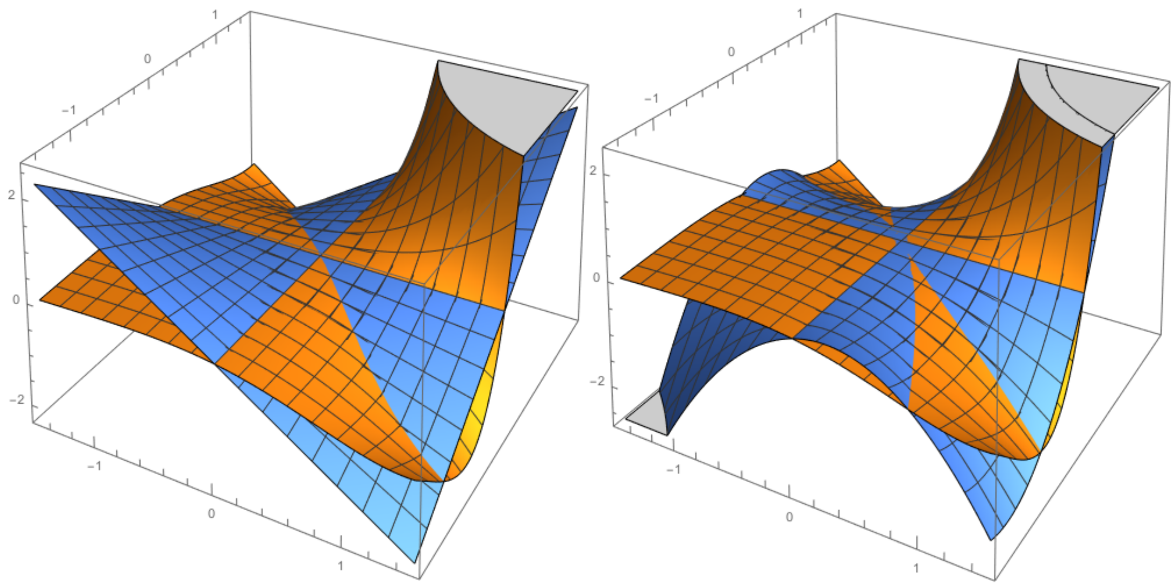
A proto je druhý Taylorův polynom f v bodě $(0, 0)$ funkce

$$P_2(x, y; 0, 0) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y)\nabla^2 f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy.$$

Třetí Taylorův polynom také snadno spočítáme a vyjde nám

$$P_3(x, y; 0, 0) = xy + x^2 y + xy^2.$$

Jak aproximují funkce P_2 a P_3 funkční hodnoty f na okolí počátku ilustruje Obrázek 8.



Obrázek 8: Graf funkce f (oranžová) a Taylorových polynomů P_2 (modrá vlevo) a P_3 (modrá vpravo) z Příkladu 3.41.

3.6 Lokální extrémy funkcí více proměnných

Známý postup hledání lokálních extrémů funkce jedné proměnné využívající diferenciálního počtu nyní zobecníme na funkce více proměnných.

Definice 3.42 ((Ostré) lokální minimum/maximum, lokální extrém)**:** Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $a \in \Omega$. Řekneme, že funkce f má v bodě a:

1. *lokální maximum* $\quad\Leftrightarrow\quad (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in H_a)(f(x) \leq f(a))$,
2. *ostré lokální maximum* $\quad\Leftrightarrow\quad (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in H_a \setminus \{a\})(f(x) < f(a))$,
3. *lokální minimum* $\quad\Leftrightarrow\quad (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in H_a)(f(x) \geq f(a))$,
4. *ostré lokální minimum* $\quad\Leftrightarrow\quad (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in H_a \setminus \{a\})(f(x) > f(a))$.

Funkce f má v bodě a *lokální extrém*, právě když f má v a lokální minimum nebo lokální maximum.

Věta 3.43 (Nutná podmínka extrému)**:** Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \Omega$ lokální extrém. Potom existuje-li $\partial_{x_i} f(a)$ pro $i \in \hat{n}$, je $\partial_{x_i} f(a) = 0$. Speciálně, je-li f diferencovatelná v bodě a, potom $\nabla f(a) = 0$.

Důkaz. Předpokládejme, že pro $i \in \hat{n}$ parciální derivace $\partial_{x_i} f(a)$ existuje. Potom funkce

$$g_i(t) := f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

je funkce jedné proměnné, která má v bodě $t = a_i$ extrém a je v tomto bodě také diferencovatelná. Odtud a z nutné podmínky extrému funkce jedné proměnné, dostaneme

$$0 = g_i'(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

□

Definice 3.44 (Kritický bod)**:** Buď $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$. Pokud $\nabla f(a) = 0$, nazýváme a *kritický bod* (nebo také *stacionární bod*) funkce f.

Podle Věty 3.43 má-li diferencovatelná funkce extrém v bodě a, je to její kritický bod. Samozřejmě naopak to neplatí, tzn., že v kritickém bodě f ještě nemusí mít f extrém (např. $f(x) = x^3$ v $x = 0$). V případě dvakrát diferencovatelné funkce jedné proměnné má f v kritickém bodě a ostré lokální minimum resp. maximum, pokud $f''(a) > 0$ resp. $f''(a) < 0$. Pro funkce více proměnných funguje obdobná postačující podmínka, jen roli znaménka hraje definitnost Hessovy matice f.

Připomeňme si definici definitnosti symetrické matice z lineární algebry.

Definice 3.45 (PD, PSD, ND, NSD, IND)**:** Symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ nazveme:

1. *pozitivně definitní (PD)* $\quad\Leftrightarrow\quad (\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})(x^T A x > 0)$,
2. *pozitivně semidefinitní (PSD)* $\quad\Leftrightarrow\quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)(x^T A x \geq 0)$ a A není PD,

3. *negativně definitní (ND)* $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})(x^T A x < 0)$,

4. *negativně semidefinitní (NSD)* $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(x^T A x \leq 0)$ a A není ND,

5. *indefinitní (IND)* $\Leftrightarrow$ $(\exists x, y \in \mathbb{R}^n)(x^T A x > 0 \ \wedge \ y^T A y < 0)$.

Poznámka: V anglické literatuře se definice PSD/NSD většinou uvádí bez dodatku „A není PD/ND“, tzn., že PD matice tvoří podmnožinu PSD matic podobně jako čísla kladná jsou také nezáporná. My se zde ovšem přidržíme uvedené definice používané v kurzu lineární algebry na FJFI.

Čtenář by měl být obeznámen z kurzu lineární algebry s tím, jak určit definitnost symetrické matice tzv. metodou „doplňování na čtverce“ kvadratické formy $q_A(x) := x^T A x$. Připomeňme si ještě užitečné Sylvestrovo kritérium striktní definitnosti matice.

Věta 3.46 (Sylvestrovo kritérium)**:** Nechť $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ a $A = A^T$. Pro $k \in \hat{n}$ označme $\Delta_k := \det A[k]$ (***hlavní minory*** *A*), kde $A[k] \in \mathbb{R}^{k,k}$ je $k \times k$ podmatice matice A, tj. $(A[k])_{i,j} = A_{i,j}$, $\forall i, j \in \hat{k}$. Potom platí:

1. A je PD $\Leftrightarrow$ $(\forall k \in \hat{n})(\Delta_k > 0)$,

2. A je ND $\Leftrightarrow$ $(\forall k \in \hat{n})((-1)^k \Delta_k > 0)$.

Pro důkaz postačující podmínky pro extrém funkce více proměnných budeme ještě potřebovat následující pomocné tvrzení.

Lemma 3.47: Nechť $A : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n,n}_{\text{sym}}$ je zobrazení s hodnotami v prostoru symetrických matic $\mathbb{R}^{n,n}_{\text{sym}}$, které je spojité v bodě $a \in \Omega$.

1. Je-li $A(a)$ PD, resp. ND, potom existuje H_a tak, že pro všechna $x \in H_a$ je $A(x)$ PD, resp. ND.

2. Je-li $A(a)$ IND, potom existuje H_a a vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ tak, že pro všechna $x \in H_a$ je $u^T A(x) u > 0$ a $v^T A(x) v < 0$.

Důkaz. 1. Nechť $A(a)$ je PD. Všechny hlavní minory $\Delta_k := \det A[k] : \Omega \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce v bodě a, neboť determinant je spojitou funkcí maticových elementů $A_{i,j}$. A maticové elementy $A_{i,j} : \Omega \to \mathbb{R}$ jsou také spojité funkce v bodě a, jak plyne z předpokladu spojitosti maticové funkce A v bodě a. Tedy hlavní minory Δ_k jsou složením spojitých funkcí, a tudíž spojité v a pro každé $k \in \hat{n}$.

Podle Sylvestrova kritéria je $\Delta_k(a) > 0$ pro všechna $k \in \hat{n}$. Díky spojitosti funkce Δ_k v bodě a najdeme okolí $H_a^{(k)}$ tak, že $\Delta_k(x) > 0$ pro všechna $x \in H_a^{(k)}$. Položíme-li

$$H_a := \bigcap_{k=1}^{n} H_a^{(k)},$$

potom $(\forall x \in H_a)(\forall k \in \hat{n})(\Delta_k(x) > 0)$, a proto jsou matice $A(x)$ PD pro všechna $x \in H_a$ podle Sylvestrova kritéria.

Pro ND variantu tvrzení stačí využít již dokázanou PD variantu a to, že matice A je PD, právě když $-A$ je ND.

2. Nakonec předpokládejme, že $A(a)$ je IND. Potom existují vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ takové, že $u^T A(a) u > 0$ a $v^T A(a) v < 0$. Jelikož jsou funkce $x \mapsto u^T A(x) u$ a $x \mapsto v^T A(x) v$ spojité v bodě a (rozmyslete), musí existovat okolí $H_a^{(u)}$ a $H_a^{(v)}$ bodu a tak, že

$$(\forall x \in H_a^{(u)})(u^T A(x) u > 0) \quad \text{a} \quad (\forall x \in H_a^{(v)})(v^T A(x) v < 0).$$

Tudíž pro důkaz tvrzení stačí položit $H_a := H_a^{(u)} \cap H_a^{(v)}$. □

Věta 3.48 (Postačující podmínka pro extrém)**:** Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\Omega)$ a bod $a \in \Omega$ je kritický bod f. Potom platí:

1. Je-li $\nabla^2 f(a)$ PD, potom má f v bodě a ostré lokání minimum.
2. Je-li $\nabla^2 f(a)$ ND, potom má f v bodě a ostré lokání maximum.
3. Je-li $\nabla^2 f(a)$ IND, potom f nemá v bodě a lokální extrém f a bod a se nazývá *sedlový bod* f.

Důkaz. Podle předpokladu jsou $\partial_{x_i,x_j} f$ spojité funkce na Ω, je i Hessova matice $\nabla^2 f$ spojité zobrazení na Ω s hodnotami v symetrických maticích, viz Důsledek 3.37. Zde požíváme argument analogický tomu z důkazu Věty 3.13.

1. Předpokládejme nejprve, že $\nabla^2 f(a)$ je PD. Podle Lemma 3.47 existuje $\delta > 0$ tak, že $\nabla^2 f(x)$ je PD pro všechna $x \in B_a(\delta)$. Vezměme $x \in B_a(\delta) \setminus \{a\}$ libovolné ale pevné. Podle Taylorovy věty 3.38 máme

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a)(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^T \nabla^2 f(c)(x-a),$$

kde c leží na úsečce spojující a a x, a tudíž je $c \in B_a(\delta)$. Tedy matice $\nabla^2 f(c)$ je PD. Přihlédneme-li ještě k tomu, že podle předpokladu je a kritický bod f, tzn., že $\nabla f(a) = 0$, dostáváme

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2}(x-a)^T \nabla^2 f(c)(x-a) > 0,$$

neboť $x \neq a$ a $\nabla^2 f(c)$ je PD. Odtud plyne, že $f(x) > f(a)$ pro každé $x \in B_a(\delta) \setminus \{a\}$, a tedy f má v bodě a ostré lokální minimum.

2. Je-li $\nabla^2 f(a)$ ND, je postup zcela analogický jako v bodě 1. Jediný rozdíl je, že kvadratická forma $(x-a)^T \nabla^2 f(c)(x-a)$ z pravé strany poslední rovnice je tentokrát záporná, neboť $\nabla^2 f(c)$ je ND. Odtud vyvodíme, že $f(x) < f(a)$ pro každé $x \in B_a(\delta) \setminus \{a\}$, a proto f má v bodě a ostré lokální maximum.

3. Je-li $\nabla^2 f(a)$ IND, potom opět podle Lemma 3.47 existuje $\delta > 0$ a vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ tak, že

$$u^T \nabla^2 f(x) u > 0 \quad \text{a} \quad v^T \nabla^2 f(x) v < 0$$

pro všechna $x \in B_a(\delta)$. Dále z Taylorovy věty a předpokladu $\nabla f(a) = 0$ plyne pro každé $x \in B_a(\delta)$ rovnost

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2}(x-a)^T \nabla^2 f(c_x)(x-a),$$

kde $c_x \in B_a(\delta)$; zde pro jistotu zdůrazňujeme indexem závislost c_x na x. Položme $x := a + tu$, kde $t \in \mathbb{R}$. Je-li $|t| < \epsilon := \delta/\|u\|$ (uvědomte si, že $u \neq 0$), potom $x = a + tu \in B_a(\delta)$, a proto máme

$$f(a+tu) - f(a) = \frac{1}{2}(tu)^T \nabla^2 f(c_t)(tu) = \frac{t^2}{2} u^T \nabla^2 f(c_t) u > 0$$

pro všechna $t \in (-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}$, neboť $c_t \in B_a(\delta)$. Dokázali jsme tedy, že existuje $\epsilon > 0$ tak, že

$$f(a+tu) > f(a)$$

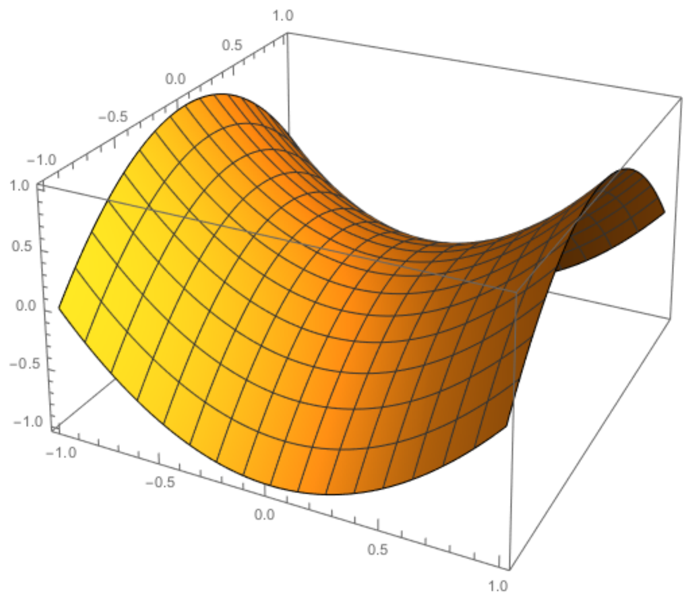
pro všechna $t \in (-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}$. Analogicky bychom ukázali, že

$$f(a+tv) < f(a)$$

pro všechna $t \in (-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}$. Tudíž f nemá v bodě a lokální extrém. $\square$

Poznámka: Za silnějšího předpokladu $f \in C^3(\Omega)$, je možné důkaz Věty 3.48 zjednodušit, viz např. [15, Věta 9.23].

Poznámka: Důkaz Věty 3.48 ukazuje, že pokud je $\nabla f(a) = 0$ a matice $\nabla^2 f(a)$ je IND, potom existují dva směry $u, v \in \mathbb{R}^n$ tak, že funkce f zúžená na přímku $t \mapsto a + tu$ má v bodě a ostré lokální minimum, kdežto funkce f zúžená na přímku $t \mapsto a + tv$ má v bodě a ostré lokální maximum. Geometricky tato situace odpovídá představě *sedla* v bodě a, viz Obrázek 9.



Obrázek 9: Sedlový bod (funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ na okolí bodu $(0, 0)$).

Všimněte si, že kritérium, které poskytuje Věta 3.48, není vyčerpávající. V případě, že $\nabla f^2(a)$ je PSD nebo NSD, nemůžeme udělat žádný závěr, neboť v kritickém bodě a může i nemusí mít funkce f lokální extrém, viz následující příklady. V tomto případě je matice $\nabla f^2(a)$ singulární a kritický bod a se nazývá *degenerovaný*.

Příklad 3.49: Funkce $f(x,y) = x^4 + y^4$ má v bodě $(0,0)$ ostré dokonce globální minimum, ale Hessova matice v kritickém bodě $(0,0)$ funkce f je nulová, tedy PSD (i NSD).

Příklad 3.50: Funkce
$$f(x,y) = x^2 + y^3$$
nemá v bodě $(0,0)$ lokální extrém, neboť hodnoty $f(0,t) = t^3$ jsou kladné pro $t > 0$ a záporné pro $t < 0$. Nicméně bod $(0,0)$ je kritický bod f a Hessova matice f v počátku
$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
je PSD.

Platí ale následující opačná implikace.

Věta 3.51: Nechť $f \in C^2(\Omega)$ má v bodě $a \in \Omega$ lokální minimum, resp. lokální maximum, potom
$$(\forall h \in \mathbb{R}^n)(h^T \nabla^2 f(a) h \geq 0), \qquad \text{resp.} \qquad (\forall h \in \mathbb{R}^n)(h^T \nabla^2 f(a) h \leq 0).$$
(Tzn. $\nabla^2 f(a)$ je PSD, nebo PD, resp. NSD, nebo ND.)

Důkaz. Nechť má f v bodě a lokální minimum. Potom $\nabla f(a) = 0$ podle Věty 3.43. Nechť $r > 0$ je takové, že $B_a(r) \subset \Omega$ a $f(a) \leq f(x)$ pro všechna $x \in B_a(r)$. Zvolme pevně $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$. Potom pro všechna $t \in \mathbb{R}$ taková, že $0 < |t| < r/\|h\|$, je $a + th \in B_a(r)$ a podle Taylorovy Věty 3.38 platí
$$0 \leq \frac{f(a+th) - f(a)}{t^2} = \frac{1}{t} \nabla f(a) h + \frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(c_t) h = \frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(c_t) h. \tag{22}$$
Vektor c_t leží na úsečce mezi a a $a+th$, a proto $c_t \to a$ pro $t \to 0$. Navíc zobrazení $\nabla^2 f$ je spojité v a, jak plyne z předpokladu $f \in C^2(\Omega)$. Proto limitním přechodem $t \to 0$ v nerovnosti (22) dostaneme
$$h^T \nabla^2 f(a) h \geq 0.$$
Tato nerovnost platí pro libovolné $h \in \mathbb{R}^n$, z čehož plyne, že matice $\nabla^2 f(a)$ je PSD, nebo PD.

Má-li f v bodě a lokální maximum, stačí aplikovat právě dokázané tvrzení na funkci $-f$. $\square$

Tedy v případech, kdy je a degenerovaný kritický bod f, tj. $\nabla^2 f(a)$ je PSD nebo NSD, nemáme postačující podmínku pro extrém. I v těchto případech se někdy dá rozhodnout na základě vyšších derivací, pokud existují. Situace je podobná jako v případě funkce jedné proměnné (uvažte např. $f(x) = x^4$), ale značně komplikovanější. Pojem definitnosti je třeba rozšířit z matic na tenzory, což není problém, ale ukázat, že daný tenzor je pozitivně definitní může být kombinatoricky komplikovaná úloha. V případě funkcí dvou proměnných ještě existují poměrně rozumné metody, viz např. [19, Sekce 3.7.2]. My se zde případy degenerovaných kritických bodů zabývat nebudeme.

Metody diferenciálního počtu umožňují najít pouze *lokální* extrémy, ačkoliv v praxi bychom často rádi uměli najít *globální* extrémy nějaké funkce. Někdy lze z lokálních odpovědí udělat odpovědi globální např. za předpokladu konvexnosti funkce f, viz Cvičení 3.11 a 3.12. Pokud nás otázka globálních extrémů zajímá pro spojité funkce omezené na kompaktní množinu, víme že globální extrémy musí existovat z Věty 2.95. Jednou možností, jak je hledat, je vyšetřit funkci na vnitřku kompaktní množiny a zvlášť na její hranici Lagrangeovou metodou pro vázané extrémy (viz Sekce 3.9). Potom stačí srovnat hodnoty funkce v nalezených extrémech. Obecně ale žádný univerzální postup pro důkaz existence a lokalizaci globálních extrémů neexistuje a jednotlivé optimalizační problémy musíme řešit případ od případu.

Jednoduchou ale užitečnou aplikací vyložené metody hledání extrémů, která se objevuje v numerické matematice či statistice, ukazuje následující příklad.

Příklad 3.52 (Metoda nejmenších čtverců)**:** Předpokládejme, že máme k dispozici sadu dat $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^2$ a chceme nalézt lineární kombinaci daných funkcí $f_1, f_2, \ldots, f_m$, tj. funkci

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i \,,$$

tak, aby funkční hodnoty funkce f v bodech x_i „co nejlépe" odpovídaly hodnotám y_i pro každé $i \in \hat{n}$. Cílem je tedy určit neznámé koeficienty lineární kombinace $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Budeme předpokládat, že $m \leq n$, což není na závadu, neboť typicky je množství dat n mnohem větší než počet funkcí m. Dále budeme předpokládat, že soubor funkcí $f_1, \ldots, f_m$ je lineárně nezávislý, což je také přirozený předpoklad, který nepředstavuje zásadní omezení.

Funkce f_i mohou být např. monomy $f_i(x) = x^i$. V takovém případě prokládáme data polynomiální křivkou.

Metoda nejmenších čtverců spočívá v myšlence minimalizovat tzv. střední kvadratickou odchylku celkové chyby, tzn., že hledáme koeficienty $c_1, c_2, \ldots, c_m$ tak, aby hodnota

$$F(c) := \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - f(x_i)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (Ac)_i\big)^2 = \|y - Ac\|^2$$

byla co nejmenší. Zde jsme označili $c := (c_1, \ldots c_m)^T$ a

$$A := \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_m(x_n) \end{pmatrix}.$$

Aplikujme analytický postup pro hledání extrémů funkcí více proměnných na funkci F. Nejprve spočítáme gradient funkce F. Pro $j \in \hat{m}$ máme

$$\frac{\partial F}{\partial c_j}(c) = -2 \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (Ac)_i\big) A_{i,j} = -2(A^T y)_j + 2(A^T A c)_j \,.$$

A tedy $\nabla F(c) = 0$, právě když
$$A^T y - A^T A c = 0. \tag{23}$$
Z lineární nezávislosti souboru funkcí $f_1, \ldots, f_m$ plyne, že matice A má plnou hodnost, tzn. $h(A) = m$, neboť $m \leq n$. V takovém případě je matice $A^T A$ regulární, viz Cvičení 3.14. Rovnice (23) má proto jediné řešení
$$c = (A^T A)^{-1} A^T y.$$

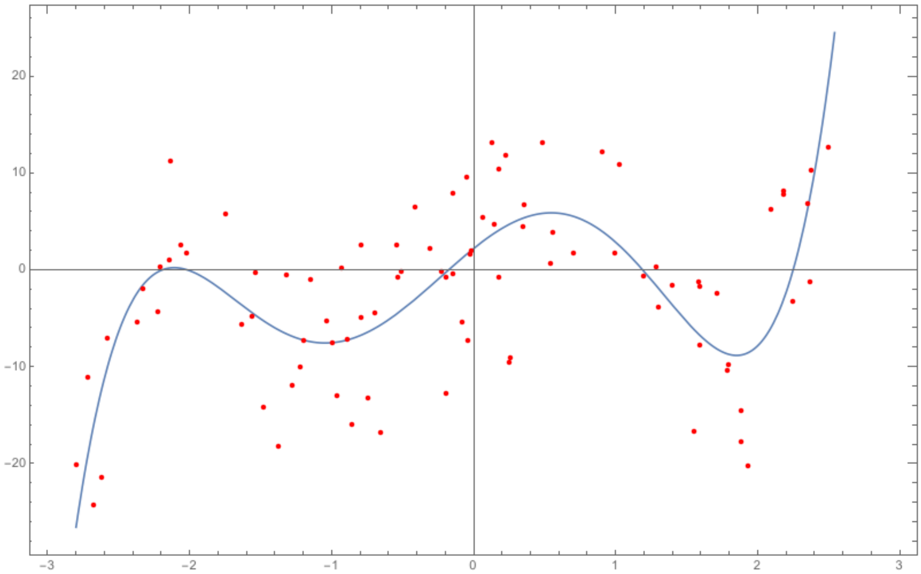
Dále ověříme, že F má v nalezeném vektoru c ostré lokální minimum. Parciální derivace F druhého řádu jsou
$$\frac{\partial^2 F}{\partial c_i \partial c_j}(c) = 2(A^T A)_{j,i} \quad \forall i, j \in \hat{m},$$
a tedy
$$\nabla^2 F(c) = 2A^T A.$$
Matice $A^T A$ je pozitivně definitní, neboť pro $x \in \mathbb{R}^m$ je
$$x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$$
a rovnost nastává pouze pro $x = 0$, protože je $A^T A$ je regulární.

Nakonec ověříme, že je funkce F ryze konvexní na $\mathbb{R}^m$. Potom bude vektor c jediným globálním minimem F podle tvrzení ze Cvičení 3.11 a 3.12. Uvažujme tedy nějaká $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^m$, $c_1 \neq c_2$ a $t \in (0, 1)$. Potom
$$\begin{aligned} F(tc_1 + (1-t)c_2) &= \|y - A\,(tc_1 + (1-t)c_2)\,\|^2 = \|t\,(y - Ac_1) + (1-t)\,(y - Ac_2)\,\|^2 \\ &\leq (t\|y - Ac_1\| + (1-t)\|y - Ac_2\|)^2 < tF(c_1) + (1-t)F(c_2), \end{aligned}$$
kde poslední nerovnost vyplývá z ryzí konvexnosti kvadratické funkce $x \mapsto x^2$.

3.7 Věta o inverzní funkci

Naším dalším cílem je dokázat Větu o inverzní funkci a s její pomocí také Větu o implicitní funkci. Obě věty mají mnoho aplikací.

Připomeňme, že derivaci $Df(a)$ chápeme podle potřeby buď jako lineární zobrazení, nebo jako jeho matici vzhledem ke standardním bázím a ve značení to nijak nerozlišujeme. Ztotožňujeme tak derivaci $Df(a)$ a Jacobiho matici
$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(a)$$
pro $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferencovatelnou v bodě $a \in \Omega$. Použití symbolu $Df(a)$ ve smyslu Jacobiho matice f v bodě a je výhodné z důvodu úspory místa, a proto ho budeme nadále preferovat.



Obrázek 10: Ilustrace metody nejmenších čtverců. Data proložená polynomiální křivkou stupně 5.

Představme si, že chceme řešit rovnici tvaru $f(x) = y$, kde $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je daná vektorová funkce. Rozepíšeme-li rovnici po komponentách, hledáme řešení obecného systému

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= y_1, \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) &= y_2, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) &= y_n. \end{aligned}$$

To znamená, že chceme vědět, zda lze vyjádřit neznámé $x_1, \ldots, x_n$ jako funkce $y_1, \ldots y_n$. Takový systém téměř nikdy nelze řešit explicitně i v případě, že řešení existuje. Důležitou odpověď na otázku existence řešení nám dává právě Věta o inverzní funkci. Nicméně má pouze **lokální** charakter. Přesněji věta říká, že je-li $a \in \Omega$ a $f \in C^1(\Omega)$, vyplývá z podmínky $\det Df(a) \neq 0$, že f je prostá na nějakém okolí bodu a, a tudíž invertibilní.

I v případě, že je $\det Df(x) \neq 0$ ve všech bodech $x \in \Omega$, neplyne z toho, že je f prostá na množině Ω, viz Příklad 3.55. Zde je situace odlišná od speciálního případu funkce jedné proměnné, kde platí, že spojitě diferencovatelná funkce f na intervalu (a, b) s nenulovou derivací na (a, b) je (globálně) prostá na (a, b). Rozhodnout o (globální) prostotě funkce více proměnných je obecně obtížný problém.

Pro potřeby důkazu Věty o inverzní funkci si nejprve dokážeme jedno pomocné tvrzení týkající se invertibility lineárních zobrazení. Toto tvrzení nachází aplikace i na mnoha jiných místech. Připomeňme, že na prostoru $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ zavádíme normu podle Definice 3.3.

Lemma 3.53: Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a A je bijekce. Pokud platí nerovnost

$$\|B - A\| \|A^{-1}\| < 1,$$

potom je také B bijekce.

Důkaz. Operátor B lze zapsat ve tvaru

$$B = A + (B - A) = A(I - C),$$

kde $C := -A^{-1}(B-A)$. Odtud je jasné, že pokud je $I-C$ bijekce, musí být i B bijekcí. Důležité je, že

$$\|C\| \leq \|A^{-1}\|\|B - A\| < 1,$$

kde jsme využili nerovnost z Lemma 3.4 a předpoklad dokazovaného tvrzení. Stačí tedy dokázat implikaci

$$\|C\| < 1 \quad \Rightarrow \quad I - C \text{ je bijekce,}$$

což provedeme v další části důkazu.

Důkaz provedeme tak, že inverzi k $I - C$ přímo zkonstruujeme. Definujme operátor $X := \lim_{n\to\infty} X_n$, kde

$$X_n := \sum_{k=0}^{n} C^k = I + C + \cdots + C^n.$$

Nejprve ověříme, že limita v definici X existuje. Protože má prostor $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ konečnou dimenzi (rovnu n^2), je $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ s normou $\|\cdot\|$ úplný prostor, viz Příklad 2.110. Stačí proto ukázat, že je posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská. Jelikož číselná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|C\|^k$$

konverguje, neboť podle předpokladu je $\|C\| < 1$, dostaneme z Bolzanovy–Cauchyho podmínky pro číselné řady

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N}) \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \|C\|^k < \epsilon \right).$$

Potom pro $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ máme

$$\|X_{n+p} - X_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} C^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|C^k\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|C\|^k < \epsilon,$$

kde jsme použili nerovnost $\|C^k\| \leq \|C\|^k$, která plyne z 1. tvrzení Lemma 3.4. Tedy $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.

Nakonec ověříme, že $(I - C)X = I$, z čehož už vyplývá, že $I - C$ je bijekce (a navíc $(I - C)^{-1} = X$) díky konečnosti dimenze $\mathbb{R}^n$. Protože jsou I i C omezené operátory, neboť $\dim \mathbb{R}^n = n < \infty$, jsou podle Lemma 3.4 I i C spojité. Odtud poté máme

$$\begin{aligned}(I - C)X &= (I - C) \lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} (I - C) \sum_{k=0}^{n} C^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} C^k - \sum_{k=0}^{n} C^{k+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} (I - C^{n+1}) = I,\end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že $C^n \to 0$, což plyne opět z nerovnosti $\|C^n\| \leq \|C\|^n$ a předpokladu $\|C\| < 1$. $\square$

Nyní již můžeme dokázat Větu o inverzní funkci.

Věta 3.54 (O inverzní funkci)**:** Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je třídy C^1 na Ω a $a \in \Omega$. Pokud $\det Df(a) \neq 0$, potom existuje okolí H_a takové, že:

1. f je prosté na H_a,
2. $f(H_a)$ je otevřená,
3. inverzní zobrazení f^{-1} je třídy C^1 na $f(H_a)$, $\det Df(x) \neq 0$ pro všechna $x \in H_a$ a platí
$$Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}$$
pro všechna $x \in H_a$.

Důkaz. Označme $A := Df(a)$. Podle předpokladu je matice A regulární, a tudíž invertibilní. Dále z předpokladu $f \in C^1(\Omega)$ plyne, že je Df spojité zobrazení na Ω. Proto existuje $r > 0$ takové, že koule $B_a(r) \subset \Omega$ (z otevřenosti Ω) a pro všechny $x \in B_a(r)$ je

$$\|Df(x) - A\| < \frac{1}{2\|A^{-1}\|}.$$

Ukážeme, že $H_a := B_a(r)$ je hledaným okolím z tvrzení věty.

1. Nejprve dokážeme, že f je prosté na H_a. Pro $y \in \mathbb{R}^n$ si definujeme pomocnou funkci $\phi_y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vztahem
$$\phi_y(x) := x + A^{-1}\left(y - f(x)\right).$$
Všimněte si, že
$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x \textbf{ je pevný bod } \phi_y, \text{ tj. } \phi_y(x) = x.$$
Pro derivaci ϕ_y máme

$$D\phi_y(x) = I - A^{-1}Df(x) = A^{-1}\left(A - Df(x)\right)$$

pro každé $x \in \Omega$. Odtud pro libovolné $x \in H_a$ dostaneme

$$\|D\phi_y(x)\| \leq \|A^{-1}\|\|A - Df(x)\| < \|A^{-1}\|\frac{1}{2\|A^{-1}\|} = \frac{1}{2},$$

kde jsme využili nerovnost z Lemma 3.4. Potom z Věty 3.26 vyplývá nerovnost

$$\|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \tag{24}$$

pro všechna $x_1, x_2 \in H_a$, neboť okolí $H_a \equiv B_a(r)$ je konvexní množina.

Z nerovnosti (24) plyne, že zobrazení ϕ_y má nejvýše jeden pevný bod v množině H_a. Jinak by z předpokladu existence dvou různých bodů $x_1, x_2 \in H_a$ takových, že $\phi_y(x_1) = x_1$ a $\phi_y(x_2) =$

x_2, nerovnost (24) implikovala logický spor $1 \leq 1/2$. Jinými slovy k libovolnému $y \in \mathbb{R}^n$ existuje nejvýše jedno $x \in H_a$ takové, že $f(x) = y$, což znamená, že f je na H_a prosté.

2. Dokážeme, že $f(H_a)$ je otevřená. Nechť $y_0 \in f(H_a)$. Potom existuje $x_0 \in H_a$ tak, že $f(x_0) = y_0$. Jelikož je H_a otevřená, existuje $\epsilon > 0$ tak, že $\overline{B_{x_0}(\epsilon)} \subset H_a$. Ukážeme inkluzi

$$B_{y_0}\left(\frac{\epsilon}{2\|A^{-1}\|}\right) \subset f(H_a),$$

z čehož plyne otevřenost množiny $f(H_a)$.

Zvolme tedy $y \in B_{y_0}\left(\epsilon/(2\|A^{-1}\|)\right)$ libovolné ale pevné. Potom

$$\|\phi_y(x_0) - x_0\| = \|A^{-1}(y - y_0)\| \leq \|A^{-1}\|\|y - y_0\| < \|A^{-1}\|\frac{\epsilon}{2\|A^{-1}\|} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Odtud s využitím nerovnosti (24) dostaneme pro každé $x \in \overline{B_{x_0}(\epsilon)}$ odhad

$$\|\phi_y(x) - x_0\| \leq \|\phi_y(x) - \phi_y(x_0)\| + \|\phi_y(x_0) - x_0\| < \frac{1}{2}\|x - x_0\| + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.$$

Tedy $\phi_y(x) \in B_{x_0}(\epsilon)$ pro $x \in \overline{B_{x_0}(\epsilon)}$. Z toho vidíme, že $\phi_y : \overline{B_{x_0}(\epsilon)} \to \overline{B_{x_0}(\epsilon)}$ je zobrazení mezi úplnými prostory $\overline{B_{x_0}(\epsilon)}$, neboť množina $\overline{B_{x_0}(\epsilon)}$ je uzavřená podmnožina úplného prostoru $\mathbb{R}^n$, viz Věta 2.115. Podle nerovnosti (24) je navíc ϕ_y kontrahující zobrazení na $\overline{B_{x_0}(\epsilon)}$. Potom podle Banachovy věty o pevném bodě (Věta 2.119) existuje $x \in \overline{B_{x_0}(\epsilon)}$ takové, že $\phi_y(x) = x$, neboli $f(x) = y$. Odtud plyne, že

$$y \in f\left(\overline{B_{x_0}(\epsilon)}\right) \subset f(H_a),$$

což jsme chtěli dokázat.

3. Zvolme $y \in f(H_a)$ a $k \in \mathbb{R}^n$ tak, že $y + k \in f(H_a)$. Potom existují $x, x + h \in H_a$ tak, že

$$f(x) = y \quad \text{a} \quad f(x + h) = y + k.$$

Nejprve odvodíme pomocnou nerovnost. Pro libovolné $z \in \mathbb{R}^n$ je

$$\phi_z(x + h) - \phi_z(x) = h + A^{-1}\left(f(x) - f(x + h)\right) = h - A^{-1}k.$$

Odtud a z nerovnosti (24) dostaneme

$$\|h - A^{-1}k\| \leq \frac{1}{2}\|h\|.$$

Přihlédneme-li ještě k nerovnosti, viz Cvičení 2.1,

$$\|h - A^{-1}k\| \geq \|h\| - \|A^{-1}k\|,$$

vidíme, že

$$\|h\| \leq 2\|A^{-1}k\| \leq 2\|A^{-1}\|\|k\|. \tag{25}$$

Na začátku důkazu jsme okolí H_a zkonstruovali tak, že platilo $\|A^{-1}\|\|Df(x) - A\| < 1/2$ pro všechna $x \in H_a$. Odtud a z Lemma 3.53 plyne, že je $Df(x)$ invertibilní pro všechna $x \in H_a$, neboli

$$(\forall x \in H_a)(\det Df(x) \neq 0).$$

Z toho dále vyvodíme, že je zobrazení $x \mapsto (Df(x))^{-1}$ spojité na H_a. To je vidět např. ze známého vzorečku pro inverzní matici z lineární algebry

$$(Df(x))^{-1} = \frac{1}{\det Df(x)} (Df(x))^{\mathrm{adj}},$$

neboť determinant $\det Df(x) \neq 0$ a je spojitou funkcí maticových elementů $Df(x)$, což jsou parciální derivace f, které jsou podle předpokladu $f \in C^1(\Omega)$ spojité. Také elementy adjugované matice $(Df(x))^{\mathrm{adj}}$ jsou spojitými funkcemi parciálních derivací f, neboť jsou opět definovány jako jisté determinanty.

Označíme-li si nyní inverzní funkci $g := f^{-1}$ na $f(H_a)$ (jejíž existence již byla dokázána), potom k důkazu 3. tvrzení nyní už stačí ukázat, že je g diferencovatelná na $f(H_a)$ a pro její derivaci platí

$$Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}$$

pro všechna $x \in H_a$. Potom bude $g \in C^1(f(H_a))$ a platí vzorec pro derivaci inverzní funkce.

Protože

$$\begin{aligned} g(y+k) - g(y) - (Df(x))^{-1} k &= h - (Df(x))^{-1} k \\ &= -(Df(x))^{-1} (f(x+h) - f(x) - Df(x)h), \end{aligned}$$

dostaneme s využitím (25) nerovnost

$$\frac{\|g(y+k) - g(y) - (Df(x))^{-1} k\|}{\|k\|} \leq 2\|A^{-1}\|\|(Df(x))^{-1}\| \frac{\|f(x+h) - f(x) - Df(x)h\|}{\|h\|}$$

Z nerovnosti (25) plyne, že $h \to 0$, pokud $k \to 0$. Protože výraz napravo v poslední nerovnosti jde k nule pro $h \to 0$, neboť f je diferencovatelná v $x \in H_a$, dostáváme konečně, že

$$\lim_{k \to 0} \frac{\|g(y+k) - g(y) - (Df(x))^{-1} k\|}{\|k\|} = 0,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka: Všimněte si, že předpoklad $f \in C^1(\Omega)$ byl plně využit až v důkazu 3. tvrzení Věty 3.54. Pro důkaz tvrzení 1. a 2. Věty 3.54 stačilo předpokládat, že f je diferencovatelná na Ω, Df spojitá v bodě a a $\det Df(a) \neq 0$. Spojitost derivace f v bodě a už ale vypustit nelze, viz Cvičení 3.17.

Poznámka: Pokud je funkce f ve Větě 3.54 o inverzní funkci třídy C^k na Ω, kde $k \geq 2$, potom je také f^{-1} třídy C^k na $f(H_a)$. To lze dokázat indukcí a derivováním vztahu pro Df^{-1} z 3. tvrzení Věty 3.54. Postup jenom naznačíme. Využijeme-li vyjádření inverzní matice pomocí matice adjugované, můžeme vzorec pro parciální derivaci $\partial\left(f^{-1}\right)_i/\partial y_j$ v bodě $y \in f(H_a)$ napsat ve tvaru

$$\frac{\partial\left(f^{-1}\right)_i}{\partial y_j}(y) = \left(Df^{-1}(y)\right)_{i,j} = \left(Df(f^{-1}(y))\right)^{-1}_{i,j} = \frac{(Df(f^{-1}(y)))^{adj}_{i,j}}{\det Df(f^{-1}(y))},$$

kde $i, j \in \hat{n}$. Z tohoto vyjádření je vidět, že jak čitatel tak jmenovatel výrazu vpravo jsou polynomiální funkce parciálních derivací $\partial f_r/\partial x_s$, $r, s \in \hat{n}$, v bodech $f^{-1}(y)$, tj.

$$\frac{\partial\left(f^{-1}\right)_i}{\partial y_j}(y) = \frac{P_{i,j}\left(\left(\frac{\partial f_r}{\partial x_s}(f^{-1}(y))\right)_{r,s\in\hat{n}}\right)}{Q\left(\left(\frac{\partial f_r}{\partial x_s}(f^{-1}(y))\right)_{r,s\in\hat{n}}\right)} \tag{26}$$

pro nějaké polynomy $P_{i,j}$ a Q v n^2 proměnných. Navíc nenulovost polynomu Q ve jmenovateli je zaručena Větou 3.54. Potom je-li např. $f \in C^2(\Omega)$, je také $f \in C^1(\Omega)$ a podle indukčního předpokladu je i $f^{-1} \in C^1(f(H_a))$. Potom bychom parciálním derivováním výrazu vpravo v rovnosti (26) podle y_k dostali napravo racionální funkci v proměnných $\partial^2 f_r/\partial x_p \partial x_s$ a $\partial f_l^{-1}/\partial y_k$, kde $p, r, s, l \in \hat{n}$, s nenulovým jmenovatelem. Z toho vyplývá, že existují druhé parciální derivace $\partial^2 (f^{-1})_i/\partial y_k \partial y_j$ a jsou spojité na $f(H_a)$.

Příklad 3.55: Uvažujme vektorovou funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definovanou vztahem

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

Zřejmě je f hladká na $\mathbb{R}^2$, a tudíž také $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Dále

$$\det Df(x, y) = \det \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = e^{2x}\left(\cos^2 y + \sin^2 y\right) = e^{2x} \neq 0$$

pro všechna $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Podle Věty 3.54 existuje pro každý bod $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nějaké okolí (x, y), na němž je funkce f prostá. Jinými slovy f je lokálně prostá na celém $\mathbb{R}^2$. Avšak f není prostá na $\mathbb{R}^2$, protože

$$f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$$

pro všechna $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Přímým důsledkem Věty 3.54 je tzv. Věta o otevřeném zobrazení (Open mapping theorem). Zobrazení se nazývá *otevřené*, pokud zobrazuje otevřené množiny na otevřené množiny (pozor, neplést se spojitostí zobrazení, pro které jsou naopak **vzory** otevřených množin otevřené). V matematice existuje víc vět o otevřeném zobrazení. Zde uvedená se týká spojitě diferencovatelných funkcí. Další věta o otevřeném zobrazení platí např. pro holomorfní funkce.

Věta 3.56: (O otevřeném zobrazení) Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega)$ a $\det Df(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \Omega$. Potom je f otevřené, tj. pro každou otevřenou množinu $U \subset \Omega$ je $f(U)$ otevřená množina.

Důkaz. Buď $U \subset \Omega$ otevřená množina. Je-li $U = \emptyset$, pak $f(U) = \emptyset$. Nechť tedy $U \neq \emptyset$. Zvolme $b \in f(U)$. Potom existuje $a \in U$ tak, že $f(a) = b$. Podle předpokladů je $\det Df(a) \neq 0$ a jsou splněny předpoklady Věty 3.54. Potom existuje okolí H_a takové, že $f(H_a)$ je otevřená. Navíc můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $H_a \subset U$, jinak bychom vzali $H_a \cap U$. Množina $f(H_a)$ je tedy otevřená a navíc $b \in f(H_a)$, tzn., že $f(H_a)$ je okolí b. Dále z inkluze $H_a \subset U$ plyne, že $f(H_a) \subset f(U)$. Tudíž bod b leží v množině $f(U)$ i se svým okolím $f(H_a)$, a proto je $f(U)$ otevřená. □

Tvrzení Věty 3.54 nelze obrátit v následujícím smyslu: Z prostoty funkce $f \in C^1(\Omega)$ **neplyne**, že $\det Df(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \Omega$. To ilustruje už jednoduchý příklad funkce jedné proměnné $f(x) = x^3$, která je bijekcí $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, avšak $f'(0) = 0$. Přidáme-li ovšem předpoklad diferencovatelnosti inverze f^{-1} na Ω, potom již $\det Df(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \Omega$. V takovém případě můžeme totiž aplikovat Větu 3.7 při derivaci identity

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x,$$

ze které plyne, že

$$Df^{-1}\left(f(x)\right) Df(x) = I,$$

a tudíž $\det Df(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \Omega$.

Definice 3.57 (Difeomorfismus)**:** Buďte $U, V \subset \mathbb{R}^n$ otevřené množiny. Zobrazení $f : U \to V$ nazýváme *difeomorfismus*, právě když f je bijekce U na V, $f \in C^1(U)$ a $f^{-1} \in C^1(V)$.

Poznámka: Požadavek $f^{-1} \in C^1(V)$ v definici difeomorfismu není nadbytečný, jak opět ilustruje např. funkce $f(x) = x^3$, která je hladkou bijekcí $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, ale inverzní funkce $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ není diferencovatelná v bodě $y = 0$.

Zdůrazněme ještě jednou, že funkce splňující předpoklady Věty o inverzní funkci ještě nemusí být difeomorfismus (je to pouze lokální difeomorfismus). Dále z Věty 3.5 plyne, že každý difeomorfismus je homeomorfismus.

Příklad 3.58: Buď $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definována vztahem

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, na jaké množině $U \subset \mathbb{R}^2$ je f lokálně prostá a spočítejte $Df^{-1}\left(f(x, y)\right)$ pro $(x, y) \in U$.

Protože

$$\det Df(x, y) = \det \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = 4(x^2 - y^2),$$

je f lokálně invertibilní na množině $U = \{(x, y) \mid |x| \neq |y|\}$ podle Věty o inverzní funkci. Množina U rozděluje rovinu $\mathbb{R}^2$ na čtyři kvadranty. Můžete si rozmyslet, že f je prostá na každém z těchto kvadrantů a z rovnice $f(x, y) = (u, v)$ spočítat inverzní funkci. Např. pro (x, y) z kvadrantu $U_1 := \{(x, y) \mid |x| < y \ \wedge \ y > 0\}$ dostaneme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f^{-1}(u, v) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{u+v} - \sqrt{u-v} \\ \sqrt{u+v} + \sqrt{u-v} \end{pmatrix}$$

a $f(U_1) = \{(u,v) \mid |v| < u \ \wedge \ u > 0\}$ (ověřte). Derivaci f^{-1} můžeme buďto hledat přímo, známe-li funkci f^{-1} explicitně, nebo opět podle Věty o inverzní funkci. V druhém případě máme

$$Df^{-1}\left(f(x,y)\right) = \left(Df(x,y)\right)^{-1} = \frac{1}{4(x^2-y^2)}\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix} = \frac{1}{2(x^2-y^2)}\begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

pro $(x,y) \in U$.

3.8 Věta o implicitní funkci

Problematiku implicitní funkce si nejprve vysvětlíme na jednoduchém příkladu s kružnicí. Zajímá nás, kdy a pokud vůbec rovnice

$$F(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{27}$$

definuje y jako funkci x. Samozřejmě víme, že řešení rovnice (27) existují, pokud $x \in [-1,1]$, a jsou $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. Z definice funkce musí být její hodnoty určeny jednoznačně, a proto bez dalšího omezení na y (např. $y > 0$), nezadává rovnice (27) funkci $y = y(x)$ jednoznačně.

Řekněme, že nás zajímá, zda rovnice (27) zadává řešení $y = y(x)$ alespoň *lokálně*. Tzn., že předpokládáme, že je dáno nějaké (a,b) tak, že $F(a,b) = 0$ (bod na kružnici) a zajímá nás, jestli existují nějaká okolí H_a a H_b a funkce $f : H_a \to H_b$ tak, že $y = f(x)$ vyhovuje rovnici $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in H_a$ a $f(a) = b$. Na příkladu kružnice odpověď najdeme snadno. Je-li $a \in (-1,1)$ a $b > 0$, potom je $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, okolí H_a lze volit libovolně tak, aby $a \in H_a \subset (-1,1)$ a $H_b := f(H_a)$. Podobně je-li $a \in (-1,1)$ a $b < 0$, potom je $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ a volbu okolí lze provést stejně jako předtím. Na druhou stranu na okolí bodů $(a,b) = (\pm 1, 0)$ rovnice (27) jednoznačně funkci $y = f(x)$ *nezadává*. Tyto výjimečné body lze najít jako řešení rovnice

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = 2b$$

spolu s $F(a,b) = 0$. Můžeme se tedy domnívat, že podmínka $\partial_y F(a,b) \neq 0$ garantuje existenci okolí H_a a H_b a funkce $f : H_a \to H_b$ tak, že $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in H_a$ a $f(a) = b$. Tato domněnka se ukáže jako pravdivá a takovouto funkci f nazýváme *implicitní funkcí* zadanou rovnicí $F(x,y) = 0$. Navíc jakmile víme, že implicitní funkce existuje, můžeme z rovnice $F(x, f(x)) = 0$ spočítat derivaci f, i když neznáme f explicitně. V případě s kružnicí (27) dostaneme derivováním rovnosti $x^2 + y^2 - 1 = 0$ podle x, kde $y = y(x)$, vztah

$$2x + 2yy' = 0.$$

Neboli

$$y' = -\frac{x}{y},$$

což je stejný výsledek, jaký bychom dostali derivováním explicitní formule $y = \pm\sqrt{1-x^2}$:

$$y' = -\frac{x}{\pm\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y}$$

bez ohledu na to, jakou funkci $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ bereme.

Větu o implicitní funkci vyslovíme pro vektorovou funkci $F : \Omega_n \times \Omega_m \to \mathbb{R}^m$, kde $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$ a $\Omega_m \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny. Věta nám potom říká, za jakých předpokladů sytém m rovnic o $m+n$ neznámých

$$F(x,y) = 0$$

určuje lokálně řešení $y = y(x)$ na okolí nějakého bodu (a,b), který vyhovuje rovnici $F(a,b) = 0$. Klíčovým předpokladem bude nenulovost Jacobiánu zobrazení F jako funkce y v bodě (a,b). Pro zjednodušení zápisu použijeme stručnější značení

$$\frac{\partial F}{\partial y} := \frac{\partial\left(F_1,\ldots,F_m\right)}{\partial\left(y_1,\ldots,y_m\right)} = \begin{pmatrix} \frac{F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

a

$$\frac{\partial F}{\partial x} := \frac{\partial\left(F_1,\ldots,F_m\right)}{\partial\left(x_1,\ldots,x_n\right)} = \begin{pmatrix} \frac{F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Věta 3.59 (O implicitní funkci)**:** Nechť $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$ a $\Omega_m \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny a $F : \Omega_n \times \Omega_m \to \mathbb{R}^m$ je třídy C^1 na $\Omega_n \times \Omega_m$. Dále předpokládejme, že pro nějaké $(a,b) \in \Omega_n \times \Omega_m$, platí:

$$F(a,b) = 0$$

a

$$\det \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0.$$

Potom:

1. Existují okolí $H_a \subset \Omega_n$ a $H_b \subset \Omega_m$ bodů a a b a jediná funkce $f : H_a \to H_b$ třídy C^1 na H_a tak, že
$$(\forall x \in H_a)\left(F(x,f(x)) = 0\right) \quad \text{a} \quad f(a) = b.$$
2. Dále $\det \frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x)) \neq 0$ pro všechna $x \in H_a$ a pro derivaci f platí vzorec
$$Df(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))$$
pro všechna $x \in H_a$.

Důkaz. 1. K důkazu použijeme Větu 3.54 o inverzní funkci. Definujme $G : \Omega_n \times \Omega_m \to \mathbb{R}^{n+m}$ vztahem $G(x,y) := (x, F(x,y))$. Podle předpokladu je $F \in C^1\left(\Omega_n \times \Omega_m\right)$, a proto také $G \in C^1\left(\Omega_n \times \Omega_m\right)$. Jacobiho matice G má blokový tvar

$$DG = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix},$$

kde $I \in \mathbb{R}^{n,n}$ je jednotková matice a $0 \in \mathbb{R}^{n,m}$ nulová matice. Odtud pro Jacobián G v bodě (a,b) dostaneme

$$\det DG(a,b) = \det \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0.$$

Tudíž můžeme aplikovat Větu 3.54 o inverzní funkci na funkci G a bod (a,b).

Podle Věty 3.54 existuje okolí $H_{(a,b)}$ bodu (a,b), které můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat ve tvaru $H_{(a,b)} = H_a \times H_b$ (jinak vezmeme menší okolí H_a a H_b tak, aby $H_a \times H_b \subset H_{(a,b)}$), a okolí $V := G(H_a \times H_b)$ bodu $G(a,b) = (a,0)$ tak, že G je prosté zobrazení $H_a \times H_b$ na otevřenou množinu V a $G^{-1} \in C^1(V)$. Jelikož zobrazení G je identické v první komponentě, je V tvaru $V = H_a \times F(H_a \times H_b)$ a také inverzní zobrazení G^{-1} bude v první komponentě fungovat jako identické zobrazení. Tedy G^{-1} je tvaru $G^{-1}(x,y) = (x, \Phi(x,y))$, kde $\Phi : V \to H_b$ je bijekce třídy C^1 na V. Pro libovolné $(x,y) \in V$ tedy máme

$$(x,y) = G \circ G^{-1}(x,y) = G\left(x, \Phi(x,y)\right) = \left(x, F\left(x, \Phi(x,y)\right)\right).$$

a odtud speciálně $y = F\left(x, \Phi(x,y)\right)$. Položíme-li $y = 0$ a definujeme $f(x) := \Phi(x,0)$ dostáváme z poslední rovnosti, že $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in H_a$ Funkce $f \in C^1(H_a)$, protože $\Phi \in C^1(V)$. Navíc $(a,b) = G^{-1}(a,0) = (a, \Phi(a,0)) = (a, f(a))$, a tudíž $b = f(a)$.

V tvrzení 1. zbývá ověřit jednoznačnost. K libovolnému $x \in H_a$ jsme našli $y := f(x) \in H_b$ tak, že $F(x,y) = 0$. Předpokládejme, že k témuž $x \in H_a$ existuje nějaké další $\tilde{y} \in H_b$, $\tilde{y} \neq y$ tak, že $F(x,\tilde{y}) = 0$. Potom

$$G(x,y) = (x, F(x,y)) = (x,0) = (x, F(x,\tilde{y})) = G(x,\tilde{y}),$$

což je spor s tím, že G je prostá na $H_a \times H_b$. Ke každému $x \in H_a$ tedy existuje jediné $y \in H_b$ tak, že $F(x,y) = 0$ a funkce f je tak určena jednoznačně.

2. Už víme, že $f \in C^1(H_a)$, a tudíž můžeme derivovat rovnost $F(x, f(x)) = 0$ na H_a, kterou můžeme přepsat do tvaru $F(g(x)) = 0$, kde $g(x) := (x, f(x))^T$. Aplikací řetězového pravidla, viz Věta 3.7, dostaneme

$$0 = D(F \circ g)(x) = DF(g(x))Dg(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(g(x)) & \frac{\partial F}{\partial y}(g(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Df(x) \end{pmatrix},$$

neboli

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(g(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(g(x)) Df(x) \tag{28}$$

pro všechna $x \in H_a$. Protože je podle 3. tvrzení Věty 3.54 o inverzní funkci

$$\det \frac{\partial F}{\partial y}(g(x)) = \det G(g(x)) \neq 0$$

pro všechna $x \in H_a$, je matice $\frac{\partial F}{\partial y}(g(x))$ regulární a z rovnice (28) tak plyne, že

$$Df(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(g(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(g(x))$$

pro všechna $x \in H_a$, což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka: Ve smyslu poznámky za Větou 3.54 můžeme také předpoklad ve Větě 3.59 mírně zeslabit. Konkrétně platí věta: Nechť jsou $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$ a $\Omega_m \subset \mathbb{R}^m$ otevřené množiny, $F : \Omega_n \times \Omega_m \to \mathbb{R}^m$ spojité, existuje $\partial F/\partial y$ na $\Omega_n \times \Omega_m$ a je spojité v bodě $(a, b) \in \Omega_n \times \Omega_m$. Potom je-li

$$F(a, b) = 0 \quad \text{a} \quad \det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0,$$

existují okolí $H_a \subset \Omega_n$ a $H_b \subset \Omega_m$ bodů a a b a právě jedna spojitá funkce $f : H_a \to H_b$ tak, že

$$(\forall x \in H_a)\,(F(x, f(x)) = 0) \quad \text{a} \quad f(a) = b.$$

Příklad 3.60: Jedno řešení systému rovnic

$$\begin{aligned} xy^2 + xzu + yv^2 &= 3, \\ yzu^3 + 2xv - u^2v^2 &= 2, \end{aligned}$$

je $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$. Rozhodněte, zda na okolí bodu $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ určují rovnice implicitní funkce $u = u(x, y, z)$ a $v = v(x, y, z)$ takové, že $u(1, 1, 1) = 1$ a $v(1, 1, 1) = 1$ a poté spočítejte $\partial_y u(1, 1, 1)$ a $\partial_y v(1, 1, 1)$.

Do Věty o implicitní funkci položíme $n = 3$, $m = 2$, funkci $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definovanou vztahem

$$F(x, y, z, u, v) := \begin{pmatrix} xy^2 + xzu + yv^2 - 3 \\ yzu^3 + 2xv - u^2v^2 - 2 \end{pmatrix}$$

a $a = (1, 1, 1)$ a $b = (1, 1)$. Zřejmě je F hladká. Dále

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} xz & 2yv \\ 3yzu^2 - 2uv^2 & 2x - 2u^2v \end{pmatrix},$$

a proto

$$\det \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)}(1, 1, 1, 1, 1) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

Proto podle Věty o implicitní funkci existuje funkce $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$ třídy C^1 definovaná na okolí bodu $(1, 1, 1)$ taková, že

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z) \quad \text{a} \quad f(1, 1, 1) = (1, 1).$$

Abychom spočítali $\partial_y u(1, 1, 1)$ a $\partial_y v(1, 1, 1)$, můžeme parciálně derivovat podle y zadaný systém rovnic, kde u a v chápeme jako funkce x, y, z. Dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} 2xy + xz\partial_y u + v^2 + 2yv\partial_y v &= 0, \\ 3yzu^2\partial_y u + zu^3 + 2x\partial_y v - 2uv^2\partial_y u - 2u^2v\partial_y v &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $(x, z, y, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$, máme systém

$$\begin{aligned} \partial_y u(1, 1, 1) + 2\partial_y v(1, 1, 1) &= -3, \\ \partial_y u(1, 1, 1) &= -1, \end{aligned}$$

jehož řešením je $\partial_y u(1, 1, 1) = -1$ a $\partial_y v(1, 1, 1) = -1$. Podobně bychom mohli spočítat další parciální derivace u a v v bodě $(1, 1, 1)$.

3.9 Vázané extrémy funkce více proměnných

V předchozí části jsme si ukázali metodu, jak hledat lokální extrémy funkce více proměnných. Nyní se budeme zabývat podobným problémem jen navíc zúžíme definiční obor účelové funkce přidáním tzv. *rovnostních vazeb*. Tzn., že budeme hledat lokální extrémy funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v množině tzv. *přípustných řešení*

$$M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\},$$

kde $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je daná vektorová funkce reprezentující *vazby*. V praktických problémech bývá počet proměnných n větší než počet vazeb m. Tato úloha je speciálním případem tzv. obecné optimalizační úlohy nelineárního programování, v níž navíc vystupují také nerovnostní vazby. Naším cílem bude dokázat si nutnou a postačující podmínku pro extrémy funkce s rovnostními vazbami podobné těm, které jsme si odvodili pro (volné) extrémy bez vazeb, viz Věty 3.43 a 3.48.

Definice 3.61 ((Ostré) lokální maximum/minimum vzhledem k množině)**:** Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $a \in M \subset \Omega$. Řekneme, že funkce f má v bodě a:

1. *lokální maximum vzhledem k* $M \;\Leftrightarrow\; (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in H_a \cap M)(f(x) \leq f(a))$,
2. *ostré lokální maximum vzhledem k* $M \;\Leftrightarrow\; (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in (H_a \cap M) \setminus \{a\})(f(x) < f(a))$,
3. *lokální minimum vzhledem k* $M \;\Leftrightarrow\; (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in H_a \cap M)(f(x) \geq f(a))$,
4. *ostré lokální minimum vzhledem k* $M \;\Leftrightarrow\; (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in (H_a \cap M) \setminus \{a\})(f(x) > f(a))$.

Bod a se nazývá *lokální extrém* funkce f vzhledem k M, právě když má f v a lokální minimum nebo lokální maximum vzhledem k M.

Pro formulaci nutné a postačující podmínky vázaného extrému použijeme pomocnou funkci pojmenovanou po J.–L. Lagrangeovi.

Definice 3.62 (Lagrangeova funkce, Lagrangeovy multiplikátory)**:** Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Funkci $L : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$L(x; \lambda) := f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$$

nazýváme *Lagrangeova funkce* a parametry $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *Lagrangeovy multiplikátory*.

Uvažujme na chvíli, že je dána pouze jediná vazba, tj. $m = 1$ a skalární funkce $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je třídy C^1. Připomeňme, že potom tečný prostor k množině $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$ v bodě $a \in M$ je ortogonální doplněk gradientu $\nabla g(a)$, tj.

$$T_a(M) = (\nabla g(a))^{\perp}.$$

Je-li $m \geq 1$, potom je $M = \cap_{j=1}^{m} M_j$, kde

$$M_j := \{x \in \Omega \mid g_j(x) = 0\}.$$

Rozšíříme definici tečného prostoru k $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$ v bodě $a \in M$ pro případ $m \geq 1$ následovně:

$$T_a(M) := \bigcap_{j=1}^{m} T_a(M_j).$$

Nejprve si dokážeme pomocné tvrzení o tečném prostoru $T_a(M)$.

Lemma 3.63: Buď $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ třídy C^1 na Ω, $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$ a $a \in M$. Potom platí:

1. $T_a(M) = \ker Dg(a)$.
2. Je-li $h(Dg(a)) = m < n$, potom ke každému $v \in T_a(M)$ existuje okolí počátku $H_0 \subset \mathbb{R}$ a křivka $\phi : H_0 \to M$ třídy C^1 tak, že $\phi(0) = a$ a $D\phi(0) = v$.

Důkaz. 1. Stačí si uvědomit, že

$$x \in T_a(M) = \bigcap_{j=1}^{m} T_a(M_j) = \bigcap_{j=1}^{m} (\nabla g_j(a))^{\perp},$$

právě když $\nabla g_j(a)x = 0$ pro všechna $j \in \hat{m}$. Jelikož gradienty $\nabla g_j(a)$, $j \in \hat{m}$, jsou řádky matice $Dg(a)$, je $x \in T_a(M)$, právě když $Dg(a)x = 0$, neboli $x \in \ker Dg(a)$.

2. Jelikož $h(Dg(a)) = m < n$, existuje m sloupců matice $Dg(a)$, které tvoří lineárně nezávislý soubor v $\mathbb{R}^n$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je prvních m sloupců $Dg(a)$ lineárně nezávislých, jinak přejmenujeme proměnné $x_1, \ldots, x_n$. Definujme zobrazení $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vztahem

$$F_j(x) := \begin{cases} g_j(x), & \text{pro} \quad j \in \hat{m}, \\ x_j, & \text{pro} \quad j \in \{m+1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Všimněte si, že $x \in M$, právě když $F_1(x) = \cdots = F_m(x) = 0$.

Podle předpokladu je $g \in C^1(\Omega)$, a proto také $F \in C^1(\Omega)$. Matice derivace F má blokový tvar

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial(g_1,\ldots,g_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)} & \frac{\partial(g_1,\ldots,g_m)}{\partial(x_{m+1},\ldots,x_n)} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{29}$$

kde $0 \in \mathbb{R}^{n-m,m}$ je nulová matice a $I \in \mathbb{R}^{n-m,n-m}$ je jednotková matice. Tudíž matice $DF(a)$ je regulární, neboť

$$\det DF(a) = \det \frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}(a) \neq 0.$$

Proto podle Věty 3.54 o inverzní funkci existuje $H_a \subset \Omega$, na němž je zobrazení F prosté a

$$F(a) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m \text{ krát}}, a_{m+1}, \ldots, a_n)^T,$$

protože $g(a) = 0$, což plyne z předpokladu $a \in M$.

Označíme-li $G := F^{-1}$, potom $G : F(H_a) =: H_{F(a)} \to H_a$ je bijekce. Zvolme $v \in T_a(M)$ a okolí $H_0 \subset \mathbb{R}$ tak, aby

$$(0, \dots, 0, a_{m+1} + tv_{m+1}, \dots, a_n + tv_n)^T \in H_{F(a)}$$

pro všechna $t \in H_0$, což lze, neboť $H_{F(a)}$ je otevřená množina a $F(a) = (0, \dots, 0, a_{m+1}, \dots, a_n)^T$. Definujme $\phi : H_0 \to H_a$ vztahem

$$\phi(t) := G(0, \dots, 0, a_{m+1} + tv_{m+1}, \dots, a_n + tv_n).$$

Ve zbývající části důkazu ukážeme, že ϕ má všechny tři vlastnosti z tvrzení věty, tj. $\phi(H_0) \subset M$, $\phi(0) = a$ a $D\phi(0) = v$.

Z definice ϕ plyne, že $F_1(\phi(t)) = \cdots = F_m(\phi(t)) = 0$ pro všechna $t \in H_0$. Tudíž $\phi(H_0) \subset M$. Dále

$$\phi(0) = G(0, \dots, 0, a_{m+1}, \dots, a_n) = G(F(a)) = a.$$

Nakonec dokážeme rovnost $DF(a)D\phi(0) = DF(a)v$, což implikuje $D\phi(0) = v$ díky regularitě $DF(a)$. Nejprve si všimneme, že pro $t \in H_0$ máme

$$(F \circ \phi)(t) = (0, \dots, 0, a_{m+1} + tv_{m+1}, \dots, a_n + tv_n)^T .$$

Odtud dostaneme

$$DF(a)D\phi(0) = D(F \circ \phi)(0) = (0, \dots, 0, v_{m+1}, \dots, v_n)^T = DF(a)v.$$

Poslední rovnost platí díky blokovému tvaru (29) matice $DF(a)$ a toho, že $Dg(a)v = 0$ podle již dokázaného bodu 1. □

Poznámka: Je-li $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ třídy C^1 a $h(Dg(x)) = m < n$ pro všechna $x \in \Omega$, potom je množina $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$ speciálním případem tzv. *diferencovatelné variety* dimenze $n - m$.

Nyní si již můžeme dokázat nutnou podmínku vázaného extrému.

Věta 3.64 (Nutná podmínka vázaného extrému)**:** Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jsou funkce třídy C^1 na Ω a $m < n$. Předpokládejme dále, že má funkce f lokální extrém vzhledem k množině $M := \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$ v bodě $a \in M$ a že $h(Dg(a)) = m$. Potom existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\nabla_x L(a; \lambda) = \nabla f(a) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(a) = 0.$$

(Zde index x v ∇_x naznačuje, že se v gradientu ∇_x objevují pouze parciální derivace podle proměnných $x_1, \dots, x_n$, nikoliv podle $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.)

Důkaz. Ukážeme, že $\nabla f(a) \in (T_a(M))^{\perp}$. Zvolme nějaké $v \in T_a(M)$. Podle předpokladu je $h(Dg(a)) = m < n$, a tedy podle Lemma 3.63 existuje $H_0 \subset \mathbb{R}$ a zobrazení $\phi : H_0 \to M$ třídy C^1 tak, že $\phi(0) = a$ a $D\phi(0) = v$. Protože má f lokální extrém v bodě a vzhledem k M, má složená funkce $f \circ \phi : H_0 \to \mathbb{R}$ lokální extrém v bodě 0. Tudíž podle nutné podmínky (volného) extrému je $(f \circ \phi)'(0) = 0$. S využitím Věty 3.7 o derivaci složené funkce tak dostaneme, že

$$0 = (f \circ \phi)'(0) = \nabla f\left(\phi(0)\right) D\phi(0) = \nabla f(a)v,$$

a tedy $\nabla f(a)$ je kolmé na v.

Použijeme-li jednu vlastnost ortogonálního doplňku, viz Cvičení 3.21, dostaneme

$$(T_a(M))^{\perp} = \left(\bigcap_{j=1}^{m} T_a(M_j)\right)^{\perp} = \sum_{j=1}^{m} (T_a(M_j))^{\perp} = \sum_{j=1}^{m} [\nabla g_j(a)]_{\lambda}.$$

A protože $\nabla f(a) \in (T_a(M))^{\perp}$, existují čísla $\lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(a),$$

neboli

$$\nabla_x L(a; \lambda) = \nabla f(a) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(a) = 0.$$

$\square$

Pokud dopředu víme, že funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v množině přípustných řešení M lokální extrém, tj. např. tehdy, když je M kompaktní množina a f spojitá funkce (Věta 2.95), můžeme tyto lokální extrémy v M hledat jen na základě nutné podmínky vázaného extrému. Podle Věty 3.64 najdeme tyto extrémy mezi řešeními rovnic

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, \\ \nabla_x L(x; \lambda) &= 0, \end{aligned} \tag{30}$$

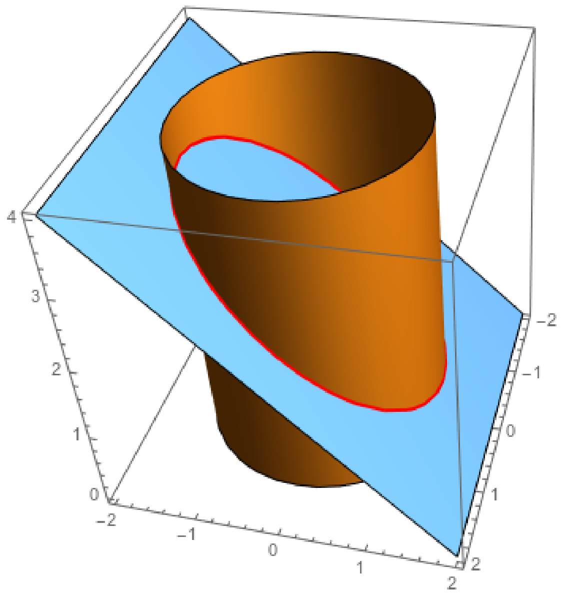
což je $m + n$ rovnic pro $m + n$ neznámých $x_1, \dots, x_n$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ za předpokladu, že $m < n$ a matice Dg má v nalezených řešení plnou hodnost. Samozřejmě najít řešení rovnic (30) nemusí být jednoduché a většinou ani explicitně možné. Následující jednoduchý příklad ukazuje, kdy je tento postup možné aplikovat.

Příklad 3.65: Najdeme vázané extrémy funkce $f(x, y, z) = xy + yz$ vzhledem k množině určené vazbami

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \text{a} \quad y + z = 2.$$

Použijeme-li naše značení je $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, kde

$$g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 - 2 \quad \text{a} \quad g_2(x, y, z) := y + z - 2.$$



Obrázek 11: Ilustrace množiny M z Příkladu 3.65

Množina $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = 0\}$, která představuje průnik válce a roviny, viz Obr. 11, je kompaktní, protože je uzavřená a omezená. Proto dopředu víme, že spojitá funkce f má v množině M dokonce globální minimum i maximum.

Všimněte si, že pro všechna $(x,y,z) \in M$ je

$$h\left(Dg(x,y,z)\right) = h\left(\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2,$$

neboť body $(0,0,z) \notin M$ pro všechna $z \in \mathbb{R}$. Hledané extrémy proto musí ležet mezi řešeními rovnic (30). Lagrangeova funkce je

$$\begin{aligned} L(x,y,z;\lambda,\mu) &:= f(x,y,z) - \lambda g_1(x,y,z) - \mu g_2(x,y,z) \\ &= xy + yz - \lambda(x^2+y^2-2) - \mu(y+z-2), \end{aligned}$$

a proto rovnice (30) mají tvar

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2, \\ y + z &= 2, \\ \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z;\lambda,\mu) &= y - 2x\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z;\lambda,\mu) &= x + z - 2y\lambda - \mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z;\lambda,\mu) &= y - \mu = 0. \end{aligned}$$

Tyto rovnice mají 4 řešení (detaily výpočtu jsou přenechány čtenáři):

$$
\begin{aligned}
(x_1, y_1, z_1, \lambda_1, \mu_1) &= \left(-1, 1, 1, -\frac{1}{2}, 1\right), \\
(x_2, y_2, z_2, \lambda_2, \mu_2) &= \left(1, 1, 1, \frac{1}{2}, 1\right), \\
(x_3, y_3, z_3, \lambda_3, \mu_3) &= \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}, 5+\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}\right), \\
(x_4, y_4, z_4, \lambda_4, \mu_4) &= \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}, 5-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\right).
\end{aligned}
$$

Nakonec stačí vybrat největší a nejmenší ze čtyř funkčních hodnot

$$
\begin{gathered}
f(x_1, y_1, z_1) = 0, \quad f(x_2, y_2, z_2) = 2, \\
f(x_3, y_3, z_3) = -\frac{5+3\sqrt{3}}{2}, \quad f(x_4, y_4, z_4) = -\frac{5-3\sqrt{3}}{2},
\end{gathered}
$$

abychom uzavřeli, že f má maximum vzhledem k M v bodě (x_2, y_2, z_2) s hodnotou 2 a minimum vzhledem k M v bodě (x_3, y_3, z_3) s hodnotou $-(5+3\sqrt{3})/2$.

Pokud ovšem apriori nevíme, jestli vázaný extrém existuje, např. když M není kompaktní, potřebujeme nějakou postačující podmínku vázaného extrému. Jednu takovou podmínku si dokážeme. Budeme k tomu potřebovat mírně rozšířit pojem definitnost matice na *definitnost matice vzhledem k množině.*

Definice 3.66 (PD, ND, PSD, NSD, IND vzhledem k množině)**:** Nechť $\emptyset \neq P \subset \mathbb{R}^n$. Symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ nazveme:

1. *pozitivně definitní (PD) vzhledem k* $P \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P \setminus \{0\})(x^T A x > 0)$,
2. *pozitivně semidefinitní (PSD) vzhledem k* $P \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(x^T A x \geq 0)$ a A není PD vzhledem k P,
3. *negativně definitní (ND) vzhledem k* $P \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P \setminus \{0\})(x^T A x < 0)$,
4. *negativně semidefinitní (NSD) vzhledem k* $P \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(x^T A x \leq 0)$ a A není ND vzhledem k P,
5. *indefinitní (IND) vzhledem k* $P \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x, y \in P)(x^T A x > 0 \ \wedge \ y^T A y < 0)$.

V následující větě používáme značení $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ pro Hessovu matici funkce L jakožto funkce proměnných $x_1, \ldots, x_n$, tj.

$$
\nabla_x^2 L(a; \lambda) = \begin{pmatrix}
\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(a; \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1}(a; \lambda) & \ldots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1}(a; \lambda) \\
\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(a; \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}(a; \lambda) & \ldots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2}(a; \lambda) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n}(a; \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n}(a; \lambda) & \ldots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}(a; \lambda)
\end{pmatrix}.
$$

Věta 3.67 (Postačující podmínka pro vázaný extrém)**:** Předpokládejme, že funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jsou třídy C^2 na Ω a $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$. Nechť dále existuje bod $(a, \lambda) \in M \times \mathbb{R}^m$ tak, že $\nabla_x L(a; \lambda) = 0$. Potom platí:

1. Je-li $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ PD vzhledem k $T_a(M)$, potom má f v bodě a ostré lokální minimum vzhledem k M.

2. Je-li $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ ND vzhledem k $T_a(M)$, potom má f v bodě a ostré lokální maximum vzhledem k M.

Důkaz. Stačí dokázat 1. tvrzení, neboť f má v bodě a ostré lokální maximum vzhledem k M, právě když $-f$ má v bodě a ostré lokální minimum vzhledem k M, $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ je ND vzhledem k $T_a(M)$, právě když $\nabla_x^2(-L)(a; \lambda)$ je PD vzhledem k $T_a(M)$ a funkce g a $-g$ určují stejnou množinu přípustných řešení M.

Důkaz tentokrát provedeme sporem. Je-li a izolovaným bodem M, plyne z definice, že f má v a ostré lokální minimum vzhledem k M. Proto budeme nadále předpokládat, že a je hromadný bod M, ve kterém f nemá ostré lokální minimum vzhledem k M. Potom existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z M taková, že $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \neq a)$, $x_n \to a$ a

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(f(x_n) \leq f(a))\,. \tag{31}$$

Podle Bolzanovy–Weirstrassovy věty 2.105 existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že existuje limita

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{n_k} - a}{\|x_{n_k} - a\|} =: \eta.$$

Všimněte si, že $\eta \neq 0$, neboť $\|\eta\| = 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme navíc předpokládat, že $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset B_a(r) \subset \Omega$ pro nějaké $r > 0$, protože je množina Ω otevřená.

Ukážeme, že $\eta \in T_a(M)$. Podle Věty 3.23 o přírůstku aplikované na funkce g_j existují body $\xi_k^{(g_j)}$ na spojnici bodů a a x_{n_k} tak, že

$$0 = g_j(x_{n_k}) - g_j(a) = \nabla g_j(\xi_k^{(g_j)})(x_{n_k} - a)$$

pro všechna $j \in \hat{m}$ a $k \in \mathbb{N}$. Výraz nalevo je roven nule, protože $a \in M$ a také $x_{n_k} \in M$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Vydělíme-li poslední rovnost $\|x_{n_k} - a\|$ a pošleme $k \to \infty$, dostaneme

$$0 = \nabla g_j(a)\eta$$

pro každé $j \in \hat{m}$. Neboli η je kolmé na $\nabla g_j(a)$ pro každé $j \in \hat{m}$, a tudíž

$$\eta \in \bigcap_{j=1}^{m} (\nabla g_j(a))^{\perp} = T_a(M).$$

Jelikož $L(y, \lambda) = f(y)$, kdykoliv je $y \in M$ a vzhledem k předpokladu $f, g \in C^2(\Omega)$ dostaneme aplikací Taylorovy věty 3.38 rovnost

$$f(x_{n_k}) - f(a) = L(x_{n_k}; \lambda) - L(a; \lambda) = \nabla_x L(a; \lambda)(x_{n_k} - a) + \frac{1}{2}(x_{n_k} - a)^T \nabla_x^2 L(\xi_k^{(L)}; \lambda)(x_{n_k} - a)$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$, kde $\xi_k^{(L)}$ je bod ležící na spojnici a a x_{n_k}. Využijeme-li ještě předpokladu $\nabla_x L(a; \lambda) = 0$ a nerovnosti (31), vyvodíme, že

$$0 \geq \frac{1}{2}(x_{n_k} - a)^T \nabla_x^2 L(\xi_k^{(L)}; \lambda)(x_{n_k} - a)$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Nyní opět stačí vydělit obě strany $\|x_{n_k} - a\|^2$ a poslat $k \to \infty$ a dostaneme nerovnost

$$0 \geq \eta^T \nabla_x^2 L(a; \lambda)\eta,$$

což je ovšem spor s tím, že $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ je PD vzhledem k $T_a(M)$. □

Postačující podmínka z Věty 3.67 nám dává návod, jak hledat lokální vázaný extrém dostatečně hladké funkce f za podmínky dané vazbami $g(x) = 0$. Nejprve najdeme všechna řešení (x, λ) rovnic (30), což jsou „body podezřelé z extrému“. Poté testujeme, zda kvadratická forma matice $\nabla_x^2 L(x, \lambda)$ v bodech podezřelých z extrému (x, λ) **zúžená na podprostor** $\ker Dg(x)$, viz Lemma 3.63, je PD, nebo ND. Ukažme si to na jednoduchém příkladě.

Příklad 3.68: Rozhodněte, jaký trojúhelník s daným obvodem $\ell > 0$ má největší obsah. Délky stran trojúhelníka si označme x, y, z. Obsah trojúhelníka S jako funkci délek jeho stran x, y, z lze vyjádřit tzv. *Heronovým vzorcem*:

$$S(x, y, z) = \sqrt{\frac{\ell}{2}\left(\frac{\ell}{2} - x\right)\left(\frac{\ell}{2} - y\right)\left(\frac{\ell}{2} - z\right)}.$$

Chceme tedy najít taková $x, y, z > 0$, pro něž je $S(x, y, z)$ maximální za podmínky, že obvod trojúhelníku je fixní, tj.

$$x + y + z = \ell.$$

Výpočet si můžeme zjednodušit tak, že nebudeme maximalizovat funkci S, nýbrž funkci

$$f(x, y, z) := \frac{2}{\ell} S^2(x, y, z).$$

Tato transformace nás zbaví odmocniny a nepodstatného konstantního faktoru. Navíc protože $f = \phi \circ S$, kde $\phi(t) := 2t^2/\ell$ je rostoucí funkce na $[0, \infty)$, funkce f má extrémy ve stejných bodech jako S (existují-li), jak plyne přímo z definice. Dostáváme tedy optimalizační problém pro objektivní funkci

$$f(x, y, z) = \left(\frac{\ell}{2} - x\right)\left(\frac{\ell}{2} - y\right)\left(\frac{\ell}{2} - z\right)$$

s množinou přípustných řešení

$$M = \{(x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid g(x, y, z) := x + y + z - \ell = 0\}.$$

Lagrangeova funkce má tvar

$$L(x, y, z; \lambda) = \left(\frac{\ell}{2} - x\right)\left(\frac{\ell}{2} - y\right)\left(\frac{\ell}{2} - z\right) - \lambda(x + y + z - \ell).$$

Vázané extrémy musí ležet mezi řešeními systému rovnic

$$\begin{aligned}
\partial_x L(x,y,z;\lambda) &= -\left(\frac{\ell}{2}-y\right)\left(\frac{\ell}{2}-z\right)-\lambda=0,\\
\partial_y L(x,y,z;\lambda) &= -\left(\frac{\ell}{2}-x\right)\left(\frac{\ell}{2}-z\right)-\lambda=0,\\
\partial_z L(x,y,z;\lambda) &= -\left(\frac{\ell}{2}-x\right)\left(\frac{\ell}{2}-y\right)-\lambda=0,\\
x+y+z &= \ell.
\end{aligned}$$

Tento systém má jediné řešení

$$(x,y,z;\lambda)=\left(\frac{\ell}{3},\frac{\ell}{3},\frac{\ell}{3};-\frac{\ell^2}{36}\right).$$

Hessova matice Lagrangeovy funkce v tomto bodě je tvaru

$$\nabla^2_{(x,y,z)}L\left(\frac{\ell}{3},\frac{\ell}{3},\frac{\ell}{3};-\frac{\ell^2}{36}\right)=\frac{\ell}{6}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že tato matice je IND. Nás ale zajímá definitnost této matice vzhledem k podprostoru

$$\begin{aligned}
T_{(\ell/3,\ell/3,\ell/3)}(M) &= \left(\nabla g\left(\frac{\ell}{3},\frac{\ell}{3},\frac{\ell}{3}\right)\right)^{\perp}=((1,1,1))^{\perp}=\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right]_{\lambda}\\
&= \left\{\begin{pmatrix}s+t\\-s\\-t\end{pmatrix}\;\middle|\; s,t\in\mathbb{R}\right\}.
\end{aligned}$$

Proto zkoumáme definitnost kvadratické formy

$$(s+t,-s,-t)\nabla^2_{(x,y,z)}L\left(\frac{\ell}{3},\frac{\ell}{3},\frac{\ell}{3};-\frac{\ell^2}{36}\right)\begin{pmatrix}s+t\\-s\\-t\end{pmatrix}=-\frac{\ell}{3}\left(s^2+st+t^2\right)$$

v proměnných s a t. Doplněním formy na čtverce zjistíme, že

$$(s+t,-s,-t)\nabla^2_{(x,y,z)}L\left(\frac{\ell}{3},\frac{\ell}{3},\frac{\ell}{3};-\frac{\ell^2}{36}\right)\begin{pmatrix}s+t\\-s\\-t\end{pmatrix}=-\frac{\ell}{3}\left(\left(s+\frac{t}{2}\right)^2+\frac{3t^2}{4}\right)<0$$

pro všechna $(s,t)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, a tudíž podle Věty 3.67 je bod $(\ell/3,\ell/3,\ell/3)$ ostré lokální maximum f vzhledem k M.

Otázka ze zadání úlohy se ovšem týká extrému globálního. Argument ukazující, že nalezené lokální maximum je též globálním maximem f vzhledem k M, lze postavit na tom, že $\overline{M}$ je kompaktní (rozmyslete). Uzavíráme tedy, že *mezi všemi trojúhelníky s fixním obvodem* ℓ *má největší obsah trojúhelník rovnostranný, a to* $\ell^2/(12\sqrt{3})$.

Nakonec si ještě dokážeme analogii nutné podmínky z Věty 3.51 pro případ vázaných extrémů.

Věta 3.69: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jsou třídy C^2 na Ω a $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$. Předpokládejme dále, že $a \in M$ a $h(Dg(a)) = m < n$. Potom platí:

1. Je-li a lokální minimum f vzhledem k M, potom je $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ PD, nebo PSD vzhledem k $T_a(M)$.

2. Je-li a lokální maximum f vzhledem k M, potom je $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ ND, nebo NSD vzhledem k $T_a(M)$.

Zde λ jsou Lagrangeovy multiplikátory z Věty 3.64.

Důkaz. Dokážeme 1. tvrzení. Buď $v \in T_a(M)$. Potom podle Lemma 3.63 existuje $H_0 \subset \mathbb{R}$ a křivka $\phi : H_0 \to M$ taková, že $\phi(0) = a$ a $D\phi(0) = v$. Vzhledem k druhé poznámce za Větou 3.54 o inverzní funkci a zavedení křivky ϕ z důkazu Lemma 3.63 vyplývá z předpokladu $g \in C^2(\Omega)$, že také $\phi \in C^2(H_0)$.

Jelikož má f v bodě a lokální minimum, je bod 0 lokálním minimem funkce $f \circ \phi : H_0 \to \mathbb{R}$. Potom podle Věty 3.51 je $(f \circ \phi)''(0) \geq 0$. Funkci $f \circ \phi$ můžeme derivovat jako složenou funkci a podle řetězového pravidla dostaneme

$$(f \circ \phi)'(t) = \nabla f(\phi(t)) D\phi(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(t))\phi_i'(t)$$

pro všechna $t \in H_0$. Pro druhou derivaci máme

$$(f \circ \phi)''(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\phi(t))\phi_i'(t)\phi_j'(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(t))\phi_i''(t) \tag{32}$$

pro všechna $t \in H_0$. Využijeme-li toho, že $f(\phi(t)) = L(\phi(t); \lambda)$ pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}^m$, neboť $\phi(t) \in M$ pro všechna $t \in H_0$, a dosadíme $t = 0$ do rovnice (32), dostaneme

$$0 \leq (f \circ \phi)''(0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i}(a; \lambda) v_i v_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i}(a; \lambda)\phi_i''(0). \tag{33}$$

Podle Věty 3.64 existují Lagrangeovy multiplikátory $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tak, že $\nabla_x L(a; \lambda) = 0$, a proto je pro tato λ druhý člen v (33) nulový. Nakonec tedy zjišťujeme, že

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i}(a; \lambda) v_i v_j = v^T \nabla_x^2 L(a; \lambda) v,$$

z čehož vyplývá, že matice $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ je PD, nebo PSD vzhledem k $T_a(M)$, neboť $v \in T_a(M)$ bylo voleno libovolně. $\square$

Věta 3.69 má následující okamžitý důsledek pro případ indefinitní Hessovy matice Lagrangeovy funkce vzhledem k tečnému prostoru. U vázaných extrému termín sedlový bod nepoužíváme.

Důsledek 3.70: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jsou třídy C^2 na Ω a $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$. Pokud existuje bod $(a, \lambda) \in M \times \mathbb{R}^m$ takový, že $\nabla_x L(a; \lambda) = 0$, matice $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ je IND vzhledem k $T_a(M)$ a platí $h(Dg(a)) = m < n$, potom a není extrém f vzhledem k M.

3.10 Cvičení

Cvičení 3.1: Dokažte, že funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná v $a \in \Omega$, právě když existuje $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, okolí H_a bodu a a funkce $\epsilon_a : H_a \to \mathbb{R}^m$ tak, že

$$(\forall x \in H_a)(f(x) = f(a) + T(x-a) + \epsilon_a(x)\|x-a\|)$$

a $\epsilon_a(x) \to 0$ pro $x \to a$.

Cvičení 3.2: Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované prostory. Ukažte, že množina

$$\mathcal{B}(X,Y) := \{T \in \mathcal{L}(X,Y) \mid \|T\| < \infty\}$$

je lineární prostor a zobrazení $\|\cdot\| : \mathcal{B}(X,Y) \to [0,\infty)$ je norma na $\mathcal{B}(X,Y)$.

Cvičení 3.3: Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dokažte rovnosti

$$\sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Cvičení 3.4: Uvažujme prostor reálných polynomů $\mathcal{P}$ s normou definovanou vztahem $\|p\| := \max_{0\le j\le n} |\alpha_j|$ pro polynom $p(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j x^j$. Dokažte, že lineární operátor $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$, který zobrazí polynom na jeho derivaci, $Tp := p'$, není omezený, tj. $\|T\| = \infty$.
(Hint: Uvažujte posloupnost monomů $p_n(x) = x^n$.)

Cvičení 3.5: Dokažte Větu 3.6.

Cvičení 3.6: Ukažte, že funkce $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ není diferencovatelná v počátku.

Cvičení 3.7: Ukažte, že funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & \text{je-li } (x,y) \ne (0,0), \\ 0, & \text{je-li } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

je spojitá v $(0,0)$, ale není diferencovatelná v $(0,0)$.

Cvičení 3.8: Ukažte, že funkce

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}, & \text{je-li } (x,y,z) \ne (0,0,0), \\ 0, & \text{je-li } (x,y,z) = (0,0,0), \end{cases}$$

je diferencovatelná v $(0,0,0)$, právě když $\alpha < 1$.

Cvičení 3.9: Ukažte, že funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{je-li } (x,y) \ne (0,0), \\ 0, & \text{je-li } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

má všechny směrové derivace v bodě $(0,0)$, ale není v bodě $(0,0)$ diferencovatelná.

Cvičení 3.10: Dokažte, že pokud všechny první parciální derivace funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existují a jsou omezené na okolí bodu $a \in \Omega$, potom je f spojitá v a.

Cvičení 3.11: Funkci $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazýváme *konvexní* na Ω, právě když je Ω konvexní množina a platí

$$(\forall x, y \in \Omega, x \neq y)(\forall t \in (0,1))(f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)).$$

Nahradíme-li nerovnost výše ostrou nerovností, nazývá se f *ryze konvexní* na Ω. Dokažte, že každé lokální minimum konvexní funkce f na Ω je globálním minimem f na Ω.

Cvičení 3.12: Dokažte, že má-li ryze konvexní funkce lokální minimum, je toto lokální minimum jejím jediným globálním minimem.

Cvičení 3.13: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a Ω je konvexní. Dokažte následující tvrzení:

1. Je-li $f \in C^1(\Omega)$, potom

$$f \text{ je konvexní} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x, y \in \Omega)\,(f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)(y - x))\,.$$

2. Je-li $f \in C^2(\Omega)$, potom

$$f \text{ je konvexní} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in \Omega)\,\left(\nabla^2 f(x) \text{ je PD nebo PSD}\right).$$

Rozmyslete varianty těchto ekvivalencí pro ryze konvexní funkci f.

Cvičení 3.14: Nechť $A \in \mathbb{R}^{n,m}$, $m \leq n$ a $h(A) = m$. Dokažte, že matice $A^T A \in \mathbb{R}^{m,m}$ je regulární.

Cvičení 3.15 (Rolleova věta v $\mathbb{R}^n$)**:** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a omezená množina a $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ je spojitá na $\overline{\Omega}$ a diferencovatelná na Ω. Dokažte, že je-li f konstantní na $\partial\Omega$, potom existuje $\xi \in \Omega$ tak, že $\nabla f(\xi) = 0$.
(Hint: Nutná podmínka extrému.)

Cvičení 3.16: Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná (na celém $\mathbb{R}^n$). Předpokládejme, že f má jediný kritický bod a a v tomto bodě má f lokální minimum.

1. Je-li $n = 1$, potom dokažte, že a je globální minimum f.

2. Je-li $n > 1$, potom ukažte, že předchozí tvrzení není pravdivé.

(Hint: 1. Využijte Rolleovu větu. 2. Uvažujte funkci $f(x, y) = x^2 + y^2(1-x)^3$ a ukažte, že f má v bodě $(0, 0)$ lokální minimum, které ale není globální.)

Cvičení 3.17: Ukažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{pro } x \neq 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

je diferencovatelná na $\mathbb{R}$, $f'(0) \neq 0$ a že f není prostá na žádném okolí bodu $x = 0$. Všimněte si, že f' není spojitá v počátku.

Cvičení 3.18: Nechť $n \geq 2$, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je třídy C^1, $a \in \Omega$ a $\nabla f(a) \neq 0$. Ozn. $M := \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}$. Dokažte, že existuje okolí $H_a \subset \Omega$ tak, že množina $H_a \cap M$ je grafem funkce $n-1$ proměnných třídy C^1.
(Hint: Aplikujte Větu o implicitní funkci.)

Cvičení 3.19: Nechť $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ je třídy C^1, $t_0 \in (a,b)$ a $\phi'(t_0) \neq 0$. Dokažte, že existuje otevřený interval $I \subset (a,b)$, $t_0 \in I$ tak, že množina $\phi(I)$ je grafem C^1 funkce, tzn., že buď $\exists f : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ třídy C^1 tak, že $\phi(I) = \{(x, f(x)) \mid x \in (\alpha,\beta)\}$, nebo $\exists g : (\gamma,\delta) \to \mathbb{R}$ třídy C^1 tak, že $\phi(I) = \{(g(y), y) \mid y \in (\gamma,\delta)\}$.
(Hint: Za předpokladu, že $\phi_1'(t_0) \neq 0$, definujte $F(x,t) := x - \phi_1(t)$. Protože $\partial_t F(x_0,t_0) = -\phi_1'(t_0) \neq 0$, kde $x_0 := \phi_1(t_0)$, existují podle Věty o implicitní funkci otevřené intervaly (α,β), I a C^1 bijekce $\omega : (\alpha,\beta) \to I$ tak, že $x = \phi_1(t)$, kde $t = \omega(x)$, pro všechna $x \in (\alpha,\beta)$. Tudíž pro $t \in I$ máme $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t)) = (x, \phi_2(\omega(x)))$, a tedy $f := \phi_2 \circ \omega$. Je-li $\phi_2'(t_0) \neq 0$, postupuje se analogicky.)

Cvičení 3.20: Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je diferencovatelná v bodě a a prostá na okolí a. Dokažte, že pokud $\det Df(a) = 0$, potom f^{-1} není diferencovatelná v bodě $f(a)$.

Cvičení 3.21: Buď V lineární prostor konečné dimenze se skalárním součinem a E a F podprostory V. Dokažte rovnosti:

1. $(E+F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp$,
2. $(E \cap F)^\perp = E^\perp + F^\perp$.

Cvičení* 3.22: Pokuste se zobecnit Příklad 3.68 a dokázat, že mezi všemi jednoduchými (tj. bez samoprůseků) n-úhelníky s fixním obvodem má největší obsah pravidelný n-úhelník. V limitě $n \to \infty$ nám výsledek tohoto cvičení naznačí řešení tvz. *izoperimetrického problému*: Obsah vnitřku jednoduché uzavřené křivky s fixní délkou je maximální v případě kružnice.
(Hint: Označte si souřadnice vrcholů jednoduchého n-úhelníku

$$(x_0,y_0), (x_1,y_0), \ldots, (x_{n-1},y_{n-1}), (x_n,y_n) \equiv (x_0,y_0)$$

a hledejte maximum funkce pro plochu n-úhelníku

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

za podmínky konstantního obvodu

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^{n} \ell_i = \ell > 0.$$

Pro zjednodušení řešení je vhodná komplexní formulace získaných rovnic pomocí substituce $z_i := x_i - x_{i-1} + \mathrm{i}(y_i - y_{i-1})$, $i \in \hat{n}$.)

Cvičení 3.23: Určete vzdálenost elipsy a přímky v $\mathbb{R}^2$ určené rovnicemi:

$$x^2 + 4y^2 = 1 \quad \text{a} \quad x + y = 4.$$

Cvičení 3.24: Nechť $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$. Dokažte, že

1. $\|a\|^{-2} = \min\left\{\|x\|^2 \mid a^T x = 1\right\}$,
2. $\|a\| = \max\left\{a^T x \mid \|x\| = 1\right\}$.

Cvičení 3.25:

1. Ukažte, že maximální hodnota funkce $f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^2$ na množině $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ je n^{-n}.
2. Poté dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí nerovnost:
$$\prod_{i=1}^n |x_i| \leq n^{-n/2}\|x\|^n.$$
3. Nakonec ověřte, že *geometrický průměr* n nezáporných čísel $a_1, \ldots, a_n$ je menší nebo roven jejich *aritmetickému průměru*, tj.
$$\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i.$$

Cvičení 3.26: Nechť $p, q > 1$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Ukažte, že pro funkci
$$f(x,y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$
platí $\min\{f(x,y) \mid x, y > 0 \ \wedge \ xy = 1\} = 1$.
2. Odtud dále odvoďte *Youngovu nerovnost*:
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$
pro libovolné $a, b \geq 0$.
3. Použijte předchozí bod k důkazu *Hölderovy nerovnosti*:
$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}$$
pro libovolné $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \geq 0$.

4. Nakonec z Hölderovy nerovnosti odvoďte *Minkowského nerovnost*:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}$$

pro libovolné $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n \in \mathbb{R}$.

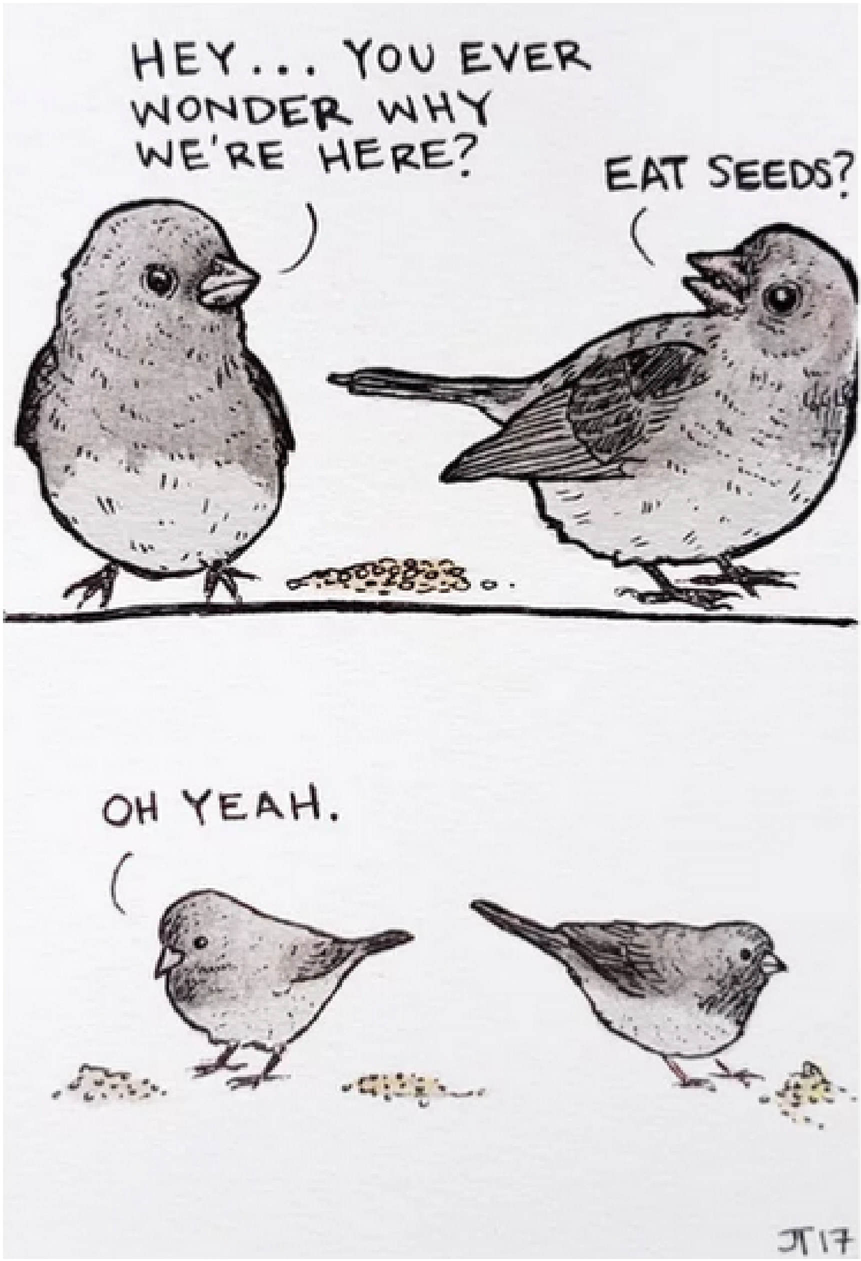
(Hint: Bod 3.: Položte $A := (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{1/p}$ a $B := (\sum_{i=1}^n b_i^q)^{1/q}$ a aplikujte 2. bod s $a = a_i/A$ a $b = b_i/B$. Bod 4.: Využijte toho, že $|x+y|^p \leq |x+y||x+y|^{p/q} \leq |x||x+y|^{p/q} + |y||x+y|^{p/q}$.)

Cvičení* 3.27: Nechť $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je PD matice a $a \in \mathbb{R}^n$. Najděte extrémy funkce

$$f(x) = \frac{1}{2}x^TAx - a^Tx.$$

Cvičení* 3.28: Maximalizujte funkci $f(X) = (\det X)^2$ na množině matic $X \in \mathbb{R}^{n,n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ splňující podmínku $\operatorname{Tr} X^TX = 1$.

Cvičení* 3.29: Maximalizujte funkci $f(X) = \operatorname{Tr} X^TX$ na množině matic $X \in \mathbb{R}^{n,n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ splňující podmínku $\det X = 1$.


HEY... YOU EVER WONDER WHY WE'RE HERE?
EAT SEEDS?
OH YEAH.
JT 17

4 Teorie míry

4.1 Úvod

Jedním z velkých problémů geometrie bylo najít vhodnou matematickou definici pro *obsah* nebo *objem* nějaké oblasti v rovině nebo prostoru. Ideálně bychom rádi našli nějakou funkci, která by podmnožině $\mathbb{R}^n$ přiřadila nezápornou hodnotu (nebo ∞) a měla „rozumné“ vlastnosti, které by byly v souladu s tím, jak intuitivně chápeme pojem *obsah* či *objem*. To znamená, že bychom např. požadovali, aby sjednocení dvou disjunktních množin mělo objem rovný součtu objemů jednotlivých množin. Dále bychom očekávali, že posunutím množiny nezměníme její objem a podobně rotováním nebo zrcadlením. Nakonec by hledaný *zobecněný objem* měl přiřadit základním množinám jako je obdélník, kvádr, atd. hodnoty, jaké bychom čekali, tzn. součin délek stran.

Formalizujeme-li si tyto základní požadavky, pak vhodným kandidátem pro zobecněný objem by byla množinová funkce $\mu : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$, která má následující vlastnosti:

i) Je-li $E_1, E_2, \ldots$ konečná či nekonečná posloupnost po dvou disjunktních množin, potom

$$\mu(E_1 \cup E_2 \cup \ldots) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \ldots.$$

ii) Jsou-li množiny E a F tzv. *kongruentní* $E \simeq F$, tj. E lze transformovat na F posunutím, otočením a zrcadlením, potom $\mu(E) = \mu(F)$.

iii) Pro objem jednotkové n-krychle máme

$$\mu\left([0, 1)^n\right) = 1.$$

Bohužel žádná množinová funkce μ, která by měla všechny vlastnosti (i)-(iii), **neexistuje**, viz Věta 4.1. Zde se už dotýkáme základů matematiky nastavených v teorii množin, konkrétně důkaz avizované neexistence používá tzv. *axiom výběru*. V celém kurzu reálné analýzy neustále (mlčky) přijímáme tzv. ZF axiomatiku teorie množin, což je sada velmi abstraktních axiomů, které ukotvují práci s množinami a zbavují teorii množin různých paradoxů. Zkratka ZF odkazuje na matematiky Zermela a Franenkela, kteří axiomatiku teorie množin sestavili. Často ovšem s touto základní sadou nevystačíme a přidáváme ještě jeden speciální axiom - axiom výběru. Mluvíme pak o ZFC axiomatice teorie množin (C = „axiom of Choice“). **Axiom výběru** postuluje:

Nechť $\mathcal{I} \neq \emptyset$ je (indexová) množina libovolné mohutnosti a $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ neprázdné a po dvou disjuktní množiny, tzn. $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$, pokud $\alpha \neq \beta$. Potom existuje množina C tak, že pro každé $\alpha \in \mathcal{I}$ je $X_\alpha \cap C$ jednobodová množina.

Tedy množina C *vybírá* z každé množiny X_α jeden prvek. Může se to zdát překvapivé, ale tato vlastnost výběru není automatická, je nezávislá na ZF axiomatice a musí se speciálně postulovat. Přijmutím axiomu výběru se matematika stává v mnoha aspektech zajímavější. Jako úvod do teorie množin doporučuji zaujatému čtenáři knihu [11].

Věta 4.1: Funkce $\mu : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ mající vlastnosti (i)-(iii) neexistuje.

Důkaz. Důkaz provedeme jen pro případ $n = 1$. Ideu důkazu lze použít i pro obecný případ $n \in \mathbb{N}$.

Nejprve definujeme relaci $\sim$ na $[0,1)$. Dva prvky $x, y \in [0,1)$ jsou v relaci $x \sim y$, právě když $x - y \in \mathbb{Q}$. Snadno se ověří, že relace $\sim$ je ekvivalence na $[0,1)$. Potom se interval $[0,1)$ rozkládá na disjunktní sjednocení tříd ekvivalence $[x] := \{y \in [0,1) \mid y \sim x\}$. Z každé z těchto tříd vybereme libovolně jednoho reprezentanta a množinu s těmito reprezentanty označíme N. Zde používáme axiom výběru!

Označme $R := \mathbb{Q} \cap [0,1)$. Pro každé $r \in R$ definujeme množinu

$$N_r := \{x + r \mid x \in N \cap [0, 1 - r)\} \cup \{x + r - 1 \mid x \in N \cap [1 - r, 1)\}.$$

Množina N_r není nic jiného než množina N s prvky posunutými o racionální r, ovšem pokud při posunutí přetečeme z $[0,1)$ za bod 1, vrátíme se zleva od 0 zpátky do $[0,1)$ (můžete si představit, že koncové body intervalu $[0,1)$ spojíme v kružnici a body posouváme po kružnici).

Zřejmě $N_r \subset [0,1)$. Dále tvrdíme, že

$$(\forall y \in [0,1))(\exists_1 r \in R)(y \in N_r).$$

Tento výrok si zaslouží krátký důkaz:

a) *Existence*: Nechť $y \in [0,1)$. Potom $[y] \cap N = \{x\}$ pro nějaké $x \in [0,1)$ (x je reprezentant třídy $[y]$). Protože $x \sim y$, je $x - y \in \mathbb{Q}$. Položíme-li

$$r := \begin{cases} y - x, & x \leq y, \\ 1 + y - x, & x > y, \end{cases}$$

potom je $r \in \mathcal{R}$ a platí, že

$$y = \begin{cases} x + r, & x \leq y, \\ x + r - 1, & x > y. \end{cases}$$

Tudíž $y \in N_r$ z definice množiny N_r.

b) *Jednoznačnost:* Nechť $y \in N_r \cap N_s$ pro nějaká $r, s \in R$. Lze uvažovat 4 situace. Pokud např. je y z první množiny ze sjednocení definující N_r, a stejně tak N_s, potom $y - r \in N$ i $y - s \in N$. Samozřejmě také $y - r \in [y]$ i $y - s \in [y]$, a tudíž $y - r = y - s$, neboť množina je $[y] \cap N$ je jednobodová. Z poslední rovnosti plyne, že $r = s$. Ke stejnému závěru dojdeme, budeme-li uvažovat situaci $y - r + 1 \in N$ a $y - s + 1 \in N$.
Na druhou stranu situace $y - r \in N$ a $y - s + 1 \in N$, nebo $y - s + 1 \in N$ a $y - r \in N$ nenastávají, neboť např. z první analogickou úvahou vyvodíme, že $1 + r = s$, což není možné pro $r, s \in [0,1)$.

Dostáváme tedy rozklad

$$[0,1) = \bigcup_{r \in R} N_r, \tag{34}$$

kde množiny N_r, $r \in R$, jsou po dvou disjunktní a je jich spočetně mnoho, protože R je spočetná množina. Předpokládejme, že existuje μ splňující (i)-(iii). Použijeme-li vlastnosti (i) a (ii), dostaneme

$$\begin{aligned}\mu(N) &= \mu(N \cap [0, 1-r)) + \mu(N \cap [1-r, 1)) \\ &= \mu\left(\{x + r \mid x \in N \cap [0, 1-r)\}\right) + \mu\left(\{x + r - 1 \mid x \in N \cap [1-r, 1)\}\right) = \mu(N_r)\end{aligned}$$

pro všechna $r \in R$. Potom ovšem podle (34) a vlastností (i) a (iii) je

$$1 = \mu([0,1)) = \sum_{r \in R} \mu(N_r) = \sum_{r \in R} \mu(N) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } \mu(N) = 0, \\ \infty, & \text{pokud } \mu(N) > 0, \end{cases}$$

což je spor. □

Mohli bychom namítnout, že vlastnost (i) pro spočetná sjednocení je příliš silná a zeslabit (i) tak, že bychom uvažovali pouze konečné posloupnosti množin. To by ovšem nebylo rozumné. Jednak je to právě tato spočetná aditivita μ, co umožňuje limitní přechody v teorii míry, které jsou zásadní v aplikacích. Navíc pro dimenze $n \geq 3$ neexistuje ani μ splňující tuto slabší vlastnost (i) spolu s (ii) a (iii), jak vyplývá z následující pozoruhodné věty, kterou dokázali Banach a Tarski v roce 1924. Důkaz opět využívá axiom výběru.

Věta 4.2 (Banach–Tarski)**:** Nechť $n \geq 3$ a $U, V \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené a omezené množiny. Potom existuje $k \in \mathbb{N}$ a množiny $E_1, \ldots, E_k, F_1, \ldots, F_k \subset \mathbb{R}^n$ tak, že

1. $E_1, \ldots, E_k$ jsou po dvou disjunktní a $\bigcup_{i=1}^k E_i = U$;
2. $F_1, \ldots, F_k$ jsou po dvou disjunktní a $\bigcup_{i=1}^k F_i = V$;
3. $(\forall i \in \hat{k})(E_i$ a F_i jsou kongruentní$)$.

Tedy je možné vzít kouli velikosti hrášku, rozkrájet ji na konečně mnoho dílů, ty posunout, otočit, příp. převrátit tak, že jejich složením vznikne např. koule velikosti Slunce. Samozřejmě je nemožné si toto „krájení“ geometricky představit a množiny E_i a F_i budou *velmi bizarní.* V každém případě Banachova–Tarského věta vylučuje existenci jakéhokoliv zobrazení $\mu : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$, kde $n \geq 3$, které by přiřadilo alespoň jedné omezené množině kladné konečné číslo a splňovalo vlastnost (i) pro konečné posloupnosti a vlastnost (ii).

Problém spočívá v tom, že se pokoušíme najít množinovou funkci μ definovanou na **všech** podmnožinách $\mathbb{R}^n$. Pokud se ale smíříme s tím, že nebudeme umět měřit některé množiny a definujeme μ jen na nějakém dostatečně bohatém systému podmnožin $\mathbb{R}^n$, potom již bude možné najít vhodného kandidáta na zobecněný objem (míru), tedy μ, jež bude mít všechny kýžené vlastnosti. Omezením se na tyto tzv. měřitelné množiny nepřijdeme o moc, neboť v podstatě všechny množiny, které v praxi chceme umět měřit, budou zahrnuty.

Je mimořádně výhodné, a navíc si to nevyžádá příliš práce navíc, vybudovat teorii míry a integrálu obecně a neomezovat se pouze na $\mathbb{R}^n$. Vlastnosti (ii) a (iii) jsou přímo svázány s euklidovskou geometrií prostoru $\mathbb{R}^n$. Je to pouze vlastnost (i), tzv. *σ-aditivita*, která je stěžejní pro obecnou definici *míry* μ. Míra nemusí mít pouze význam objemu, ale objevuje se v mnoha rozličných aplikacích. Např. ve fyzice může míra μ reprezentovat rozložení hmoty nebo náboje. Další aplikace jsou např. v teorii pravděpodobnosti, kde $\mu(E)$ reprezentuje pravděpodobnost nějakého jevu E. Začneme proto budovat obecnou teorii míry na abstraktních množinových systémech - tzv. *σ-algebrách*.

4.2 σ-algebra

V celé této části bude X označovat *neprázdnou abstraktní množinu*.

Definice 4.3 (Algebra)**:** Neprázdný systém množin $\mathcal{A} \subset 2^X$ nazveme *algebra*, právě když platí:

1. $E \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ E^c \equiv X \setminus E \in \mathcal{A}$,
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\,(E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{A})$.

Definice 4.4 (σ-algebra)**:** Neprázdný systém množin $\mathcal{A} \subset 2^X$ nazveme *σ-algebra*, právě když

1. $E \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ E^c \in \mathcal{A}$,
2. $\{E_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \bigcup_{i=1}^\infty E_i \in \mathcal{A}$.

Tedy algebra je neprázdný systém množin uzavřený na doplňky a konečná sjednocení, kdežto σ-algebra je uzavřená na doplňky a spočetná sjednocení. Všimněte si, že algebra $\mathcal{A}$ je uzavřená i na konečné průniky, neboť platí

$$\bigcap_{i=1}^n E_i = \left(\bigcup_{i=1}^n E_i^c\right)^c.$$

Podobně to platí pro σ-algebru a spočetné průniky. Dále algebra $\mathcal{A}$ obsahuje množiny $\emptyset, X$, neboť pro $E \in \mathcal{A}$ máme $\emptyset = E \cap E^c \in \mathcal{A}$ a $X = E \cup E^c \in \mathcal{A}$. Každá σ-algebra $\mathcal{A}$ je také algebra, neboť uzavřenost na konečná sjednocení dostaneme tak, že k daným množinám $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}$ dodefinujeme $E_i := \emptyset \in \mathcal{A}$ pro $i > n$ a použijeme uzavřenost $\mathcal{A}$ na spočetná sjednocení. Všimněte si také, že v algebře $\mathcal{A}$ platí implikace: $E, F \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ F \setminus E \in \mathcal{A}$, neboť $F \setminus E = F \cap E^c$.

Poznamenejme ještě, že pokud je algebra $\mathcal{A}$ navíc uzavřená na spočetná sjednocení posloupností *po dvou disjunktních* množin, potom je $\mathcal{A}$ σ-algebra. Skutečně je-li $\{E_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{A}$, položíme

$$F_n := E_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right) = E_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right)^c \in \mathcal{A},$$

a pak je $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost po dvou disjunktních množin, tj. $\forall i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ je $F_i \cap F_j = \emptyset$, a

$$\bigcup_{n=1}^\infty E_n = \bigcup_{n=1}^\infty F_n \in \mathcal{A}.$$

Tento „trik“, kdy nahradíme posloupnost množin $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ posloupností po dvou disjunktních množin $\{F_n\}_{n=1}^\infty$, je dobré si zapamatovat, protože ho ještě několikrát použijeme.

Příklad 4.5: Systémy $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X\}$ a $\mathcal{A}_2 = 2^X$ jsou σ-algebry. Je-li X nespočetná množina, potom také

$$\mathcal{A}_3 = \{E \subset X \mid E \text{ je nejvýše spočetná nebo } E^c \text{ je nejvýše spočetná}\}$$

je σ-algebra (ověřte).

Jelikož libovolný průnik σ-algeber je opět σ-algebra (ověřte) a potenční množina 2^Xje σ-algebra, můžeme definovat nejmenší σ-algebru obsahující pevně zvolené množiny následovně.

Definice 4.6 (σ-algebra generovaná systémem množin)**:** Nechť $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset 2^X$. Minimální σ-algebru obsahující $\mathcal{E}$, tj. systém

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \ \wedge \ \mathcal{A} \text{ je } \sigma\text{-algebra}\},$$

nazýváme *σ-algebra generovaná systémem $\mathcal{E}$.*

Následující jednoduché pozorování budeme často používat.

Lemma 4.7: Nechť $\emptyset \neq \mathcal{E}, \mathcal{F} \subset 2^X$. Je-li $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$, potom $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$.

Důkaz. Protože $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$, je $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ jednou ze σ-algeber $\mathcal{A}$ v průniku

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \ \wedge \ \mathcal{A} \text{ je } \sigma\text{-algebra}\}.$$

Odtud plyne $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$. □

Důležitým příkladem je σ-algebra generovaná otevřenými množinami.

Definice 4.8 (Borelovská σ-algebra, borelovské množiny)**:** Buď (X, τ) topologický prostor, σ-algebra $\mathcal{B}_X := \mathcal{M}(\tau)$ generovaná topologií τ se nazývá *borelovská σ-algebra* na X. Prvky $\mathcal{B}_X$ se nazývají *borelovské množiny.*

Poznámka: Borelovská σ-algebra $\mathcal{B}_X$ závisí na zvolené topologii na X, i když to explicitně nevyznačujeme. Systém množin $\mathcal{B}_X$ je velmi bohatý. Kromě všech otevřených a uzavřených množin obsahuje $\mathcal{B}_X$ např. spočetné průniky otevřených množin, tj. G_δ množiny; spočetná sjednocení uzavřených množin, tj. F_σ množiny; spočetná sjednocení G_δ množin, tj. $G_{\delta\sigma}$ množiny; atd.

Zejména borelovské podmnožiny $\mathbb{R}$ budou pro nás později velmi důležité. Borelovskou σ-algebru lze generovat systémy různých typů intervalů.

Věta 4.9: Pro každé $i \in \hat{8}$ platí:

$$\mathcal{B}_\mathbb{R} = \mathcal{M}(\mathcal{E}_i),$$

kde

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &:= \{(a,b) \mid a < b\}, & \mathcal{E}_2 &:= \{[a,b] \mid a < b\},\\
\mathcal{E}_3 &:= \{(a,b] \mid a < b\}, & \mathcal{E}_4 &:= \{[a,b) \mid a < b\},\\
\mathcal{E}_5 &:= \{(a,\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}, & \mathcal{E}_6 &:= \{(-\infty,a) \mid a \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{E}_7 &:= \{[a,\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}, & \mathcal{E}_8 &:= \{(-\infty,a] \mid a \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Důkaz. Intervaly ze systémů $\mathcal{E}_i$, $i \neq 3, 4$ jsou otevřené nebo uzavřené množiny. Intervaly z $\mathcal{E}_3$ a $\mathcal{E}_4$ jsou G_δ množiny, neboť např.

$$(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, b + \frac{1}{n}\right).$$

Proto je $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{B}_\mathbb{R}$ pro každé $i \in \hat{8}$ a z Lemma 4.7 dostáváme inkluzi $\mathcal{M}(\mathcal{E}_i) \subset \mathcal{B}_\mathbb{R}$ pro každé $i \in \hat{8}$.

Ukážeme opačné inkluze. Protože každá otevřená množina je spočetným sjednocením intervalů z $\mathcal{E}_1$, viz Cvičení 2.50, jsou otevřené množiny obsaženy v $\mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$. Použijeme-li opět Lemma 4.7, dostáváme inkluzi $\mathcal{B}_\mathbb{R} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$.

Nyní stačí k ověření inkluzí $\mathcal{B}_\mathbb{R} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_i)$ pro $i \geq 2$ ukázat, že otevřené intervaly (a, b) jsou obsaženy v množinách $\mathcal{M}(\mathcal{E}_i)$ pro každé $i \geq 2$ a aplikovat opět Lemma 4.7. Např. pro $i = 2$ máme

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_2).$$

Nebo pro $i = 6$ máme

$$(a, b) = (-\infty, b) \cap ((-\infty, a])^c = (-\infty, b) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, a + \frac{1}{n}\right)\right)^c \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_6).$$

Ověření ostatních případů je přenecháno čtenáři jako Cvičení 4.1. □

Pro pozdější potřeby si musíme zavést tzv. *produktovou σ-algebru*. Zavedeme si ji pouze pro produkt konečně mnoha σ-algeber, ačkoliv v případě spočetně mnoha σ-algeber by definice i následující tvrzení zůstaly v platnosti v podstatě beze změn. V případě nespočetně mnoha σ-algeber by se už muselo postupovat trochu jinak.

Definice 4.10 (Produktová σ-algebra)**:** Buďte $n \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ σ-algebry na $X_1, \ldots, X_n$. Potom σ-algebra

$$\otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i \equiv \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n := \mathcal{M}\left(\{E_1 \times \cdots \times E_n \mid E_i \in \mathcal{A}_i, i \in \hat{n}\}\right)$$

se nazývá *produktová σ-algebra* na $X_1 \times \cdots \times X_n$.

Lemma 4.11: Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ jsou σ-algebry na $X_1, \ldots, X_n$. Potom

$$\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{M}\left(\{X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times E_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n \mid E_i \in \mathcal{A}_i, i \in \hat{n}\}\right).$$

Důkaz. Inkluze $\supset$: Stačí si všimnout, že pro libovolné $i \in \hat{n}$ a $F_i \in \mathcal{A}_i$ je

$$X_1 \times \cdots \times F_i \times \cdots \times X_n \in \{E_1 \times \cdots \times E_n \mid E_i \in \mathcal{A}_i, i \in \hat{n}\} \subset \otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$$

a aplikovat Lemma 4.7.

Inkluze $\subset$: Jelikož pro množiny $F_1 \in \mathcal{A}_1, \dots, F_n \in \mathcal{A}_n$ máme

$$F_1 \times \cdots \times F_n = \bigcap_{i=1}^{n} X_1 \times \cdots \times F_i \times \cdots \times X_n \\ \in \mathcal{M}\left(\{X_1 \times \cdots \times E_i \times \cdots \times X_n \mid E_i \in \mathcal{A}_i, i \in \hat{n}\}\right),$$

vyplývá i opačná inkluze z Lemma 4.7. $\square$

Lemma 4.12: Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $X_i \in \mathcal{E}_i \subset 2^{X_i}$ pro každé $i \in \hat{n}$. Označme $\mathcal{A}_i := \mathcal{M}(\mathcal{E}_i)$. Potom

$$\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{M}\left(\{E_1 \times \cdots \times E_n \mid E_i \in \mathcal{E}_i, i \in \hat{n}\}\right).$$

Důkaz. Inkluze $\supset$: Stačí uvážit, že pro $E_i \in \mathcal{E}_i$, $i \in \hat{n}$, je

$$E_1 \times \cdots \times E_n \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$$

a aplikovat Lemma 4.7.

Inkluze $\subset$: Nejprve si všimneme, že pro $i \in \hat{n}$ je systém

$$\{E \subset X_i \mid X_1 \times \cdots \times E \times \cdots \times X_n \in \mathcal{M}\left(\{E_1 \times \cdots \times E_n \mid E_i \in \mathcal{E}_i, i \in \hat{n}\}\right)\}$$

σ-algebra obsahující $\mathcal{E}_i$ (zde je třeba předpoklad $X_i \in \mathcal{E}_i$), a tudíž obsahuje také $\mathcal{A}_i = \mathcal{M}(\mathcal{E}_i)$. Tedy pro každé $i \in \hat{n}$ a $F_i \in \mathcal{A}_i$ je

$$X_1 \times \cdots \times F_i \times \cdots \times X_n \in \mathcal{M}\left(\{E_1 \times \cdots \times E_n \mid E_i \in \mathcal{E}_i, i \in \hat{n}\}\right).$$

Potom podle Lemma 4.11 a 4.7 dostaneme

$$\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{M}\left(\{X_1 \times \cdots \times F_i \times \cdots \times X_n \mid F_i \in \mathcal{A}_i, i \in \hat{n}\}\right) \\ \subset \mathcal{M}\left(\{E_1 \times \cdots \times E_n \mid E_i \in \mathcal{E}_i, i \in \hat{n}\}\right).$$

$\square$

Věta 4.13: Nechť $n \in \mathbb{N}$, $(X_1, \tau_1), \dots, (X_n, \tau_n)$ topologické prostory a kartézský součin $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ uvažujme s produktovou topologií $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_n$. Potom platí:

1. $\otimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{X_i} \subset \mathcal{B}_X$.
2. Jsou-li navíc $(X_1, \tau_1), \dots, (X_n, \tau_n)$ separabilní metrické prostory, potom $\otimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{X_i} = \mathcal{B}_X$.

Důkaz. 1. Nechť $U_i \in \tau_i$ pro všechna $i \in \hat{n}$. Potom $U_1 \times \cdots \times U_n \in \tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_n$, a proto

$$\mathcal{M}(\{U_1 \times \cdots \times U_n \mid U_i \in \tau_i, i \in \hat{n}\}) \subset \mathcal{M}(\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_n) = \mathcal{B}_X.$$

Odtud a podle Lemma 4.12 vyvodíme $\otimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{X_i} \subset \mathcal{B}_X$.

2. Předpokládejme, že pro každé $i \in \hat{n}$ je (X_i, τ_i) separabilní metrický prostor a označme C_i spočetnou hustou podmnožinu X_i. Potom je systém koulí se středy v bodech množiny C_i a racionálními poloměry, tj.

$$\{B_x(r) \mid x \in C_i, r \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}\}$$

bází prostoru (X_i, τ_i); ověřte jako Cvičení 4.2. Označme

$$\mathcal{E}_i := \{B_x(r) \mid x \in C_i, r \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}\} \cup \{X_i\}.$$

Tedy každá otevřená množina z X_i je sjednocení množin z $\mathcal{E}_i$ a toto sjednocení je navíc nejvýše spočetné, neboť $\mathcal{E}_i$ je spočetná. Odtud vidíme, že $\tau_i \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_i)$. Dále z Lemma 4.7 plyne $\mathcal{B}_{X_i} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_i)$. Navíc opačná inkluze platí také, protože $\mathcal{E}_i \subset \tau_i$. Nakonec tedy dostáváme

$$\mathcal{B}_{X_i} = \mathcal{M}(\mathcal{E}_i) \tag{35}$$

pro každé $i \in \hat{n}$.

Protože je pro každé $i \in \hat{n}$ systém $\mathcal{E}_i$ báze (X_i, τ_i), je $\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n$ báze $(X, \tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_n)$, viz Cvičení 2.45. Uvážíme-li navíc, že $\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n$ je spočetná, je každá otevřená množina A v X spočetným sjednocením množin z $\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n$, neboli

$$\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_n \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n)$$

Odtud a z Lemma 4.7 plyne

$$\mathcal{B}_X \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n).$$

Nakonec díky vztahu (35) a protože $X_i \in \mathcal{E}_i$ dostaneme aplikací Lemma 4.12 rovnost

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n) = \otimes_{i=1}^n \mathcal{B}_{X_i},$$

a tudíž $\mathcal{B}_X \subset \otimes_{i=1}^n \mathcal{B}_{X_i}$. □

Reálná čísla s obvyklou topologií tvoří separabilní metrický prostor, a proto platí následující okamžitý důsledek

Důsledek 4.14: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \underbrace{\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_{n\text{krát}}.$$

Tuto sekci uzavřeme jedním pomocným tvrzením, které použijeme později.

Definice 4.15 (Elementární systém)**:** Systém množin $\mathcal{E} \subset 2^X$ nazýváme *elementární systém*, právě když platí:

1. $\emptyset \in \mathcal{E}$.
2. Je-li $E, F \in \mathcal{E}$, potom $E \cap F \in \mathcal{E}$.

3. Je-li $E \in \mathcal{E}$, potom je E^c konečným sjednocením po dvou disjunktních množin z $\mathcal{E}$.

Lemma 4.16: Buď $\mathcal{E} \subset 2^X$ elementární sytém. Potom systém množin $\mathcal{A}$, které jsou tvořeny konečnými sjednoceními po dvou disjunktních množin z $\mathcal{E}$, je algebra.

Důkaz. Ověříme uzavřenost $\mathcal{A}$ na komplement a konečná sjednocení.

1. Uzavřenost $\mathcal{A}$ na konečná sjednocení: Je-li $A, B \in \mathcal{A}$, potom $A = \cup_{i=1}^k A_i$ a $B = \cup_{j=1}^l B_j$, kde $\{A_i\}_{i=1}^k, \{B_j\}_{j=1}^l \subset \mathcal{E}$ a

$$A \cup B = A_1 \cup \cdots \cup A_k \cup B_1 \cup \cdots \cup B_l.$$

Proto stačí dokázat implikaci

$$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E} \ \Rightarrow A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{A}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, což provedeme indukcí.

Případ $n = 2$: nechť $A_1, A_2 \in \mathcal{E}$. Podle vlastnosti 3. elementárního systému $\mathcal{E}$ je $A_2^c = \cup_{j=1}^m C_j$, kde $\{C_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{E}$ jsou po dvou disjunktní. Potom

$$A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap A_2^c = A_1 \cap \bigcup_{j=1}^m C_j = \bigcup_{j=1}^m A_1 \cap C_j \in \mathcal{A},$$

neboť množiny $A_1 \cap C_j$, $j \in \hat{m}$, jsou po dvou disjunktní. Z toho dále vyplývá, že

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup A_2 \in \mathcal{A}.$$

Indukční krok $n-1 \mapsto n$: Předpokládejme, že $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$. Dle indukčního předpokladu je $A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \in \mathcal{A}$, a tudíž existují po dvou disjunktní množiny $B_1, \ldots, B_{m_n} \in \mathcal{E}$ tak, že

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i = \bigcup_{j=1}^{m_n} B_j.$$

Potom máme

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_n \cup \bigcup_{j=1}^{m_n} B_j = A_n \cup \bigcup_{j=1}^{m_n} (B_j \setminus A_n).$$

Jelikož množiny $B_j \setminus A_n \in \mathcal{A}$ dle předchozího kroku a jsou opět po dvou disjunktní, lze poslední výraz napsat jako konečné sjednocení po dvou disjunktních množin z $\mathcal{E}$, tedy patří do $\mathcal{A}$.

2. Uzavřenost $\mathcal{A}$ na komplement: Buď $A \in \mathcal{A}$. Potom $A = \cup_{i=1}^n A_i$, kde $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$ a pro každé $i \in \hat{n}$ máme

$$A_i^c = \bigcup_{j=1}^{k_i} B_j^i,$$

kde $B_1^i, \ldots B_{k_i}^i \in \mathcal{E}$ jsou po dvou disjunktní. Odtud můžeme A^c vyjádřit jako

$$A^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c = \bigcap_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{k_i} B_j^i = \bigcup \left\{ B_{j_1}^1 \cap \cdots \cap B_{j_n}^n \mid 1 \le j_i \le k_i, i \in \hat{n} \right\} \in \mathcal{A}.$$

V poslední rovnosti jsme použili (několikanásobně) de Morganův zákon $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Je třeba si také uvědomit, že množiny $B^1_{j_1} \cap \dots \cap B^n_{j_n}$ a $B^1_{j'_1} \cap \dots \cap B^n_{j'_n}$ jsou disjunktní, kdykoliv je $j_i \neq j'_i$ alespoň pro jedno $i \in \hat{n}$. $\square$

4.3 Míra

Definice 4.17 (Míra, měřitelný prostor, prostor s mírou, měřitelná množina)**:** Nechť $\mathcal{A} \subset 2^X$ je σ-algebra na X. Množinovou funkci $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ splňující

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. je-li $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ posloupnost po dvou disjunktních množin, potom

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \qquad \text{(tzv. } \sigma\text{-}\textit{aditivita } \mu\text{)},$$

nazýváme *míra* na X (nebo na $(X, \mathcal{A})$). Uspořádanou dvojici $(X, \mathcal{A})$ nazýváme *měřitelný prostor*, uspořádanou trojici $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor s mírou* a množiny σ-algebry $\mathcal{A}$ *měřitelné množiny.*

Poznámka: Uvědomte si, že míra μ je i konečně aditivní, tj. pro lib. $n \in \mathbb{N}$ a $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní platí:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j),$$

neboť stačí položit $E_j := \emptyset$ pro $j > n$ a použít vlastnosti 1. a 2. z definice míry.

Definice 4.18 (Konečná míra, σ-konečná míra)**:** Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Míra μ se nazývá *konečná*, právě když $\mu(X) < \infty$. Míra μ se nazývá *σ-konečná*, právě když existuje $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ tak, že $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = X$ a $\mu(E_n) < \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka: Je-li μ konečná míra, potom $(\forall E \in \mathcal{A})(\mu(E) < \infty)$, neboť $\mu(E) + \mu(E^c) = \mu(X) < \infty$, z čehož plyne $\mu(E) \le \mu(X) < \infty$. Naštěstí většina měr, se kterými pracujeme v aplikacích, jsou alespoň σ-konečné. Míry, které nejsou σ-konečné, mají řadu patologických vlastností.

Uveďme si několik příkladů měr.

Příklad 4.19 (Diracova míra)**:** Nechť $X \neq \emptyset$ a $\mathcal{A} = 2^X$ a $x_0 \in X$. Pro každé $E \subset X$ definujme

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x_0 \in E, \\ 0, & \text{pokud } x_0 \notin E. \end{cases}$$

Snadno se ověří, že δ_{x_0} je míra na X a nazývá se *Diracova (delta) míra* v bodě x_0.

Příklad 4.20: Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ a $\{a_n\}_{n=1}^{N} \subset [0, \infty)$, kde $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Potom μ definovaná pro každé $E \subset X$ vztahem

$$\mu(E) := \sum_{n=1}^{N} a_n \delta_{x_n}(E)$$

je σ-konečná míra (ověřte). Míra μ je konečná, právě když $\sum_{n=1}^{N} a_n < \infty$.

Příklad 4.21 (Počítací míra)**:** Nechť $X \neq \emptyset$ a $\mathcal{A} = 2^X$. Pro $E \subset X$ definujme $\mu(E) := |E|$, tj. $\mu(E)$ je počet prvků množiny E. Potom μ je míra na X a nazývá se ***počítací míra***. Míra μ je konečná, právě když je X konečná a μ je σ-konečná, právě když je X nejvýše spočetná.

Příklad 4.22: Nechť X je nespočetná a

$$\mathcal{A} = \{E \subset X \mid E \text{ je nejvýše spočetná nebo } E^c \text{ je nejvýše spočetná}\}.$$

Množinová funkce μ definovaná na $\mathcal{A}$ vztahem

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{pokud je } E \text{ nejvýše spočetná,} \\ 1, & \text{pokud je } E^c \text{ nejvýše spočetná,} \end{cases}$$

je míra na X (ověřte).

Příklad 4.23: Nechť X je nekonečná množina a $\mathcal{A} = 2^X$ Množinová funkce μ definovaná na $\mathcal{A}$ vztahem

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{pokud je } E \text{ konečná,} \\ \infty, & \text{pokud je } E \text{ nekonečná,} \end{cases}$$

není míra na X, neboť μ není σ-aditivní (je pouze konečně aditivní).

Základní vlastnosti měr shrneme v následujícím tvrzení.

Věta 4.24: Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Potom platí:

1. **Monotonie**: Je-li $E, F \in \mathcal{A}$ a $E \subset F$, potom $\mu(E) \leq \mu(F)$.
2. **Subaditivita**: Je-li $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, potom
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$
3. **Spojitost zdola**: Je-li $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ a $E_n \subset E_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, potom
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$
4. **Spojitost shora**: Je-li $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, $E_n \supset E_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\mu(E_1) < \infty$, potom
$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Důkaz. 1. Je-li $E, F \in \mathcal{A}$ a $E \subset F$, potom je $F = E \cup (F \setminus E)$, kde množiny E a $F \setminus E$ jsou disjunktní. Přihlédneme-li ještě k tomu, že $F \setminus E \in \mathcal{A}$, dostaneme $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E)$.

2. Nechť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$. Položme $F_1 := E_1$ a

$$F_k := E_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \right)$$

pro $k \geq 2$. Potom jsou množiny z $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ po dvou disjunktní a $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. Navíc podle již dokázaného tvrzení 1. je $\mu(F_n) \leq \mu(E_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Odtud a ze σ-aditivity μ dostane

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

3. Nechť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ a $E_n \subset E_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Položme $E_0 := \emptyset$. Potom

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \setminus E_{n-1}) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \setminus E_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} (E_k \setminus E_{k-1}) \right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(E_n\right).\end{aligned}$$

4. Nechť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, $E_n \supset E_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\mu(E_1) < \infty$. Položme $F_n := E_1 \setminus E_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom $F_n \subset F_{n+1}$ a $\mu(E_1) = \mu(E_n) + \mu(F_n)$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Dále si všimneme, že E_1 lze rozložit na sjednocení dvou disjunktních množin

$$E_1 = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right).$$

Odtud a s využitím již dokázaného tvrzení 3. dostaneme

$$\begin{aligned}\mu(E_1) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) + \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) + \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right) \\ &= \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) + \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right).\end{aligned}$$

V posledním výrazu se nevyskytuje rozdíl nekonečen, protože je $\mu(E_n) \leq \mu(E_1) < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Navíc můžeme odečíst $\mu(E_1)$ od obou stran rovnice a dostaneme tvrzení věty. $\square$

Poznámka: Předpoklad $\mu(E_1) < \infty$ v 4. tvrzení lze nahradit předpokladem $\mu(E_n) < \infty$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, ale nelze ho zcela vypustit. Např., je-li μ počítací míra na $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ a $E_n = \{n, n+1, \dots\}$, potom $\cap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$, ale $\mu(E_n) = \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Definice 4.25 (Množina nulové míry)**:** Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Řekneme, že $E \in \mathcal{A}$ je *množina nulové míry* nebo také *μ-nulová množina*, právě když $\mu(E) = 0$.

Následující tvrzení, které okamžitě vyplývá ze subaditivity míry, budeme často používat.

Věta 4.26: Spočetné sjednocení množin nulové míry je množina nulové míry.

Definice 4.27 (Terminologie „skoro všude")**:** Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $A \subset X$. Platí-li nějaké tvrzení o bodech x množiny A až na množinu bodů z množiny nulové míry, říkáme, že toto tvrzení platí *skoro všude* v A (zkracujeme *s.v.*) nebo pro *skoro všechna* $x \in A$. Chceme-li zdůraznit závislost na míře μ, říkáme *μ-skoro všude* v A nebo pro *μ-skoro všechna* $x \in A$.

Příklad 4.28: Na měřitelném prostoru $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ definujme míru μ tak, že $\mu(E)$ udává počet sudých čísel v množině $E \subset \mathbb{N}$. Potom jsou pravdivé výroky „Skoro všechna přirozená čísla jsou sudá." nebo „Pro μ-skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí, že n je sudé.", neboť $\mu(2\mathbb{N} - 1) = 0$ dle definice μ.

Je-li $\mu(E) = 0$ a $F \subset E$, potom z monotonie míry plyne, že $\mu(F) = 0$, ale jedině za předpokladu, že $F \in \mathcal{A}$. Množina F by totiž nemusela být měřitelná, a potom by výraz $\mu(F)$ neměl dobrý smysl. Míry, jejichž definiční obor obsahuje všechny podmnožiny nulových množin, se nazývají *úplné*.

Definice 4.29 (Úplná míra)**:** Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Míra μ se nazývá *úplná*, právě když

$$(\forall F \in \mathcal{A}, \mu(F) = 0)(E \subset F \;\Rightarrow\; E \in \mathcal{A}).$$

Práce s neúplnými mírami může působit nepříjemné potíže. Naštěstí definiční obor každé míry lze rozšířit a dodefinovat míru tak, že dostaneme míru úplnou. Konstrukci zúplnění míry ukazuje následující věta.

Věta 4.30 (O zúplnění míry)**:** Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Označme $\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{A} \mid \mu(N) = 0\}$ a definujme

$$\overline{\mathcal{A}} := \{E \cup F \mid E \in \mathcal{A} \text{ a } F \subset N \text{ pro nějaké } N \in \mathcal{N}\}$$

a množinovou funkci $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ vztahem

$$\overline{\mu}(E \cup F) := \mu(E), \qquad \text{kde } E \in \mathcal{A} \text{ a } F \subset N \text{ pro nějaké } N \in \mathcal{N}.$$

Potom je $\overline{\mathcal{A}}$ σ-algebra a $\overline{\mu}$ dobře definovaná úplná míra na X. Navíc $\overline{\mu}$ je jediná míra na $(X, \overline{\mathcal{A}})$ taková, že $\overline{\mu} \restriction \mathcal{A} = \mu$.

Důkaz. Nejprve ověříme, že $\overline{\mathcal{A}}$ je σ-algebra. Jelikož jsou oba systémy $\mathcal{A}$ i $\mathcal{N}$ uzavřené na spočetná sjednocení, viz Věta 4.26, je také $\overline{\mathcal{A}}$ uzavřená na spočetná sjednocení.

Ukážeme uzavřenost $\overline{\mathcal{A}}$ na doplňky. Nechť $E \cup F \in \overline{\mathcal{A}}$, kde $E \in \mathcal{A}$ a $F \subset N \in \mathcal{N}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $E \cap N = \emptyset$, jinak bychom nahradili F a N množinami $F \setminus E$ a $N \setminus E$. Nyní díky tomu, že $E \cap N = \emptyset$, platí $E \cup F = (E \cup N) \cap (N^c \cup F)$. Potom máme

$$(E \cup F)^c = (E \cup N)^c \cup (N^c \cup F)^c = (E \cup N)^c \cup (N \setminus F).$$

Protože $(E \cup N)^c \in \mathcal{A}$ a $N \setminus F \subset N \in \mathcal{N}$, plyne odtud, že $(E \cup F)^c \in \overline{\mathcal{A}}$.

Dále ověříme, že $\overline{\mu}$ je dobře definovaná na $\overline{\mathcal{A}}$ předpisem $\overline{\mu}(E \cup F) := \mu(E)$, kde $E \in \mathcal{A}$ a $F \subset N \in \mathcal{N}$, tedy že hodnota $\overline{\mu}(E \cup F)$ nezávisí na rozkladu množiny $E \cup F$. Předpokládejme, že $E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$, kde $E_i \in \mathcal{A}$ a $F_i \subset N_i \in \mathcal{N}$ pro $i \in \{1, 2\}$. Protože $E_1 \subset E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2 \subset E_2 \cup N_2$, máme

$$\mu(E_1) \leq \mu(E_2 \cup N_2) \leq \mu(E_2) + \mu(N_2) = \mu(E_2).$$

Analogicky odvodíme i opačnou nerovnost $\mu(E_2) \leq \mu(E_1)$, a tedy $\overline{\mu}(E_1 \cup F_1) = \mu(E_1) = \mu(E_2) = \overline{\mu}(E_2 \cup F_2)$.

Zřejmě $\overline{\mu}(\emptyset) = \overline{\mu}(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Pro ověření σ-aditivity $\overline{\mu}$ uvažujme posloupnost $\{E_n \cup F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{\mathcal{A}}$ po dvou disjunktních množin, kde $E_n \in \mathcal{A}$ a $F_n \subset N_n \in \mathcal{N}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cup F_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right),$$

kde $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$ a $\cup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{N}$ podle Věty 4.26, dostaneme

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cup F_n \right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_n \cup F_n).$$

Dále ověříme úplnost míry $\overline{\mu}$. Nechť $E \cup F \in \overline{\mathcal{A}}$, kde $E \in \mathcal{A}$ a $F \subset N \in \mathcal{N}$, a $\overline{\mu}(E \cup F) = 0$. Odtud plyne, že $\mu(E) = 0$, neboli $E \in \mathcal{N}$, a proto také $E \cup N \in \mathcal{N}$. Potom pro lib. podmnožinu $A \subset E \cup F$, platí, že $A = \emptyset \cup A$, kde $A \subset E \cup N \in \mathcal{N}$, a tedy $A \in \overline{\mathcal{A}}$.

Nakonec zbývá dokázat tvrzení o jednoznačnosti. Předpokládejme, že ν je míra na $(X, \overline{\mathcal{A}})$ taková, že $(\forall E \in \mathcal{A})(\nu(E) = \mu(E))$. Ukážeme, že $\nu = \overline{\mu}$. Nechť $E \cup F \in \overline{\mathcal{A}}$, kde $E \in \mathcal{A}$ a $F \subset N \in \mathcal{N}$. Potom $0 = \mu(N) = \nu(N)$ a platí

$$\nu(E) \leq \nu(E \cup F) \leq \nu(E \cup N) \leq \nu(E) + \nu(N) = \nu(E),$$

neboli $\nu(E) = \nu(E \cup F)$, a proto

$$\nu(E \cup F) = \nu(E) = \mu(E) = \overline{\mu}(E \cup F).$$

Protože byla $E \cup F \in \overline{\mathcal{A}}$ volena libovolně, dokázali jsme, že $\nu = \overline{\mu}$. □

Definice 4.31 (Zúplnění)**:** Míru $\overline{\mu}$ z Věty 4.30 nazýváme *zúplnění míry* μ a σ-algebru $\overline{\mathcal{A}}$ *zúplněním σ-algebry $\mathcal{A}$.*

4.4 Vnější míra

Cílem této části je vysvětlení tzv. *Carathéodoryho konstrukce*, což je metoda konstrukce míry z tzv. *vnější míry.*

Definice 4.32 (Vnější míra)**:** Množinovou funkci $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ splňující:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$,
2. je-li $A \subset B \subset X$, potom $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,
3. je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$, potom

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n),$$

nazýváme *vnější míra* na X.

Půjdeme ještě o krok zpět a před samotnou Carathéodoryho větou si ukážeme jeden obvyklý způsob zavedení vnější míry. Na začátku procesu je dán nějaký „systém základních množin" $\mathcal{E} \subset 2^X$ (např. obdélníky v $\mathbb{R}^2$), které umíme „změřit" danou množinovou funkcí definovanou na $\mathcal{E}$ (např. obsah obdélníku). Potom libovolnou množinu $A \subset X$ aproximujeme „z vnějšku" pokrytím **spočetně mnoha** množinami z $\mathcal{E}$ (pokryjeme A obdélníky) a definujeme vnější míru jako infimum takových aproximací (spočítáme cosi jako „vnější obsah" množiny A). Přesnou formulaci a důkaz, že takto dostaneme skutečně vnější míru na X, ukazuje následující věta.

Věta 4.33: Nechť $\mathcal{E} \subset 2^X$ a $\rho : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ jsou takové, že $\emptyset, X \in \mathcal{E}$ a $\rho(\emptyset) = 0$. Potom množinová funkce μ^* definovaná pro každé $A \subset X$ vztahem

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n) \;\middle|\; \{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{E} \text{ a } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\} \tag{36}$$

je vnější míra na X.

Poznámka: Definice (36) je v pořádku, neboť množina v infimu je vždy neprázdná, stačí položit $E_n := X$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz Věty 4.33. Zřejmě $\mu^*(\emptyset) = 0$, stačí v (36) položit $E_n := \emptyset$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Také je snadno vidět, že pokud $A \subset B$, potom $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, neboť každé spočetné pokrytí množiny B množinami z $\mathcal{E}$ pokrývá také A.

Stačí tedy ověřit spočetnou subaditivitu μ^*. Nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Zvolme $\epsilon > 0$ libovolné ale pevné. Z definice infima plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $\{E_j^{(n)}\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ tak, že

$$A_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^{(n)} \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \rho\left(E_j^{(n)}\right) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Potom ovšem

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n,j=1}^{\infty} E_j^{(n)}$$

a

$$\sum_{n,j=1}^{\infty} \rho\left(E_j^{(n)}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \epsilon,$$

z čehož plyne

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \epsilon.$$

Jelikož bylo $\epsilon > 0$ voleno libovolně, dostáváme tak kýženou nerovnost

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

□

Vraťme se nyní k původnímu záměru konstrukce míry z dané vnější míry μ^*. Fundamentálním krokem konstrukce je vhodné zúžení vnější míry μ^* na tzv. *μ^*-měřitelné množiny.*

Definice 4.34 (μ^*-měřitelná množina)**:** Nechť μ^* je vnější míra na X. Množina $A \subset X$ se nazývá *μ^*-měřitelná*, právě když

$$(\forall E \subset X)\left(\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)\right).$$

Poznámka: Nerovnost $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ je splněna automaticky díky spočetné subaditivitě vnější míry μ^*. Navíc pokud $\mu^*(E) = \infty$, platí druhá nerovnost $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ triviálně. Neboli k tomu, aby množina A byla μ^*-měřitelná je nutné a stačí, aby platilo:

$$(\forall E \subset X, \mu^*(E) < \infty)\left(\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)\right).$$

Carathéodoryho vymezení μ^*-měřitelných množin, které staví na historicky starší (nepatrně odlišné) Lebesgueově charakterizaci měřitelných množin, je v teorii míry zcela zásadní. Abychom tuto volbu aspoň z části motivovali, předpokládejme na chvíli, že E je množina základního systému, o kterém jsme mluvili v úvodu k této části a navíc $A \subset E$ (např. obdélník obsahující A). Potom rovnost $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ platí, právě když $\mu^*(A) = \mu^*(E) - \mu^*(E \cap A^c)$. Rozdíl $\mu^*(E) - \mu^*(E \cap A^c)$ bychom mohli interpretovat jako *vnitřní míru* množiny A. Z tohoto pohledu μ^*-měřitelnost A vyjadřuje „rozumné chování" množiny A, totiž shodu mezi vnitřní a vnější mírou A. Důvod, proč od nadmnožiny základního systému přecházíme k libovolné množině $E \subset X$, je, že zúžením vnější míry μ^* na systém μ^*-měřitelných množin, získáme úplnou míru, jak dokážeme v následující větě.

Věta 4.35 (Carathéodory)**:** Buď μ^* vnější míra na X a $\mathcal{M}^* := \{A \subset X \mid A \text{ je } \mu^*\text{-měřitelná}\}$. Potom $\mathcal{M}^*$ je σ-algebra na X a $\mu := \mu^* \restriction \mathcal{M}^*$ úplná míra na X.

Důkaz. 1) Abychom ověřili, že $\mathcal{M}^*$ je σ-algebra, ukážeme nejdříve, že $\mathcal{M}^*$ je algebra, a poté že je uzavřená na spočetná sjednocení po dvou disjunktních množin. Systém $\mathcal{M}^*$ je neprázdný, neboť $\emptyset \in \mathcal{M}^*$. Dále z definice μ^*-měřitelnosti je jasné, že A je μ^*-měřitelná, právě když A^c je μ^*-měřitelná, a proto je $\mathcal{M}^*$ uzavřený na doplňky.

Ukážeme uzavřenost $\mathcal{M}^*$ na konečná sjednocení. Nechť $A, B \in \mathcal{M}^*$ a $E \subset X$. Potom

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)\\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c).\end{aligned}$$

Protože $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$, vyplývá ze subadivity μ^*, že

$$\mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B))$$

a odtud dále

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) \\ &= \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c). \end{aligned}$$

To znamená, že $A \cup B \in \mathcal{M}^*$ a $\mathcal{M}^*$ je tudíž algebra. Navíc je-li $A \cap B = \emptyset$, máme

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

neboli μ^* je aditivní na algebře $\mathcal{M}^*$.

2) Dále ověříme, že $\mathcal{M}^*$ je uzavřený na spočetná sjednocení posloupnosti po dvou disjunktních množin. Nechť tedy je $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}^*$ posloupnost po dvou disjunktních množin. Označme si

$$B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad \text{a} \quad B := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Potom pro lib. $E \subset X$ a $n \geq 2$ platí

$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}),$$

z čehož indukcí vyplývá, že

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap A_k)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože je $B_n \in \mathcal{M}^*$, dostáváme z poslední rovnice a také z monotonie vnější míry μ^*, že

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap B^c)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pošleme-li $n \to \infty$, vyvodíme odtud a ze spočetné subadivity μ^*, že

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^* \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E \cap A_k \right) + \mu^*(E \cap B^c) \\ &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E). \end{aligned}$$

Z toho plyne, že $B \in \mathcal{M}^*$, a tedy $\mathcal{M}^*$ je σ-algebra. Navíc protože všechny nerovnosti v posledním výpočtu platí jako rovnosti, dostáváme speciálně, že

$$\mu^*(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap B^c)$$

pro každé $E \subset X$. Položíme-li $E = B$, vyvodíme rovnost

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu^*(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_k) + \mu^*(B \cap B^c) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

To znamená, že μ^* je σ-aditivní na $\mathcal{M}^*$, a proto je $\mu := \mu^* \restriction \mathcal{M}^*$ míra.

3) K dokončení důkazu zbývá ověřit úplnost míry μ. Předpokládejme, že $A \in \mathcal{M}^*$ taková, že $\mu(A) = 0$. Buď $B \subset A$ Potom je $\mu^*(B) \leq \mu^*(A) = \mu(A) = 0$, tedy $\mu^*(B) = 0$. Dále pro lib. $E \subset X$ vyplývá z vlastností vnější míry μ^*, že

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \leq \mu^*(B) + \mu^*(E \cap B^c) = \mu^*(E \cap B^c) \leq \mu^*(E),$$

z čehož plyne, že $B \in \mathcal{M}^*$. □

První aplikací Carathéodoryho věty bude konstrukce míry z tzv. *pramíry* (premeasure), což je „míra na algebře“. Tuto konstrukci využijeme hned v následující části k definici Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}$.

Definice 4.36 (Pramíra, konečná a σ-konečná pramíra)**:** Nechť $\mathcal{A} \subset 2^X$ je algebra na X. Množinovou funkci $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ splňující

1. $\mu_0(\emptyset) = 0$,
2. je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ posloupnost po dvou disjunktních množin taková, že $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, potom
$$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n),$$

nazýváme *pramíra* na X. Pojmy *konečná* resp. *σ-konečná* pramíra se definují stejně jako pro míry.

Poznámka: Všimněte si, že pramíra je konečně aditivní, tzn., že pro po dvou disjunktní množiny $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ platí

$$\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu_0(A_j),$$

neboť stačí položit $A_j := \emptyset$ pro $j > n$ a aplikovat vlastnosti 1. a 2. Odtud také plyne, že pro $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ platí $\mu_0(A) \leq \mu_0(B)$, protože $\mu_0(B) = \mu_0(A) + \mu_0(B \setminus A) \geq \mu_0(A)$. Uvědomte si, že $B \setminus A = B \cap A^c \in \mathcal{A}$, jak plyne z vlastností algebry $\mathcal{A}$.

Pramíra μ_0 na algebře $\mathcal{A}$ jistě vyhovuje předpokladům Věty 4.33 (kde $\mathcal{E} = \mathcal{A}$ a $\rho = \mu_0$), a proto je vztahem

$$\mu^*(E) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) \;\middle|\; \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \text{ a } E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \tag{37}$$

definována vnější míra na X. Tato vnější míra má navíc následující vlastnosti.

Lemma 4.37: Nechť $\mathcal{A} \subset 2^X$ je algebra, μ_0 pramíra na $\mathcal{A}$ a μ^* vnější míra definovaná vztahem (37). Potom platí:

1. $\mu^* \restriction \mathcal{A} = \mu_0$,
2. $(\forall A \in \mathcal{A})(A$ je μ^*-měřitelná$)$.

Důkaz. 1. Buď $E \in \mathcal{A}$ a $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ taková, že $E \subset \cup_{n=1}^\infty A_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$B_n := E \cap \left(A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \right).$$

Potom jsou $B_n \in \mathcal{A}$ z vlastností algebry $\mathcal{A}$ a navíc $B_n \cap B_m = \emptyset$ pro $m \neq n$. Dále je

$$\bigcup_{n=1}^\infty B_n = E \cap \bigcup_{n=1}^\infty A_n = E \in \mathcal{A}.$$

Proto plyne z 2. vlasnosti pramíry, že $\mu_0(E) = \sum_{n=1}^\infty \mu_0(B_n)$. Využijeme-li ještě toho, že $\mu_0(B_n) \leq \mu_0(A_n)$, neboť $B_n \subset A_n$, získáme nerovnost

$$\mu_0(E) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu_0(A_n),$$

ze které plyne $\mu_0(E) \leq \mu^*(E)$.

Opačná nerovnost $\mu^*(E) \leq \mu_0(E)$ platí triviálně, neboť v definici (37) stačí vzít $A_1 := E$ a $A_n := \emptyset$ pro $n \geq 2$. Celkem jsme tedy ukázali, že $(\forall E \in \mathcal{A})(\mu^*(E) = \mu_0(E))$, což je 1. tvrzení.

2. Buďte $A \in \mathcal{A}$ a $E \subset X$. Z vlastností infima vyplývá, že pro libovolné $\epsilon > 0$ existuje posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ taková, že $E \subset \cup_{n=1}^\infty A_n$ a

$$\sum_{n=1}^\infty \mu_0(A_n) \leq \mu^*(E) + \epsilon.$$

Potom z aditivity μ_0 na $\mathcal{A}$ dostaneme

$$\mu^*(E) + \epsilon \geq \sum_{n=1}^\infty \mu_0(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^\infty \mu_0(A_n \cap A^c) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Jelikož je $\epsilon > 0$ libovolné, vyplývá odtud, že $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, neboli A je μ^*-měřitelná. ☐

Následující věta ukazuje, jak pramíra určuje míru a shrnuje její vlastnosti. Její důkaz využívající Carathéodoryho Věty 4.35 nalezli nezávisle na sobě matematici H. Hahn a A. Kolmogorov, avšak původní objev této věty je připisován M. R. Fréchetovi.

Věta 4.38: Nechť $\mathcal{A} \subset X$ je algebra, μ_0 pramíra na $\mathcal{A}$ a μ^* vnější míra definovaná vztahem (37). Potom platí:

1. Množinová funkce $\mu := \mu^* \upharpoonright \mathcal{M}$, kde $\mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ je σ-algebra generovaná $\mathcal{A}$, je míra na X taková, že $\mu \upharpoonright \mathcal{A} = \mu_0$.

2. Je-li ν další míra na $\mathcal{M}$ taková, že $\nu \upharpoonright \mathcal{A} = \mu_0$, potom $(\forall E \in \mathcal{M})(\nu(E) \leq \mu(E))$. Pokud je navíc $\mu(E) < \infty$, platí dokonce rovnost $\nu(E) = \mu(E)$.

3. Je-li μ_0 σ-konečná pramíra, potom je μ jediná míra na $\mathcal{M}$ taková, že $\mu \upharpoonright \mathcal{A} = \mu_0$.

Důkaz. 1. Označme $\mathcal{M}^*$ σ-algebru μ^*-měřitelných množin, viz Věta 4.35. Podle Lemma 4.37 je $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}^*$, a proto je podle Lemma 4.7 také $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*$. Carathéodoryho Věta 4.35 říká, že $\bar{\mu} := \mu^* \upharpoonright \mathcal{M}^*$ je míra na $(X, \mathcal{M}^*)$, a proto také $\mu := \mu^* \upharpoonright \mathcal{M} = \bar{\mu} \upharpoonright \mathcal{M}$, jakožto míra zúžená na σ-algebru $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*$, musí být μ míra na $(X, \mathcal{M})$. Nakonec aplikujeme-li 1. tvrzení Lemma 4.37, dostaneme pro lib. $A \in \mathcal{A}$ rovnost $\mu_0(A) = \mu^*(A) = \mu(A)$, což implikuje, že $\mu \upharpoonright \mathcal{A} = \mu_0$.

2. Nechť ν je míra na $(X, \mathcal{M})$ taková, že $\nu \upharpoonright \mathcal{A} = \mu_0$. Buď $E \in \mathcal{M}$ a $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ taková, že $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Potom z monotonie a subaditivity míry ν plyne

$$\nu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Přechodem k infimu přes množiny $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ takové, že $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ odtud vyvodíme

$$\nu(E) \leq \mu^*(E) = \mu(E). \tag{38}$$

Položíme-li $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ pro $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, vyplývá ze spojitosti měr ν a μ zdola, že

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \mu(A). \tag{39}$$

Pokud je $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) < \infty$, lze z definice infima najít k libovolnému $\epsilon > 0$ posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ takovou, že $E \subset A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$

$$\mu(E) + \epsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq \mu(A),$$

neboli $\mu(A \setminus E) = \mu(A) - \mu(E) \leq \epsilon$. Uvědomte si, že v poslední rovnosti využíváme předpoklad $\mu(E) < \infty$. Potom z již dokázané nerovnosti (38) a rovnosti (39) vyplývá, že

$$\mu(E) \leq \mu(A) = \nu(A) = \nu(E) + \nu(A \setminus E) \leq \nu(E) + \mu(A \setminus E) \leq \nu(E) + \epsilon.$$

Jelikož bylo $\epsilon > 0$ voleno libovolně, dostáváme $\mu(E) \leq \nu(E)$. Tudíž $\mu(E) = \nu(E)$ pro $E \in \mathcal{M}$ splňující $\mu(E) < \infty$.

3. Předpokládejme opět, že ν je míra na $(X, \mathcal{M})$ taková, že $\nu \upharpoonright \mathcal{A} = \mu_0$ a že μ_0 je σ-konečná pramíra. Potom existuje $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ tak, že

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{a} \quad (\forall n \in \mathbb{N})(\mu_0(A_n) = \mu(A_n) = \nu(A_n) < \infty).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že množiny z $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ jsou po dvou disjunktní, jinak bychom vzali $\tilde{A}_n := A_n \setminus \cup_{j=1}^{n-1} A_j$. Potom pro $E \in \mathcal{M}$ dostaneme s využitím již dokázaného bodu 2. a σ-aditivity měr rovnost

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E \cap A_n) = \nu(E).$$

A tedy $\mu = \nu$. $\square$

Čtenář si mohl v důkazu Věty 4.38 všimnout, že daná pramíra μ_0 na algebře $\mathcal{A}$ určuje dvě míry: $\mu = \mu^* \restriction \mathcal{M}$ a $\bar{\mu} = \mu^* \restriction \mathcal{M}^*$. Značení $\overline{\mu}$ jsme také použili pro zúplnění míry μ. Je-li μ_0 σ-konečná pramíra, je skutečně $\overline{\mu}$ zúplněním míry μ.

Věta 4.39: Nechť $\mathcal{A} \subset X$ je algebra, μ_0 σ-konečná pramíra na $\mathcal{A}$ a μ^* vnější míra definovaná vztahem (37). Potom je míra $\bar{\mu} := \mu^* \restriction \mathcal{M}^*$ zúplnění míry $\mu := \mu^* \restriction \mathcal{M}$.

Důkaz. Podle Věty 4.30 stačí dokázat, že $\mathcal{M}^* = \overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F \mid E \in \mathcal{M}, F \subset N \in \mathcal{N}\}$. K tomu použijeme následující pomocné tvrzení, jehož důkaz je přenechán čtenáři jako Cvičení 4.3. Označme $\mathcal{A}_\sigma$ systém spočetných sjednocení množin z $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ systém spočetných průniků množin z $\mathcal{A}_\sigma$.

Lemma 4.40: Je-li μ_0 σ-konečná pramíra na algebře $\mathcal{A}$, potom

$$E \in \mathcal{M}^* \quad \Leftrightarrow \quad (\exists B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}, E \subset B)(\mu^*(B \setminus E) = 0).$$

Dokážeme inkluzi $\mathcal{M}^* \subset \overline{\mathcal{M}}$. Nechť $G \in \mathcal{M}^*$. Potom $G^c \in \mathcal{M}^*$ a podle Lemma 4.40 existuje $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, $G^c \subset B$ a $\mu^*(B \setminus G^c) = \mu(B \cap G) = 0$. Jelikož je $\mathcal{M}$ σ-algebra obsahující $\mathcal{A}$, také $\mathcal{A}_{\sigma\delta} \subset \mathcal{M}$. Označme $E := B^c \in \mathcal{M}$ a $F := G \cap B$. Potom je $G = E \cup F$ a G tedy bude v $\overline{\mathcal{M}}$, najdeme-li μ-nulovou nadmnožinu $N \supset F$.

Aplikujme Lemma 4.40 ještě jednou tentokrát na množinu G. Potom existuje $C \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, $G \subset C$ a $\mu^*(C \setminus G) = 0$. Položíme-li $N := B \cap C$, bude

$$F = G \cap B \subset C \cap B = N,$$

a protože $G \in \mathcal{M}^*$, platí také

$$\mu(N) = \mu^*(B \cap C) = \mu^*(B \cap C \cap G) + \mu^*(B \cap C \cap G^c) = \mu^*(B \cap G) + \mu^*(C \setminus G) = 0.$$

Dokážeme opačnou inkluzi $\overline{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}^*$. Nechť $G \in \overline{\mathcal{M}}$. Potom $G = E \cup F$ pro nějaká $E \in \mathcal{M}$ a $F \subset N \subset \mathcal{N}$. Jelikož $E \cup N \in \mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*$, existuje podle Lemma 4.40 množina $D \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tak, že $E \cup N \subset D$ a $\mu^*(D \setminus (E \cap N)) = 0$. Dále z μ^*-měřitelnosti množiny $E \cup N$ vyvodíme, že

$$\begin{aligned}\mu^*(D \setminus G) &= \mu^*((D \setminus G) \cap (E \cup N)) + \mu^*((D \setminus G) \cap (E \cup N)^c) \\ &= \mu^*(N \setminus F) + \mu^*(D \setminus (E \cup N)) \leq \mu(N) + \mu^*(D \setminus (E \cup N)) = 0.\end{aligned}$$

Našli jsme tedy $D \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, $G \subset D$, pro kterou je $\mu^*(D \setminus G) = 0$, což znamená, že $G \in \mathcal{M}^*$ opět podle Lemma 4.40.

$\square$

4.5 Borelovské míry na reálné přímce

Nyní máme vše připravené k tomu, abychom mohli zavést míru na bohatém systému podmnožin $\mathbb{R}$, která intervalům přiřazuje jejich délku. Ve skutečnosti můžeme zkonstruovat bez výraznějších komplikací daleko obecnější třídu tzv. *borelovských měr* na $\mathbb{R}$.

Definice 4.41 (Borelovská míra)**:** Nechť (X, τ) je topologický prostor. Míra μ definovaná na σ-algebře borelovských množin $\mathcal{B}_X$ se nazývá *borelovská míra* na X.

Abychom motivovali následující postup, uvažujme borelovskou míru μ na $\mathbb{R}$ a její tzv. *distribuční funkci* $F(x) := \mu\left((-\infty, x]\right)$. Hodnoty takto definované funkce F nemusí být konečné. Nyní pro jednoduchost předpokládejme, že μ je taková, aby hodnoty F byly v $\mathbb{R}$. Potom F je **neklesající a zprava spojitá** funkce. První vlastnost plyne z monotonie míry μ, viz 1. tvrzení Věty 4.24, neboť pro $x \leq y$ je $(-\infty, x] \subset (-\infty, y]$, a proto $F(x) \leq F(y)$. Druhá vlastnost vyplývá ze spojitosti μ zespodu a Heineho věty, neboť pro lib. $x \in \mathbb{R}$ a nerostoucí posloupnost $\{x_n\}_{n=1} \subset \mathbb{R}$ takovou, že $x_n \to x \in \mathbb{R}$ platí

$$(-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n],$$

a proto $F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n)$. Navíc pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, máme vztah

$$\mu\left((a, b]\right) = F(b) - F(a), \tag{40}$$

protože $(-\infty, b] = (-\infty, a] \cup (a, b]$ a intervaly vpravo jsou disjunktní.

Myšlenka následující konstrukce staví na opačném postupu, kdy k zadané neklesající a zprava spojité funkci F definujeme μ na polouzavřených intervalech $(a, b]$ podle vzorce (40), a poté rozšíříme μ na borelovskou míru aplikací obecné teorie. Je-li speciálně $F(x) = x$, bude míra intervalu $(a, b]$ rovna jeho délce $b - a$.

Základní stavební kameny jsou pro nás tedy polouzavřené intervaly $(a, b]$. Bohužel ani systém konečných sjednocení intervalů typu $(a, b]$ ještě není algebra, což představuje jistou technickou komplikaci pro aplikaci obecné konstrukce vycházející z pramíry na algebře. Musíme proto ještě do systému polouzavřených intervalů dodat jejich (polo)nekonečné varianty. Definujeme si tak (elementární) systém

$$\mathcal{E} := \{\emptyset\} \cup \{(a, b] \mid -\infty \leq a < b < \infty\} \cup \{(a, \infty) \mid -\infty \leq a < \infty\}.$$

Množiny systému $\mathcal{E}$ budeme stručně nazývat *p-intervaly* („polouzavřené/polootevřené“ intervaly).

Věta 4.42: Nechť $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesající zprava spojitá funkce, $\mathcal{E}$ systém p-intervalů a $\mathcal{A}$ systém konečných sjednocení po dvou disjunktních množin z $\mathcal{E}$. Definujme $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ následujícím způsobem:

0. $$\mu_0(\emptyset) := 0.$$

1.

$$\mu_0((a,b]) := F(b) - F(a), \qquad -\infty \le a < b < \infty,$$
$$\mu_0((a,\infty)) := F(\infty) - F(a), \qquad -\infty \le a < \infty,$$

kde používáme značení $F(\pm\infty) := \lim_{x\to\pm\infty} F(x)$.

2. Nakonec pro $n \in \mathbb{N}$ a po dvou disjunktní p-intervaly $I_1, \dots, I_n \in \mathcal{E}$ položíme

$$\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) := \sum_{j=1}^{n} \mu_0(I_j).$$

Potom $\mathcal{A}$ je algebra a μ_0 je pramíra na $\mathcal{A}$.

Poznámka: V definici μ_0 se vyskytují limity $F(\pm\infty) := \lim_{x\to\pm\infty} F(x)$, jejichž existence je zaručena monotonií F. Může se stát, že $F(-\infty) = -\infty$ nebo $F(-\infty) = +\infty$, a proto je třeba rozšířit aritmetiku počítání s $\pm\infty$. Aritmetiku s $\pm\infty$ rozšiřujeme přirozeně v případech, kdy mají výrazy dobrý smysl, např. $-1 \cdot \infty = -\infty$, $\infty - (-\infty) = \infty$, $\infty - x = \infty$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, atp. Rozmyslete si, že výrazy $\infty - \infty$, nebo $-\infty + \infty$, které nemají dobrý smysl, se v definici μ_0 nevyskytují!

Důkaz Věty 4.42. Je jednoduché ověřit, že $\mathcal{E}$ je elementární systém podle Definice 4.15. Potom podle Lemma 4.16 je systém $\mathcal{A}$ konečných sjednocení po dvou disjunktních množin z $\mathcal{E}$ algebra. Zbývá dokázat, že μ_0 je pramíra na $\mathcal{A}$. Důkladné ověření tohoto tvrzení je místy trochu těžkopádné a vyžaduje rozsáhlejší diskuzi. Proto některé části, kde se opakuje podobný postup, pouze naznačíme.

Nejdřív je třeba ověřit, že μ_0 je vztahy z tvrzení dobře definovaná na $\mathcal{A}$. Množinu z $\mathcal{A}$ lze totiž rozložit na sjednocení disjunktních množin z $\mathcal{E}$ více různými způsoby. Je-li $(a,b] = \cup_{j=1}^{n}(a_j, b_j]$, kde $(a_1, b_1], \dots, (a_n, b_n]$ jsou po dvou disjunktní, potom po případném přečíslování intervalů $(a_1, b_1], \dots, (a_n, b_n]$ je $-\infty \le a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \dots < b_n = b$. Odtud dostaneme

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^{n} F(b_j) - F(a_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu_0((a_j, b_j]).$$

Podobný závěr dostaneme, rozložíme-li interval typu (a,∞) na konečné sjednocení po dvou disjunktních p-intervalů.

Těmito úvahami zjistíme, že pro p-interval J a po dvou disjunktní p-intervaly $I_1, \dots, I_n$ takové, že $J \subset \cup_{j=1}^{n} I_j$ platí

$$\mu_0(J) = \sum_{j=1}^{n} \mu_0(J \cap I_j).$$

Nakonec jsou-li $I_1, \dots, I_n \in \mathcal{E}$ a $J_1, \dots, J_m \in \mathcal{E}$ po dvou disjunktní takové, že $\cup_{j=1}^{n} I_j = \cup_{k=1}^{m} J_k$, potom

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_0(I_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \mu_0(I_j \cap J_k) = \sum_{k=1}^{m} \mu_0(J_k),$$

neboli

$$\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) = \mu_0\left(\bigcup_{k=1}^{m} J_k\right).$$

Tudíž μ_0 je dobře definovaná na $\mathcal{A}$ a taktéž je z definice jasné, že μ_0 je konečně aditivní na $\mathcal{A}$.

K tomu, abychom dokázali, že μ_0 je pramíra, zbývá ověřit, že je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}$ taková, že $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, potom $\mu_0(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$. Tento problém si nejprve mírně zjednodušíme. Za prvé protože je každá z množin A_n sjednocením konečně mnoha po dvou disjunktních p-intervalů a μ_0 je konečně aditivní, stačí uvažovat posloupnost $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ neprázdných p-intervalů z $\mathcal{E}$ takových, že $\cup_{n=1}^{\infty} I_n \in \mathcal{A}$ a ověřit rovnost

$$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{n} I_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(I_n). \tag{41}$$

Navíc místo $\cup_{n=1}^{\infty} I_n \in \mathcal{A}$ stačí předpokládat, že $\cup_{n=1}^{\infty} I_n \in \mathcal{E}$, neboť je-li $\cup_{n=1}^{\infty} I_n$ sjednocením N po dvou disjunktních p-intervalů $J_1, \dots J_N$, můžeme rozložit $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ na N podposloupností p-intervalů, jejichž sjednocením dostaneme jednotlivé množiny $J_1, \dots J_N$. Potom již stačí využít konečné aditivity μ_0. Rovnost (41) dokážeme jako dvě nerovnosti.

1) Nerovnost $(\geq)$: Označme $I := \cup_{n=1}^{\infty} I_n$. Jelikož je $I \in \mathcal{A}$ a $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$, jsou také množiny $\cup_{j=1}^{n} I_j$ a $I \setminus \cup_{j=1}^{n} I_j$ z $\mathcal{A}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, protože $\mathcal{A}$ je algebra. Z konečné aditivity μ_0 na $\mathcal{A}$ vyplývá, že

$$\mu_0(I) = \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) + \mu_0\left(I \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) \geq \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu_0(I_j)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pošleme-li $n \to \infty$, dostáváme nerovnost

$$\mu_0(I) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j).$$

2) Nerovnost $(\leq)$: Předpokládejme nejdřív, že $I = (a, b]$ a je omezený, tj. $a, b \in \mathbb{R}$. Potom jsou $I_j = (a_j, b_j]$ pro nějaká $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$. Zvolme $\epsilon > 0$. Protože je F zprava spojitá,

$$(\exists \delta > 0)\,(F(a + \delta) - F(a) < \epsilon) \tag{42}$$

a také

$$(\forall j \in \mathbb{N})(\exists \delta_j > 0)\left(F(b_j + \delta_j) - F(b_j) < \frac{\epsilon}{2^j}\right). \tag{43}$$

Jelikož

$$[a + \delta, b] \subset (a, b] = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j + \delta_j),$$

je $\{(a_j, b_j + \delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ otevřené pokrytí kompaktního intervalu $[a + \delta, b]$, a tudíž musí obsahovat konečné podpokrytí. Vynecháním intervalů, které jsou obsaženy v jiných, a případným přečíslováním intervalů konečného pokrytí najdeme $m \in \mathbb{N}$ a intervaly $(a_1, b_1+\delta_1), \dots, (a_m, b_m+\delta_m)$ pokrývající $[a + \delta, b]$ takové, že

$$b_j + \delta_j \in (a_{j+1}, b_{j+1} + \delta_{j+1}).$$

pro každé $j \in \{1, \dots, m - 1\}$.

Potom s využitím monotonie F a nerovností (42) a (43) dostaneme

$$\begin{aligned}
\mu_0(I) = F(b) - F(a) < F(b) - F(a + \delta) + \epsilon \le F(b_m + \delta_m) - F(a_1) + \epsilon \\
= F(b_m + \delta_m) - F(a_m) + \sum_{j=1}^{m-1} (F(a_{j+1}) - F(a_j)) + \epsilon \\
\le F(b_m + \delta_m) - F(a_m) + \sum_{j=1}^{m-1} (F(b_j + \delta_j) - F(a_j)) + \epsilon \\
= \sum_{j=1}^{m} (F(b_j + \delta_j) - F(a_j)) + \epsilon < \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{\epsilon}{2^j} + F(b_j) - F(a_j) \Big) + \epsilon \\
< \sum_{j=1}^{m} (F(b_j) - F(a_j)) + 2\epsilon \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j) + 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Protože bylo $\epsilon > 0$ voleno libovolně, dostáváme kýženou nerovnost $\mu_0(I) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j)$ pro případ $I = (a, b]$ s $a > -\infty$.

Je-li $a = -\infty$, postupujeme jako v předchozím případě a najdeme konečné pokrytí kompaktního intervalu $[-M, b]$ intervaly $(a_j, b_j + \delta_j)$ pro lib. $M > 0$ dostatečně velké ($-M < b$). Analogicky dojdeme k závěru, že

$$F(b) - F(-M) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j) + 2\epsilon$$

pro libovolné $M > 0$ a $\epsilon > 0$. Pošleme-li $M \to \infty$ a $\epsilon \to 0+$, dokážeme kýženou nerovnost

$$\mu_0\left((-\infty, b]\right) = F(b) - F(-\infty) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j).$$

Pokud je $I = (a, \infty)$ s $a > -\infty$ aplikujeme opět podobný postup tentokrát s kompaktním intervalem $[a + \delta, M]$ a lib. $M > 0$ dostatečně velkým. Dojdeme k nerovnosti

$$F(M) - F(a) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j) + 2\epsilon$$

a limitním přechodem $M \to \infty$ a $\epsilon \to 0+$ získáme kýženou nerovnost. Nakonec i v případě $I = \mathbb{R}$ lze postupovat analogicky k odvození nerovnosti

$$F(M) - F(-M) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j) + 2\epsilon$$

platné pro každé $M > 0$ a $\epsilon > 0$ a limitním přechodem $M \to \infty$ a $\epsilon \to 0+$ dokončíme důkaz. $\square$

Nyní již je vše připravené pro aplikaci obecné konstrukce míry z pramíry na algebře vyložené ve Větě 4.38.

Věta 4.43: Nechť $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesající a zprava spojitá. Potom platí:

1. Existuje právě jedna borelovská míra μ_F na $\mathbb{R}$ taková, že $\mu_F \restriction \mathcal{E} = \mu_0$. Speciálně platí

$$\mu_F\left((a,b]\right) = F(b) - F(a).$$

   pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

2. Je-li $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neklesající a zprava spojitá funkce, potom

$$\mu_F = \mu_G \quad \Leftrightarrow \quad F - G \text{ je konstantní.}$$

3. Naopak je-li μ borelovská míra na $\mathbb{R}$ taková, že $(\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ omezená})(\mu(B) < \infty)$ a definujeme

$$F(x) := \begin{cases} \mu((0,x]), & \text{je-li } x > 0, \\ 0, & \text{je-li } x = 0, \\ -\mu((x,0]), & \text{je-li } x < 0, \end{cases}$$

   potom je F neklesající zprava spojitá funkce a $\mu_F = \mu$.

Důkaz. 1. Podle Věty 4.42 je μ_0 pramíra na algebře $\mathcal{A}$, a tudíž určuje vnější míru μ^* vztahem (37). Podle Věty 4.38 je $\mu := \mu^* \restriction \mathcal{M}(\mathcal{A})$ míra. Ukážeme, že $\mu = \mu_F$. Protože $\mu \restriction \mathcal{A} = \mu_0$, máme pro lib. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, vztah

$$\mu((a,b]) = \mu_0((a,b]) = F(b) - F(a).$$

Dále $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, a proto $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ podle Lemma 4.7. Opačná inkluze $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \supset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ je důsledek Věty 4.9 a opět Lemma 4.7. Tedy $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, což znamená, že μ je borelovská míra.

Nakonec dokážeme jednoznačnost. Je-li μ_F borelovská míra taková, že $\mu_F \restriction \mathcal{E} = \mu_0$, pak z aditivity míry plyne, že také $\mu_F \restriction \mathcal{A} = \mu_0$. Jednoznačnost je nyní důsledkem 3. tvrzení Věty 4.38, neboť pramíra μ_0 je σ-konečná. Stačí uvážit např. rozklad

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1] = \mathbb{R},$$

pro který je $\mu_0((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$.

2. Pokud $\mu_F = \mu_G$, máme pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, rovnost $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$, ze které speciálně plyne, že

$$F(x) - G(x) = F(0) - G(0)$$

kdykoliv $x > 0$, nebo $x < 0$ a triviálně pro $x = 0$. Tedy poslední rovnost platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$, neboli $F - G$ je konstantní funkce.

Naopak je-li $F - G$ konstantní funkce, určují F i G tutéž pramíru μ_0, jak plyne z definice μ_0 z Věty 4.42. Tudíž $\mu_F = \mu^* \restriction \mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mu_G$.

3. Důkaz jen naznačíme, detailní ověření je přenecháno čtenáři jako Cvičení 4.6. Jelikož je μ konečná na omezených borelovských podmnožinách $\mathbb{R}$, má funkce F pouze reálné hodnoty, tedy $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Monotonie F plyne z monotonie míry μ a spojitost F zprava na $[0, \infty)$ resp. na $(-\infty, 0]$ plyne ze spojitosti μ shora resp. zdola, viz Věta 4.24. Nakonec si stačí rozmyslet, že $\mu = \mu_F$ na $\mathcal{A}$, a proto $\mu = \mu_F$ podle 3. tvrzení Věty 4.38. $\square$

Poznámka:

1. Naprosto analogickou teorii bychom vybudovali, kdybychom začali s intervaly typu $[a, b)$ a zleva spojitými neklesajícími funkcemi F.

2. Distribuční funkce $F_\mu(x) := \mu((-\infty, x])$ se obvykle definuje pro borelovské míry μ, pro které je $\mu((-\infty, x]) < \infty$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tedy např. pro konečné borelovské míry. V takovém případě se distribuční funkce F_μ liší od funkce F z 3. tvrzení Věty 4.43 o konstantu $\mu((-\infty, 0])$, přesněji $F_\mu - F = \mu((-\infty, 0])$.

Zastavme se ještě na chvíli u Věty 4.43. Ke každé neklesající a zprava spojité funkci F dokážeme zkonstruovat borelovskou míru μ_F, která přiřazuje intervalům $(a, b]$ hodnotu $F(b) - F(a)$. Taková míra je mezi borelovskými jediná a navíc je jasné, že je μ_F konečná na omezených borelovských podmnožinách $\mathbb{R}$. Naopak ke každé borelovské míře μ na $\mathbb{R}$, která je konečná na omezených borelovských množinách, existuje neklesající zprava spojitá funkce F taková, že $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$. Dostáváme tak *téměř* vzájemně jednoznačný vztah mezi množinami:

$$\{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid F \text{ neklesající a zprava spojitá}\}$$

a

$$\{\mu \text{ borelovská míra na } \mathbb{R} \mid (\forall B \in \mathcal{B}_\mathbb{R} \text{ omezená})(\mu(B) < \infty)\}.$$

Vztah je *téměř* vzájemně jednoznačný, protože μ určuje F až na posunutí o konstantu. To bychom mohli spravit tak, že bychom do první z množin přidali např. požadavek $F(0) = 0$ (jako je to ve 3. tvrzení Věty 4.43), pak bychom už měli vzájemně jednoznačný vztah.

Už definiční obor $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ míry μ_F je velice bohatý systém. Míru μ_F lze ovšem ještě zúplnit podle Věty 4.30 a tím ji ještě dále rozšířit. Definiční obor tohoto rozšíření $\overline{\mu}_F$ může skutečně být významně větší než $\mathcal{B}_\mathbb{R}$, ale důkaz příslušného tvrzení vyžaduje hlubší poznatky z teorie množin. Naznačíme to na konci této části pro případ Lebesgueovy míry.

Definice 4.44 (Lebesgueova–Stieltjesova míra)**:** Nechť $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesající zprava spojitá funkce. Míru $\mu = \overline{\mu}_F$, která je zúplněním míry μ_F z Věty 4.43, nazýváme *Lebesgueova–Stieltjesova míra* na $\mathbb{R}$ asociovaná s F; σ-algebru, na níž je μ definovaná, označíme $\mathcal{M}_\mu$.

Definice 4.45 (Lebesgueova míra, lebegueovsky měřitelná množina)**:** Lebesgueovu–Stieltjesovu míru asociovanou s funkcí $F = \mathrm{id}$, tj. $(\forall x \in \mathbb{R})(F(x) = x)$, nazýváme *Lebesgueova míra* na $\mathbb{R}$ a značíme m. Množiny σ-algebry $\mathcal{L} := \mathcal{M}_m$ se nazývají *lebesgueovsky měřitelné.*

Poznámka: Z Věty 4.39 vyplývá, že množina $E \subset \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná, právě když je m^*-měřitelná, tj. $(\forall A \subset \mathbb{R})(m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c))$. Henri Lebesgue původně také nejprve definoval vnější míru m^*, ale (lebesgueovskou) měřitelnost množiny $E \subset \mathbb{R}$ definoval trochu jinak, než jsme to udělali my. Totiž omezenou množinu E nazval měřitelnou, pokud $m^*(E) + m^*((a, b) \setminus E) = b - a$ pro každý interval (a, b) obsahující E a neomezenou množinu E nazval měřitelnou, právě když každý průnik E s omezeným intervalem byla měřitelná množina. Ačkoliv to není ihned patrné, tyto dvě definice lebegueovské měřitelnosti jsou ekvivalentní, což lze ověřit s využitím výsledku Cvičení 4.5.

Lebesgue–Stieltjesovy míry jsou v jistém smyslu regulární, to znamená, že mají určité pěkné vlastnosti, které nejsou automatické ani pro borelovské míry (viz Věta 4.47 dále). Dokázat tuto regularitu bude náš další cíl. Z konstrukce Lebesgueovy–Stieltjesovy míry μ na $\mathbb{R}$ a Věty 4.39 plyne pro každé $E \in \mathcal{M}_\mu$ rovnost

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \;\middle|\; \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}, \tag{44}$$

viz (37). Nejprve si dokážeme pomocné tvrzení, že ve vzorci (44) stačí místo množin $A_n \in \mathcal{A}$ uvažovat intervaly typu $(a, b]$, nebo alternativně otevřené intervaly (a, b), kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Lemma 4.46: Nechť μ je Lebesgueova–Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$. Potom pro každé $E \in \mathcal{M}_\mu$ platí:

1. $$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left((a_n, b_n]\right) \;\middle|\; E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \right\},$$

2. $$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left((a_n, b_n)\right) \;\middle|\; E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \right\}.$$

Důkaz. Nechť $E \in \mathcal{M}_\mu$.

1. Systém p-intervalů se rozkládá $\mathcal{E} = \{\emptyset\} \cup \mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_{II} \cup \mathcal{E}_{III}$, kde

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_I &:= \{(a, b] \mid -\infty < a < b < \infty\}, \\
\mathcal{E}_{II} &:= \{(a, \infty) \mid -\infty \le a < \infty\}, \\
\mathcal{E}_{III} &:= \{(-\infty, b] \mid -\infty < b < \infty\},
\end{aligned}$$

Pro potřeby důkazu si označíme

$$\mu_{\mathcal{E}}(E) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(I_n)\;\middle|\;\{I_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{E}, E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right\},$$
$$\mu_{\mathcal{E}_I}(E) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(I_n)\;\middle|\;\{I_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{E}_I, E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right\}.$$

Nejprve ukážeme, že v (44) můžeme nahradit algebru $\mathcal{A}$ systémem $\mathcal{E}$, tzn. rovnost $\mu(E) = \mu_{\mathcal{E}}(E)$. Z inkluze $\mathcal{E}\subset\mathcal{A}$ plyne $\mu(E)\le\mu_{\mathcal{E}}(E)$. Dále předpokládejme, že $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{A}$ je posloupnost taková, že $E\subset\cup_{n=1}^{\infty}A_n$. Každá množina A_n je konečné sjednocení po dvou disjunktních množin z $\mathcal{E}$, označme je $\{I_j^{(n)}\}_{j=1}^{N_n}\subset\mathcal{E}$, kde $N_n\in\mathbb{N}$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N_n}\mu\left(I_j^{(n)}\right)\ge\mu_{\mathcal{E}}(E),$$

protože $E\subset\cup_{n=1}^{\infty}\cup_{j=1}^{N_n}I_j^{(n)}$. Z poslední nerovnosti a z (44) plyne, že $\mu(E)\ge\mu_{\mathcal{E}}(E)$.

Dále ukážeme, že místo $\mathcal{E}$ lze vzít dokonce jen $\mathcal{E}_I$, tj. ověříme rovnost $\mu_{\mathcal{E}}(E) = \mu_{\mathcal{E}_I}(E)$. Z inkluze $\mathcal{E}_I\subset\mathcal{E}$ vyplývá nerovnost $\mu_{\mathcal{E}}(E)\le\mu_{\mathcal{E}_I}(E)$. Naopak nechť je $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{E}$ taková, že $E\subset\cup_{n=1}^{\infty}I_n$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $I_n\ne\emptyset$ pro každé $n\in\mathbb{N}$. Každý p-interval I_n, který je z $\mathcal{E}_{II}$, tedy $I_n = (a_n,\infty)$, je spočetným sjednocením po dvou disjunktních intervalů z $\mathcal{E}_I$, např.

$$(a_n,\infty) = \begin{cases}\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_n+j-1, a_n+j], & \text{je-li } a_n > -\infty,\\ \displaystyle\bigcup_{j=-\infty}^{\infty}(j-1, j], & \text{je-li } a_n = -\infty.\end{cases}$$

Podobně každý p-interval I_n, který je z $\mathcal{E}_{III}$, tedy $I_n = (-\infty, b_n]$, je spočetným sjednocením po dvou disjunktních intervalů z $\mathcal{E}_I$, např.

$$(-\infty, b_n] = \bigcup_{j=1}^{\infty}(b_n-j-1, b_n-j+1].$$

To znamená, že ke každému $I_n\in\mathcal{E}$ existuje nejvýše spočetný systém po dvou disjunktních intervalů z $\mathcal{E}_I$, označme jej $\{I_j^{(n)}\}_j$ (bez specifikace rozsahu pro index j pro jednoduchost), tak, že $I_n = \cup_j I_j^{(n)}$. Z tohoto pozorování odvodíme nerovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(I_n) = \sum_{n,j}\mu\left(I_j^{(n)}\right)\ge\mu_{\mathcal{E}_I}(E),$$

což implikuje $\mu_{\mathcal{E}}(E)\ge\mu_{\mathcal{E}_I}(E)$. Celkem tedy máme $\mu(E) = \mu_{\mathcal{E}_I}(E)$, což jsme chtěli dokázat.

2. Označme si

$$\nu(E) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left((a_n,b_n)\right) \;\middle|\; E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\right\}.$$

V důkazu použijeme již dokázanou rovnost pro $\mu(E)$ z 1. tvrzení a ukážeme, že $\mu(E)=\nu(E)$.

Nechť $E\subset\cup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$. Každý z intervalů (a_n,b_n) lze napsat jako spočetné sjednocení po dvou disjunktních intervalů z $\mathcal{E}_I$:

$$(a_n,b_n)=\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(c_j^{(n)},c_{j+1}^{(n)}\right],$$

kde $c_1^{(n)}=a_n$ a $\{c_j^{(n)}\}_{j=1}^{\infty}$ je libovolná rostoucí posloupnost taková, že $\lim_{j\to\infty}c_j^{(n)}=b_n$. Odtud dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left((a_n,b_n)\right)=\sum_{n,j=1}^{\infty}\mu\left(\left(c_j^{(n)},c_{j+1}^{(n)}\right]\right)\geq\mu(E),$$

a tudíž $\nu(E)\geq\mu(E)$.

Naopak zvolme pevně $\epsilon>0$. Potom z definice infima plyne existence posloupnosti intervalů $\{(a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ takových, že $E\subset\cup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n]$ a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left((a_n,b_n]\right)\leq\mu(E)+\epsilon.$$

Podle předpokladu je μ Lebesgueova–Stieltjesova míra, a proto existuje neklesající zprava spojitá funkce F taková, že $\mu\left((a_n,b_n]\right)=F(b_n)-F(a_n)$ pro každé $n\in\mathbb{N}$. Ze spojitosti F zprava dále plyne, že

$$(\forall n\in\mathbb{N})(\exists\delta_n>0)\left(F(b_n+\delta_n)-F(b_n)<\frac{\epsilon}{2^n}\right).$$

Potom $E\subset\cup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n+\delta_n)$ a platí

$$\begin{aligned}\nu(E)&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu((a_n,b_n+\delta_n))\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu((a_n,b_n+\delta_n])=\sum_{n=1}^{\infty}\left(F(b_n+\delta_n)-F(a_n)\right)\\&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\epsilon}{2^n}+F(b_n)-F(a_n)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left((a_n,b_n]\right)+\epsilon\leq\mu(E)+2\epsilon.\end{aligned}$$

Jelikož jsme $\epsilon>0$ volili libovolně, dostáváme tak druhou nerovnost $\nu(E)\leq\mu(E)$. □

Věta 4.47: Nechť μ je Lebesgueova–Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$. Potom pro každé $E\in\mathcal{M}_\mu$ platí:

1. **Vnější regularita**: $\mu(E)=\inf\{\mu(U)\mid E\subset U$ a U je otevřená$\}$.
2. **Vnitřní regularita**: $\mu(E)=\sup\{\mu(K)\mid K\subset E$ a K je kompaktní$\}$.

Důkaz. Nechť $E \in \mathcal{M}_\mu$.

1. Díky monotonii míry μ platí nerovnost $\mu(E) \leq \mu(U)$ pro každou otevřenou nadmnožinu $U \supset E$. Ukážeme, že je splněna i druhá vlastnost z definice infima. Nechť $\epsilon > 0$. Potom podle 2. tvrzení Lemma 4.46 existuje otevřená množina $U := \cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ tak, že $E \subset U$ a

$$\mu(E) + \epsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu((a_n, b_n)) \geq \mu(U),$$

kde jsme využili subaditivity míry μ. Tím je dokázáno 1. tvrzení.

2. Opět z monotonie míry plyne $\mu(E) \geq \mu(K)$ pro každou kompaktní $K \subset E$, a tedy $\mu(E)$ je horní závora množiny $\{\mu(K) \mid K \subset E \text{ a } K \text{ je kompaktní}\}$. Stačí tedy opět dokázat druhou vlastnost z definice suprema. Zvolme $\epsilon > 0$.

Předpokládejme nejprve, že E je omezená. Je-li E uzavřená, je E kompaktní a dokazovaná rovnost platí. Předpokládejme tedy, že $\overline{E} \setminus E \neq \emptyset$. Podle již dokázané rovnosti z 1. tvrzení existuje otevřená množina $U \supset \overline{E} \setminus E$ taková, že $\mu(\overline{E} \setminus E) + \epsilon \geq \mu(U)$. Z poslední nerovnosti plyne, že $\mu(U) < \infty$, neboť $\overline{E} \setminus E \subset \overline{E}$ je omezená množina, a tudíž $\mu(\overline{E} \setminus E) < \infty$. Položme $K := \overline{E} \setminus U$, potom K je omezená a uzavřená, a tedy kompaktní a navíc $K \subset E$. Protože $E = K \cup (E \cap U)$ a $K \cap (E \cap U) = \emptyset$, můžeme psát

$$\mu(K) = \mu(E) - \mu(E \cap U),$$

kde jsme využili toho, že $\mu(E) < \infty$, což plyne z omezenosti množiny E. Dále máme také disjunktní rozklad $U = (U \cap E) \cup (U \cap E^c) = (U \cap E) \cup (U \setminus E)$, a proto $\mu(U) = \mu(U \cap E) + \mu(U \setminus E)$. Celkem potom dostaneme

$$\mu(K) = \mu(E) - (\mu(U) - \mu(U \setminus E)) \geq \mu(E) - \mu(U) + \mu(\overline{E} \setminus E) \geq \mu(E) - \epsilon,$$

což jsme chtěli dokázat.

Je-li E neomezená, definujeme si omezené po dvou disjunktní množiny $E_n := E \cap (n, n+1]$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. Podle argumentu použitého v předchozím odstavci existuje pro každé $n \in \mathbb{Z}$ kompaktní množina $K_n \subset E_n \subset E$ tak, že

$$\mu(K_n) \geq \mu(E_n) - \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^{|n|+1}}.$$

Položíme-li $H_n := \cup_{j=-n}^{n} K_j$, je H_n kompaktní množina, $H_n \subset E$ a

$$\mu(H_n) = \sum_{j=-n}^{n} \mu(K_j) \geq \sum_{j=-n}^{n} \left(\mu(E_j) - \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^{|j|+1}}\right) \geq \mu\left(\bigcup_{j=-n}^{n} E_j\right) - \frac{\epsilon}{2}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože

$$\mu(E) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \mu(E_j) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=-n}^{n} E_j\right), \tag{45}$$

existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že
$$\mu\left(\bigcup_{j=-n_0}^{n_0} E_j\right) \geq \mu(E) - \frac{\epsilon}{2}$$
za předpokladu, že $\mu(E) < \infty$. V takovém případě jsme k zadanému $\epsilon > 0$ našli kompaktní množinu $K := H_{n_0} \subset E$ takovou, že
$$\mu(K) \geq \mu(E) - \epsilon.$$

Nakonec je-li $\mu(E) = \infty$, vyplývá také z rovnosti (45), že k libovolně velké konstantě $L > 0$ najdeme kompaktní množinu $K := H_{n_0}$ (pro n_0 dostatečně velké) tak, že
$$\mu(K) > L.$$
A to je druhá vlastnost z definice suprema pro případ, že je toto supremum nekonečné. □

Poznámka: Množina E, pro kterou platí první resp. druhá rovnost z Věty 4.47, se nazývá *regulární zvnějšku* resp. *vnitřně* vzhledem k μ. Borelovská míra μ, příp. její zúplnění, se nazývá *regulární*, je-li každá μ-měřitelná množina E regulární zvnějšku i vnitřně vzhledem k μ. Věta 4.47 tedy říká, že Lebesgueovy–Stieltjesovy míry na $\mathbb{R}$ jsou regulární. Platí dokonce následující obecnější tvrzení, viz [23, Věta 2.18]. *Je-li X lokálně kompaktní Hausdorfův prostor (tzn., že každý bod má okolí, jehož uzávěr je kompaktní), ve kterém každá otevřená množina je σ-kompaktní (tzn., že je spočetným sjednocením kompaktních množin) a μ je borelovská míra na X taková, že $\mu(K) < \infty$ pro každou kompaktní množinu $K \subset X$, potom je μ regulární.*

Z konstrukce Lebesgueovy–Stieltjesovy míry μ není jasné, jaké to vlastně jsou množiny, které tvoří σ-algebru $\mathcal{M}_\mu$. Další věta ukazuje, že tyto měřitelné množiny lze vyjádřit pomocí „jednoduchých“ množin (ze systémů G_δ nebo F_σ) až na μ-nulovou opravu.

Věta 4.48: Nechť μ je Lebesgueova–Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$ a $E \subset \mathbb{R}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $E \in \mathcal{M}_\mu$.
2. Existují F_σ-množina H a μ-nulová množina N tak, že $E = H \cup N$.
3. Existují G_δ-množina V a μ-nulová množina N tak, že $E = V \setminus N$.

Důkaz. Je jasné, že tvrzení 2. i 3. implikují 1., neboť z předpokladů tvrzení 2. a 3. plyne, že $V, H, N, \tilde{N} \in \mathcal{M}_\mu$, a proto $E = H \cup N \in \mathcal{M}_\mu$ a také $E = V \setminus \tilde{N} = V \cap \tilde{N}^c \in \mathcal{M}_\mu$.

Dokážeme implikaci $1. \Rightarrow 2.$ Nechť $E \in \mathcal{M}_\mu$ a navíc předpokládejme, že $\mu(E) < \infty$. Podle Věty 4.47 existuje ke každému $n \in \mathbb{N}$ kompaktní množina $K_n \subset E$ taková, že
$$\mu(E) \leq \mu(K_n) + \frac{1}{n}.$$
Položme $H := \cup_{n=1}^{\infty} K_n$. Potom H je F_σ-množina a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí
$$\mu(E) \leq \mu(H) + \frac{1}{n},$$

což implikuje nerovnost $\mu(E) \leq \mu(H)$. Uvážíme-li ještě, že $H \subset E$, dostaneme

$$\mu(E) = \mu(H).$$

Protože $\mu(E) = \mu(H) < \infty$, je $\mu(E \setminus H) = \mu(E) - \mu(H) = 0$. Stačí tedy položit $N := E \setminus H$.

V případě, že $\mu(E) = \infty$, si definujme pomocné množiny $E_n := (n, n+1] \cap E$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. Protože $\mu(E_n) \leq \mu((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < \infty$, kde F je nějaká neklesající funkce, můžeme na množiny E_n aplikovat předchozí postup. Dostaneme tak F_σ-množiny $H_n \subset E_n$ a μ-nulové množiny N_n tak, že $E_n = H_n \cup N_n$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$. Protože

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} H_n \cup N_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} H_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} N_n \right),$$

stačí položit

$$H := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} H_n \quad \text{a} \quad N := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} N_n.$$

Potom H je F_σ-množina a N je μ-nulová množina, jak plyne z Věty 4.26. Tím je implikace 1. $\Rightarrow$ 2. dokázána.

Nakonec dokážeme implikaci 1. $\Rightarrow$ 3. Nechť $E \in \mathcal{M}_\mu$. Jelikož už máme dokázanou implikaci 1. $\Rightarrow$ 3., můžeme ji aplikovat na množinu $E^c \in \mathcal{M}_\mu$. Potom existuje F_σ-množina $H \subset E^c$ a μ-nulová množina N tak, že $E^c = H \cup N$. Protože

$$E = H^c \cap N^c = H^c \setminus N,$$

stačí položit $V := H^c$ a uvědomit si, že doplněk do F_σ-množiny je G_δ-množina. □

Dokážeme si ještě jednu větu, která vyjadřuje, že měřitelné množiny lze aproximovat jednoduchými množinami. Připomeňme, že symetrická diference množin A a B je definována vztahem

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Věta 4.49: Nechť μ je Lebesgueova–Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}_\mu$ a $\mu(E) < \infty$. Potom

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists A \text{ konečné sjednocení otevřených intervalů})(\mu(E \Delta A) < \epsilon).$$

Důkaz. Nechť $\epsilon > 0$. Protože je $\mu(E) < \infty$, existují podle Věty 4.47 otevřená množina $U \supset E$ a kompaktní množina $K \subset E$ tak, že

$$\mu(U \setminus E) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{a} \quad \mu(E \setminus K) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Protože je U otevřená, existuje ke každému $x \in U$ číslo $r_x > 0$ tak, že $(x - r_x, x + r_x) \subset U$, což implikuje

$$U = \bigcup_{x \in U} (x - r_x, x + r_x).$$

To znamená, že $\{(x - r_x, x + r_x) \mid x \in U\}$ je otevřené pokrytí kompaktní množiny K, neboť $K \subset U$. Proto existuje $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \dots, x_n \in U$ tak, že $K \subset A$, kde jsme označili

$$A := \bigcup_{i=1}^{n} (x_i - r_{x_i}, x_i + r_{x_i}).$$

Tedy A je konečné sjednocení otevřených intervalů. Dále z inkluzí $K \subset A \subset U$ plyne, že

$$A \setminus E \subset U \setminus E \quad \text{a} \quad E \setminus A \subset E \setminus K,$$

a proto

$$\mu(E \Delta A) = \mu(E \setminus A) + \mu(A \setminus E) \leq \mu(E \setminus K) + \mu(U \setminus E) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

V poslední části této kapitoly prozkoumáme blíže **nejdůležitější míru** na $\mathbb{R}$, totiž Lebesgueovu míru m a také σ-algebru lebesgueovsky měřitelných množin $\mathcal{L}$. Připomeňme si motivaci popsanou v úvodu této kapitoly. Chtěli jsme zavést „zobecněný objem“ na podmnožinách $\mathbb{R}^n$, který by byl σ-aditivní, invariantní vůči posunutí, rotaci a zrcadlení a intervalům přiřadil jejich objem v obvyklém smyslu. Lebesgueova míra je právě tento hledaný „zobecněný objem“ na $\mathbb{R}$. Rozšíření Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^n$ zavedeme později.

Jelikož Lebesguova míra m je speciální Lebesgueova–Stieltjesova míra asociovaná s funkcí $F(x) = x$, máme

$$m((a,b)) = m([a,b)) = m((a,b]) = m([a,b]) = b - a$$

pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, viz Cvičení 4.7. Speciálně tedy $m(\{a\}) = 0$.

Dále si ukážeme, že m je skutečně translačně invariantní a také invariantní vůči rotaci a zrcadlení. Samozřejmě poslední dvě jmenované transformace jsou v $\mathbb{R}$ značně limitované. My si ukážeme dokonce víc, konkrétně chování m vůči škálování. Pro $E \subset \mathbb{R}$ a $s, r \in \mathbb{R}$ použijeme značení:

$$E + s = \{x + s \mid x \in E\} \quad \text{a} \quad rE = \{rx \mid x \in E\}.$$

Věta 4.50: Nechť $E \in \mathcal{L}$ a $s, r \in \mathbb{R}$. Potom $E + s \in \mathcal{L}$, $rE \in \mathcal{L}$ a platí:

$$m(E + s) = m(E) \quad \text{a} \quad m(rE) = |r| m(E).$$

(V případě $r = 0$ a $m(E) = \infty$ používáme konvenci $0 \cdot \infty := 0$.)

Důkaz. Je jasné, že tvrzení o rE platí, pokud je $r = 0$, a proto budeme dále předpokládat, že $r \neq 0$.

Nejprve dokážeme, že $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ je invariantní vůči posunutí a škálování. Označme $\mathcal{I}$ systém otevřených intervalů v $\mathbb{R}$. Systém $\mathcal{I}$ je zřejmě invariantní vůči posunutí i škálování, tj. $\mathcal{I} + s = \mathcal{I}$ a $r\mathcal{I} = \mathcal{I}$. Jelikož je $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}_\mathbb{R}$, máme

$$\mathcal{I} = \mathcal{I} + s \subset \mathcal{B}_\mathbb{R} + s.$$

Protože $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}+s$ je σ-algebra (rozmyslete) a systém $\mathcal{I}$ generuje $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, viz Věta 4.9, plyne z Lemma 4.7, že

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}} + s.$$

Tato inkluze platí pro všechna $s \in \mathbb{R}$. Platí proto, i pokud místo s píšeme $-s$. Dostáváme tak inkluzi

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}} - s,$$

která je ekvivalentní s inkluzí

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} + s \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}},$$

a tedy platí rovnost $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} + s = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ pro všechna $s \in \mathbb{R}$. Zcela analogicky se ověří, že $r\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ pro všechna $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (proveďte).

Zafixujme $s \in \mathbb{R}$ a $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a definujme

$$\begin{aligned} m_s(E) &:= m(E+s), \\ m^r(E) &:= m(rE) \end{aligned}$$

pro $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Jelikož $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}+s = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ a $r\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, jsou m_s a m^r dobře definované na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ a navíc jsou to míry na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (ověřte). Dále je jasné, že se m_s a m^r shodují s m a $|r|m$ na množině p-intervalů, a tudíž také na algebře konečných sjednocení po dvou disjunktních p-intervalů. Věta 4.38 potom implikuje, že $m_s = m$ a $m^r = |r|m$ na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, neboli máme

$$m(E+s) = m(E) \quad \text{a} \quad m(rE) = |r|m(E)$$

pro všechna $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Speciálně pro množiny $N \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ nulové Lebesgueovy míry platí, že $m(N+s) = m(rN) = 0$ pro všechna $s, r \in \mathbb{R}$. Podle definice zúplnění míry popsané ve Větě 4.30 je $E \in \mathcal{L}$, právě když existují $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ a $F \subset N \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ takové, že $m(N) = 0$ a $E = A \cup F$, a potom $m(E) = m(A)$. Tudíž

$$E + s = A \cup F + s = (A+s) \cup (F+s),$$

kde $A+s \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ a $F+s \subset N+s$, $m(N+s) = 0$, jak víme z předchozí části. Tzn., že $E+s \in \mathcal{L}$. Navíc

$$m(E+s) = m(A+s) = m(A) = m(E).$$

Analogicky máme

$$rE = r(A \cup F) = rA \cup rF,$$

kde $rA \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ a $rF \subset rN$, $m(rN) = 0$ podle předchozí části, a proto $rE \in \mathcal{L}$. Navíc

$$m(rE) = m(rA) = |r|m(A) = |r|m(E).$$

□

Topologické vlastnosti Lebesgueovsky měřitelných množin jsou poměrně delikátní a jejich studium připravilo matematikům nejedno překvapení. Uvědomte si, že z Vět 4.1 a 4.50 vyplývá, že $\mathcal{L} \neq 2^{\mathbb{R}}$, neboli, že existuje množina, která není lebesgueovsky měřitelná. Nicméně důkaz Věty 4.1, kde jsme nalezli lebegueovsky neměřitelnou množinu N, není konstruktivní, nýbrž používá k definici N axiom výběru. Použití axiomu výběru pro důkaz existence neměřitelné množiny není motivován touhou matematika použít záhadný výběr. Ukazuje se, že použití axiomu výběru je pro důkaz existence neměřitelné množiny zásadní. Přesnou formulaci tohoto tvrzení, kterou neuvedeme, neboť vyžaduje hlubší exkurz do axiomatické teorie množin, najde čtenář v [24].

Poznámka: Poznamenejme, že existence neměřitelné množiny není vlastností každé Lebesgueovy–Stieltjesovy míry na $\mathbb{R}$. Např., je-li Lebesgueova–Stieltjesova míra μ asociovaná s konstantní funkcí F, potom je $\mu = 0$ a $\mathcal{M}_\mu = 2^{\mathbb{R}}$. Příklad netriviální Lebesgueovy–Stieltjesovy míry definované na všech podmnožinách $\mathbb{R}$ ukazuje Cvičení 4.8.

Dále nechť $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost všech racionálních čísel v intervalu $[0,1]$. Zvolme $\epsilon > 0$. Definujme $I_n := (r_n - \epsilon 2^{-n-1}, r_n + \epsilon 2^{-n-1})$ a

$$U := (0,1) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Množina U je otevřená a hustá v $[0,1]$. Navíc $m(U) \leq \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \epsilon$. Naopak množina $K := [0,1] \setminus U$ je uzavřená a tzv. řídká, neboť $K^\circ = \emptyset$ (obecně se množina A nazývá ***řídká***, pokud $(\overline{A})^\circ = \emptyset$) a $m(K) \geq 1 - \epsilon$. Tedy topologicky „velká“ množina, tj. otevřená a hustá v $[0,1]$, může mít libovolně malou míru (nicméně ne nulovou, viz Cvičení 4.9). Na druhou stranu topologicky „nevýznamná“ množina, tj. řídká v $[0,1]$, může mít míru libovolně blízkou míře celého intervalu $[0,1]$.

Jelikož jednobodová množina má nulovou Lebesgueovu míru, je také $m(\mathbb{Q}) = 0$, viz Věta 4.26. Existují ale i množiny nulové míry, které mají dokonce mohutnost kontinua. Ukážeme si to na klasickém příkladu *Cantorova diskontinua*.

Příklad 4.51 (Cantorovo diskontinuum)**:** Položme

$$\begin{aligned}
C_1 &:= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \\
C_2 &:= \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \\
C_3 &:= \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \left(\frac{4}{27}, \frac{5}{27}\right) \cup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{11}{27}, \frac{12}{27}\right) \cup \dots \cup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right),
\end{aligned}$$

atd. Obecně pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$C_n := \bigcup_{k=1}^{3^{n-1}} \left(\frac{3k-2}{3^n}, \frac{3k-1}{3^n}\right).$$

Potom *Cantorovo diskontinuum* je množina

$$C := [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Jinými slovy C vznikne z $[0,1]$ odebráním prostřední třetiny $(1/3, 2/3)$, poté odebráním prostředních třetin $(1/9, 2/9)$ a $(7/9, 8/9)$, atd., viz Obrázek 12.

Obrázek 12: Ilustrace konstrukce Cantorova diskontinua.

Ukážeme, že C je množina Lebesgueovy míry nula. Jelikož C vznikne z $[0,1]$ odebráním jednoho intervalu délky $1/3$, dvou intervalů délky $1/9$, čtyř intervalů délky $1/27$, atd., máme

$$m(C) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - 2/3} = 0.$$

Dále si ukážeme, že C má mohutnost kontinua. K tomu budeme potřebovat charakterizaci elementů množiny C založenou na ternární reprezentaci čísla $x \in [0,1]$. Libovolné číslo $x \in [0,1]$ můžeme reprezentovat v číselné bázi o základu 3 ve tvaru

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j},$$

kde $a_j \in \{0,1,2\}$, např. použitím tzv. hladového algoritmu. Tato reprezentace ovšem není jednoznačná, např. číslo $1/3$ má jednak reprezentaci s ciframi $a_1 = 1$ a $a_j = 0$ pro $j > 1$, ale také $a_1 = 0$ a $a_j = 2$ pro $j > 1$, protože

$$\frac{1}{3} = \sum_{j=2}^{\infty} 2 \cdot 3^{-j}.$$

Tato dvojznačnost se týká pouze čísel tvaru $p3^{-k}$, kde $p, k \in \mathbb{Z}$ a p není dělitelné třemi. Číslo $p3^{-k}$ má právě dvě reprezentace, které mají buď $a_j = 0$ pro $j > k$, nebo $a_j = 2$ pro $j > k$. V intervalu $(0,1)$ se tato nejednoznačnost týká právě koncových bodů intervalů definujících množiny C_n. Odstraníme tuto nejednoznačnost tak, že pokud je x levý kraj odstraňovaného intervalu, zvolíme variantu reprezantace končící nekonečnou posloupností cifer 2, kdežto pokud je x pravý kraj odstraňovaného intervalu, zvolíme reprezentaci končící nekonečnou posloupností cifer 0. Např.

$$x = \frac{1}{3}: \quad a_1 = 0,\ a_j = 2, \quad j > 1,$$
$$x = \frac{2}{3}: \quad a_1 = 2,\ a_j = 0, \quad j > 1.$$

Čísla 0 resp. 1 jsou reprezentována ciframi $a_n = 0$ resp. $a_n = 2$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. S touto konvencí je každému číslu $x \in [0,1]$ přiřazena jednoznačně posloupnost cifer $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s $a_n \in \{0,1,2\}$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$, což se obvykle vyjadřuje rovností

$$(x)_3 = 0_{\bullet_3} a_1 a_2 a_3 \ldots .$$

Navíc je toto zobrazení prosté, protože $x < y$, právě když existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n < b_n$ a $a_j = b_j$ pro všechna $j < n$.

V souvislosti s Cantorovou množinou C si nyní stačí uvědomit, že

$$\begin{aligned} x \in C_1 \quad &\Leftrightarrow \quad a_1 = 1, \\ x \in C_2 \quad &\Leftrightarrow \quad a_2 = 1, \\ &\text{atd.} \end{aligned}$$

Obecně $x \in C_n \Leftrightarrow a_n = 1$, a proto můžeme charakterizovat elementy množiny C následovně:

$$x \in C \quad \Leftrightarrow \quad \text{Ternární reprezentace čísla } x \text{ obsahuje pouze cifry 0 a 2.}$$

Abychom viděli, že C má mohutnost kontinua, stačí nahradit v ternární reprezentaci čísla $x \in C$ cifry 2 cifrou 1. Tedy je-li $(x)_3 = 0_{\bullet_3} a_1 a_2 a_3 \ldots$, definujeme $b_n := a_n/2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak řada

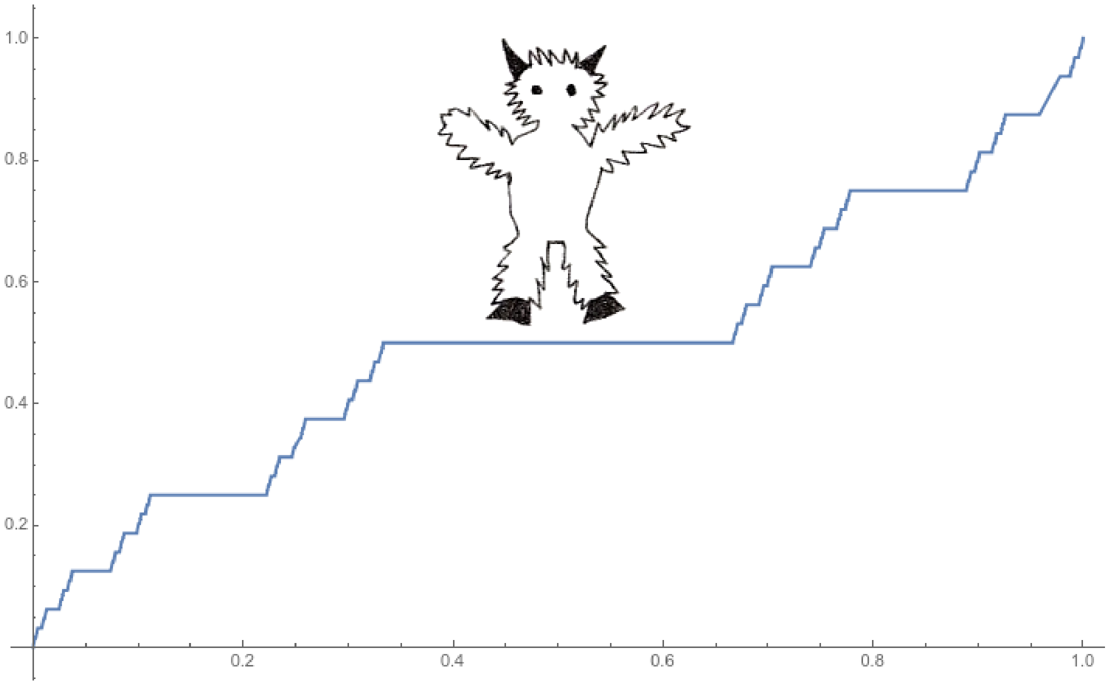
$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^{-n} \tag{46}$$

představuje binární reprezentaci čísla $[0,1]$ a navíc každé číslo z $[0,1]$ lze takto získat. Jinými slovy je $f : C \to [0,1]$ surjektivní. Z toho plyne, že C má stejnou mohutnost jako interval $[0,1]$, tedy mohutnost kontinua.

Topologické vlastnosti Cantorova diskontinua shrnuje Cvičení 4.10. Prozkoumáme ještě zobrazení $f : C \to [0,1]$ z předchozího příkladu.

Příklad 4.52 (Cantorova funkce)**:** V poslední části předchozího příkladu jsme viděli, že mezi elementy $x \in C$ a posloupnostmi z nul a jedniček je vzájemně jednoznačný vztah. Funkce f definovaná na C vztahem (46) zobrazuje tedy na $[0,1]$, ale není prostá, protože dvě různé posloupnosti z nul a jedniček mohou představovat dvě různé binární reprezentace téhož čísla. Jedná se o již výše popsanou nejednoznačnost tentokrát pro případ binární reprezentace čísla. Čísla s dvojí binární reprezentací jsou tvaru $p2^{-k}$, kde $p, k \in \mathbb{Z}$.

Je jednoduché si rozmyslet, že pro $x < y$ platí $f(x) < f(y)$, až na situaci, kdy x a y jsou koncové body jednoho z intervalů odstraňovaných z $[0,1]$ při konstrukci množiny C. V takovém případě je $f(x) = f(y)$, a proto můžeme rozšířit definici f i na tyto odstraňované intervaly (x,y) tak, že f bude na (x,y) konstantní: $(\forall t \in (x,y))(f(t) := f(x) \equiv f(y))$. Tímto rozšířením získáme neklesající funkci $f : [0,1] \to [0,1]$. Jelikož je f neklesající a současně $f([0,1]) = [0,1]$, nemůže mít f body nespojitosti v $[0,1]$, a tedy f je spojitá funkce. Funkci f představil Cantor ve svém článku v roce 1884 a postupně se stala populární. V literatuře se f nazývá různými jmény, např. *Cantorova funkce*, *Lebesgueova–Cantorova funkce*, *Cantorova–Vitaliho funkce* nebo také *Ďáblovo schodiště*, viz Obrázek 13. Přehledné shrnutí různých vlastností Cantorovy funkce lze najít v článku [8].



Obrázek 13: Cantorova funkce a.k.a. Ďáblovo schodiště.

Připomeňme, že lebegueovsky měřitelné množiny $\mathcal{L}$ jsme získali z borelovských množin $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ tak, že jsme zúplnili příslušnou borelovskou míru. Požadavek, aby každá podmnožina množiny nulové míry měla nulovou míru, je nejen racionální, ale také významně rozšiřuje systém měřitelných množin. Nicméně ukázat si, že existují lebegueovsky měřitelné množiny, které nejsou borelovské, není jednoduché. Naznačíme si jeden argument, ovšem s tím, že bez důkazu přijmeme tvrzení, že $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ má mohutnost kontinua. Ověřit tento fakt vyžaduje hlubší exkurz do teorie množin, který je už nad rámec tohoto textu. Čtenář může důkaz najít např. v [10, Sec. 1.6, § 1.2].

V teorii množin značí $\mathrm{card}(A)$ kardinalitu (mohutnost) množiny A. Neuvedeme zde přesnou definici kardinality množiny, vystačíme si s následujícími informacemi. Je-li A konečná, je $\mathrm{card}(A)$ počet prvků A. Také kardinalita některých nekonečných množin má ustálené označení, např. $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$ nebo $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Rovnost $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$ znamená, že množiy A a B mají stejnou mohutnost, neboli, že mezi A a B existuje bijekce. Tedy např. pro Cantorovo diskontinuum C platí $\mathrm{card}(C) = \mathfrak{c}$. Nerovnost $\aleph_0 \neq \mathfrak{c}$ vyjadřuje, že mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$ neexistuje bijekce. Tyto symboly, tzv. *kardinální čísla*, lze chápat jako symboly pro „různá nekonečna" v matematice.

Na kardinálních číslech lze zavést uspořádání. Řekneme, že $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$, pokud existuje injektivní zobrazení z A do B a řekneme, že $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(B)$, pokud $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ a současně neexistuje bijekce z A do B. Např. $\aleph_0 < \mathfrak{c}$. Antisymetrie relace card je obsahem Schröderovy–Bernsteinovy věty, která ukazuje, že pokud $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ a $\mathrm{card}(B) \leq \mathrm{card}(A)$, potom $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$. Přijmeme-li navíc Axiom výběru, lze kardinality libovolných dvou množin A a B vždy porovnat, tj. nastává buď $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$, nebo

$\mathrm{card}(B) \leq \mathrm{card}(A)$. Je to dokonce tvrzení ekvivalentní a Axiomem výběru, viz [2, Věta 7.14].

Cantor jednoduchou ale geniální myšlenkou ukázal, že existují množiny libovolné mohutnosti, tedy „libovolně velká nekonečna“.

Věta 4.53 (Cantor)**:** Pro libovolnou abstraktní množinu A platí, že $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(2^A)$.

Důkaz. Je-li A konečná, potom tvrzení platí, neboť počet prvků potenční množiny 2^A je roven 2^n, kde n je počet prvků A (ověřte), a nerovnost $n < 2^n$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

Pro obecnou množinu A (konečnou či nekonečnou) využívá důkaz Cantorův „diagonální argument“. Tato myšlenka dokazuje, že neexistuje žádné surjektivní zobrazení $f : A \to 2^A$. Z toho již speciálně vyplývá, že $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(2^A)$, protože zobrazení $A \to 2^A : x \mapsto \{x\}$ je prosté.

Pro spor předpokládejme, že $f : A \to 2^A$ je surjektivní. Definujme množinu $B := \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. Jelikož je f surjektivní a $B \subset A$, existuje $x \in A$ tak, že $f(x) = B$. Potom ale $x \in B \iff x \notin f(x) = B$ z konstrukce množiny B; to je logický spor. □

Již jsme ukázali, že pro Cantorovo diskontinuum C platí $m(C) = 0$, a proto také každá podmnožina C je lebegueovsky měřitelná (s nulovou mírou) z úplnosti Lebegueovy míry. Potom podle Cantorovy Věty 4.53 máme

$$\mathrm{card}\,\mathcal{L} \geq \mathrm{card}\,2^C > \mathrm{card}(C) = \mathfrak{c}.$$

Tedy systém $\mathcal{L}$ má větší mohutnost než $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, protože $\mathrm{card}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = \mathfrak{c}$. Speciálně z toho plyne, že existuje lebesgueovsky měřitelná množina, která není borelovská (dokonce nekonečně mnoho).

Poznámka: Je-li $\mathrm{card}\,A = \mathfrak{c}$, značí se $\mathrm{card}\,2^A = 2^{\mathfrak{c}}$ (nebo $\aleph_2$ za předpokladu platnosti Hypotézy kontinua). Kardinalitu $2^{\mathfrak{c}}$ má např. množina všech reálných funkcí. Jelikož $2^C \subset \mathcal{L} \subset 2^{\mathbb{R}}$, je $\mathrm{card}\,\mathcal{L} = 2^{\mathfrak{c}}$. Tedy dobrá zpráva je, že lebesgueovsky měřitelných množin je „mnoho“. Na druhou stranu lebesguevsky neměřitelných množin je stejně „mnoho“. Skutečně je-li např. N neměřitelná množina z důkazu Věty 4.1, potom také každá množina systému $\{N \cup (1+K) \mid K \subset C\}$ je neměřitelná. Tento systém má stejnou mohutnost jako 2^C, tj. $2^{\mathfrak{c}}$, a proto $\mathrm{card}(2^{\mathbb{R}} \setminus \mathcal{L}) = 2^{\mathfrak{c}}$.

4.6 Cvičení

Cvičení 4.1: Dokončete důkaz Věty 4.9.

Cvičení 4.2: Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $C \subset X$ je hustá. Dokažte, že systém

$$\{B_x(r) \mid x \in C, r \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}\}$$

je báze (X, ρ).

Cvičení* 4.3: Buď $\mathcal{A}$ algebra, $\mathcal{A}_\sigma$ systém spočetných sjednocení množin z $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ systém spočetných průniků množin z $\mathcal{A}_\sigma$. Uvažujme dále pramíru μ_0 na $\mathcal{A}$ a μ^* vnější míru určenou pramírou μ_0 podle vzorce (37). Dokažte následující tvrzení:

1. $(\forall E \subset X)(\forall \epsilon > 0)(\exists A \in \mathcal{A}_\sigma, E \subset A)(\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \epsilon)$.
2. Pokud $\mu^*(E) < \infty$, potom
$$E \text{ je } \mu^*\text{-měřitelná} \quad \Leftrightarrow \quad (\exists B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}, E \subset B)(\mu^*(B \setminus E) = 0).$$
3. Je-li μ_0 σ-konečná, lze předpoklad $\mu^*(E) < \infty$ v bodě 2. vynechat.

(Hint: Bod 1.: Použijte 2. vlastnost infima. Bod 2.: Nejprve aplikujte bod 1. s $\epsilon := 1/n$ a definujte B jako průnik množin $A_n \in \mathcal{A}_\sigma$ z bodu 1. Ukažte, že $E \subset B$ a $\mu^*(E) = \mu^*(B)$. Implikace $(\Rightarrow)$: Uvažujte množinu B v definici μ^*-měřitelnosti E: $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \cap E^c) = \mu^*(E) - \mu^*(B \setminus E)$ a použijte rovnost $\mu^*(E) = \mu^*(B)$ spolu s předpokladem $\mu^*(E) < \infty$. Implikace $(\Leftarrow)$: Uvědomte si, že $\mathcal{A}_{\sigma\delta} \subset \mathcal{M}^*$ a pro lib. $A \subset X$ ukažte, že $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap (B \setminus E)) + \mu^*(A \cap (B \setminus E)^c) \leq \mu^*(B \setminus E) + \mu^*(A) = \mu^*$. Potom je $B \setminus E \in \mathcal{M}^*$, a protože také $B \in \mathcal{M}^*$, musí i $E \in \mathcal{M}^*$.)

Cvičení* 4.4: Uvažujte μ_0 pramíru na algebře $\mathcal{A}$, vnější míru μ^* definovanou vztahem (37) a míru $\mu := \mu^* \restriction \mathcal{M}$, kde $\mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathcal{A})$, viz Věta 4.38. Aplikujte vzorec (37) ještě jednou tentokrát s $\mathcal{M}$ místo $\mathcal{A}$ a μ místo μ_0 a výslednou vnější míru označte $\mu^\dagger$. Dokažte, že $\mu^* = \mu^\dagger$. (Hint: Pro odvození nerovnosti $\mu^*(E) \leq \mu^\dagger(E)$ použijte Cvičení 4.3, bod 1.)

Cvičení 4.5: Buď μ^* vnější míra na X určená konečnou pramírou μ_0. Definujme *vnitřní míru* $\mu_* : 2^X \to [0, \infty]$ na X vztahem $\mu_*(E) := \mu_0(X) - \mu^*(E^c)$ pro $E \subset X$. Dokažte, že

$$E \text{ je } \mu^*\text{-měřitelná} \quad \Leftrightarrow \quad \mu_*(E) = \mu^*(E).$$

(Hint: V důkazu implikace $(\Leftarrow)$ postupujte jako v důkazu 2. tvrzení ze Cvičení 4.3 a ukažte, že k lib. $E \subset X$ existuje $B \in \sigma\delta$, $E \subset B$ taková, že $\mu^*(E) = \mu^*(B)$, a také $\mu^*(E^c) = \mu^*(B^c)$. Z druhé rovnosti a z μ^*-měřitelnosti B vyvoďte, že $\mu^*(B \setminus E) = 0$.)

Cvičení 4.6: Doplňte detaily v důkazu 3. tvrzení Věty 4.43.

Cvičení 4.7: Buď μ Lebesgueova–Stieltjesova míra asociovaná s funkcí F. Ukažte, že pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ platí:

$$\mu((a, b)) = F(b-) - F(a),$$
$$\mu([a, b]) = F(b) - F(a-),$$
$$\mu([a, b)) = F(b-) - F(a-)$$

a

$$\mu(\{a\}) = F(a) - F(a-),$$

kde $F(x-) = \lim_{y \to x-} F(y)$ označuje limitu zleva.

Cvičení 4.8: Ukažte, že Lebesgueova–Stieltjesova míra asociovaná s funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x \geq 0, \\ 0, & \text{je-li } x < 0, \end{cases}$$

je Diracova delta míra δ_0 v bodě 0.

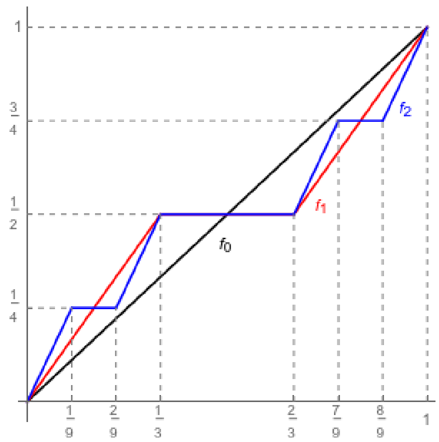
Cvičení 4.9: Dokažte, že neprázdná otevřená podmnožina $\mathbb{R}$ má pozitivní Lebesgueovu míru.

Cvičení 4.10: Dokažte, že pro Cantorovo diskontinuum C platí:

1. C je kompaktní.
2. C je řídká.
3. C je totálně nesouvislá, tzn., že jedinými souvislými podmnožinami C jsou singletony.
4. C je perfektní, tedy C nemá izolované body.

Cvičení 4.11: Uvažujte posloupnost funkcí $f_n : [0,1] \to [0,1]$ definovanou rekurzivně tak, že $f_0(x) := x$ a

$$f_{n+1}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x), & \text{je-li } \ 0 \leq x < 1/3, \\ \frac{1}{2}, & \text{je-li } \ 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2), & \text{je-li } \ 2/3 < x \leq 1, \end{cases}$$



kde $n \in \mathbb{N}_0$. Dokažte, že $f_n \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} f$, kde f je Cantorova funkce.

Pijte s mírou!

5 Teorie integrálu

V klasické teorii Riemannova integrálu na $\mathbb{R}$ je $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ limitou posloupnosti Riemannových součtů, což jsou vlastně integrály jednoduchých (schodovitých) funkcí, které aproximují f na $[a, b]$. Podobně i v obecném prostoru s mírou máme přirozeného kandidáta na integrál z jednoduché funkce (viz Definice 5.18) a tento integrál poté rozšíříme na obecnější funkce. V této kapitole takto vybudujeme abstraktní teorii integrace funkcí na obecných prostorech s mírou se speciálním důrazem na Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}$ a jeho zobecnění na $\mathbb{R}^n$.

5.1 Měřitelná funkce

Pojem měřitelnosti jsme doposud používali jen v souvislosti s množinami. Nyní ho rozšíříme na zobrazení mezi měřitelnými prostory.

Definice 5.1 (Měřitelné zobrazení)**:** Nechť $(X, \mathcal{M})$ a $(Y, \mathcal{N})$ jsou měřitelné prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ nazýváme $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-*měřitelné*, právě když

$$(\forall E \in \mathcal{N})(f^{-1}(E) \in \mathcal{M}).$$

Podle předchozí definice je tedy zobrazení měřitelné, právě když vzory měřitelných množin jsou měřitelné. Další tvrzení nám říká, že σ-algebru $\mathcal{N}$ lze v definici měřitelnosti zobrazení nahradit jejím libovolným generátorem.

Lemma 5.2: Nechť $(X, \mathcal{M})$ a $(Y, \mathcal{N})$ jsou měřitelné prostory, σ-algebra $\mathcal{N}$ je generována systémem $\mathcal{E} \subset 2^Y$ a $f : X \to Y$. Potom

$$f \text{ je } (\mathcal{M}, \mathcal{N})\text{-měřitelné} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall E \in \mathcal{E})(f^{-1}(E) \in \mathcal{M}).$$

Důkaz. Implikace $(\Rightarrow)$ je triviální. K důkazu implikace $(\Leftarrow)$ si stačí uvědomit, že systém $\{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$ je σ-algebra, která obsahuje $\mathcal{E}$, viz Cvičení 5.1. Potom podle Lemma 4.7 je $\mathcal{N} \subset \{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$, a tedy f je $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-měřitelné. $\square$

Důsledek 5.3: Nechť (X, τ_X) a (Y, τ_Y) jsou topologické prostory. Je-li $f : X \to Y$ spojité, potom je $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$-měřitelné.

Důkaz. Připomeňme, že $f : X \to Y$ je spojité, právě když $(\forall E \in \tau_Y)(f^{-1}(E) \in \tau_X)$, viz Věta 2.61. Protože τ_Y generuje $\mathcal{B}_Y$ a $\tau_X \subset \mathcal{B}_X$, je tvrzení důsledkem Lemma 5.2. $\square$

V případě funkcí s reálnými resp. komplexními hodnotami uvažujeme nejčastěji borelovské σ-algebry a používáme stručnější názvosloví.

Definice 5.4 (Měřitelná funkce, lebesgueovsky a borelovsky měřitelná funkce)**:** Nechť $(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor. Funkci $f : X \to \mathbb{R}$ resp. $f : X \to \mathbb{C}$ nazýváme $\mathcal{M}$-*měřitelná*, nebo jen *měřitelná*, právě když f je $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-měřitelná resp. $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_\mathbb{C})$-měřitelná. Speciálně funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nazýváme *lebesgueovsky* resp. *borelovsky měřitelná*, právě když f je $(\mathcal{L}, \mathcal{B}_\mathbb{C})$-měřitelná resp. $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{C})$-měřitelná a analogicky pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Poznámka: Zde se rozumí, že σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ je generovaná otevřenými podmnožinami $\mathbb{C}$. Obvyklá topologie na $\mathbb{C}$ je definována pomocí obvyklé topologie na $\mathbb{R}^2$ a přirozeného ztotožnění $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$, které je dané zobrazením $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 : z \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$. Neboli množina $A \subset \mathbb{C}$ je otevřená, právě když je $\phi(A) = \{(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \mid z \in A\} \subset \mathbb{R}^2$ otevřená v obvyklé topologii $\mathbb{R}^2$.

Je jednoduché si rozmyslet, že pokud jsou $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ a $\mathcal{O}$ σ-algebry na X, Y a Z, $f : X \to Y$ $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-měřitelné a $g : Y \to Z$ $(\mathcal{N}, \mathcal{O})$-měřitelné, potom také složení $g \circ f$ je $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$-měřitelné zobrazení. Ihned na tomto místě ale **upozorněme**, že jsou-li $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lebesgueovsky měřitelné funkce, jejich složení $f \circ g$ nemusí být lebesgueovsky měřitelná funkce, a to ani pokud je g spojitá. Skutečně pro $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ víme jen, že $f^{-1}(E) \in \mathcal{L}$, odtud ovšem neplyne, že $g^{-1}(f^{-1}(E)) \in \mathcal{L}$, není-li $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. K tomu bychom potřebovali silnější předpoklad borelovské měřitelnosti funkce f. Konkrétní příklad ilustrující tento fakt najde čtenář např. v [10, Sec. 2.1, Exer. 9].

Následující věta, jejíž důkaz je okamžitým důsledkem Věty 4.9 a Lemma 5.2, je užitečná.

Věta 5.5: Nechť $(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor a $f : X \to \mathbb{R}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. f je $\mathcal{M}$-měřitelná,
2. $(\forall a \in \mathbb{R})(f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{M})$,
3. $(\forall a \in \mathbb{R})(f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{M})$,
4. $(\forall a \in \mathbb{R})(f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{M})$,
5. $(\forall a \in \mathbb{R})(f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{M})$.

Někdy chceme vyjádřit měřitelnost funkce pouze na nějaké podmnožině X. Odpovídající pojem zavádí následující definice.

Definice 5.6 (Funkce měřitelná na množině)**:** Nechť $(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor a $E \in \mathcal{M}$. Funkci $f : X \to \mathbb{R}$ resp. $f \to \mathbb{C}$ nazýváme *$\mathcal{M}$-měřitelná na E*, nebo jen *měřitelná na E*, právě když $f^{-1}(B) \cap E \in \mathcal{M}$ pro všechny $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ resp. $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$.

Věta 5.7: Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $(X, \mathcal{M})$, $(Y_1, \mathcal{N}_1), \ldots, (Y_n, \mathcal{N}_n)$ jsou měřitelné prostory. Dále buďte $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n, \mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_n$ produktová σ-algebra na Y a $f : X \to Y$. Označme si komponenty $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Potom platí:

$$f \text{ je } (\mathcal{M}, \mathcal{N})\text{-měřitelné} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall i \in \hat{n})(f_i \text{ je } (\mathcal{M}, \mathcal{N}_i)\text{-měřitelné}).$$

Důkaz. Implikace $(\Rightarrow)$: Nechť f je $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-měřitelné a $i \in \hat{n}$. Zobrazení projekce na i-tou komponentu $\pi_i : Y \to Y_i : (y_1, \ldots, y_n) \mapsto y_i$ je $(\mathcal{N}, \mathcal{N}_i)$-měřitelné, neboť pro $E_i \in \mathcal{N}_i$ máme

$$\pi_i^{-1}(E_i) = Y_1 \times \cdots \times Y_{i-1} \times E_i \times Y_{i+1} \times \cdots \times Y_n \in \mathcal{N}.$$

Jelikož $f_i = \pi_i \circ f$, tedy f_i je složením $(\mathcal{N}, \mathcal{N}_i)$-měřitelného zobrazení π_i a $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-měřitelného zobrazení f, je f_i $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_i)$-měřitelné.

Implikace ($\Leftarrow$): Předpokládejme, že f_i jsou $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_i)$-měřitelná pro všechna $i \in \hat{n}$. Podle Lemma 4.11 je σ-algebra $\mathcal{N}$ generována systémem množin

$$\{Y_1 \times \dots Y_{i-1} \times E_i \times Y_{i+1} \times \dots \times Y_n \mid E_i \in \mathcal{N}_i, i \in \hat{n}\}.$$

A protože pro každé $i \in \hat{n}$ je

$$f^{-1}\left(Y_1 \times \dots Y_{i-1} \times E_i \times Y_{i+1} \times \dots \times Y_n\right) = f^{-1}\left(\pi_i^{-1}(E_i)\right) = f_i^{-1}(E_i) \in \mathcal{M},$$

vyplývá $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-měřitelnost zobrazení f z Lemma 5.2. □

Důsledek 5.8: Nechť $(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor. Potom funkce $f : X \to \mathbb{C}$ je měřitelná, právě když obě funkce $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : X \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné.

Důkaz. Z poznámky za Definicí 5.4 vyplývá, že $f : X \to \mathbb{C}$ je měřitelná, právě když funkce $(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f) : X \to \mathbb{R}^2$ je $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$-měřitelná, což podle Věty 5.7 nastává právě tehdy, když jsou $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : X \to \mathbb{R}$ měřitelné, neboť $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, viz Důsledek 4.14. □

V další části si ukážeme, že obvyklé algebraické a limitní operace zachovávají měřitelnost.

Věta 5.9: Nechť $(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor a $f, g : X \to \mathbb{C}$ měřitelné funkce. Potom

1. $f + g$ je měřitelná,
2. fg je měřitelná,
3. f/g je měřitelná za předpokladu, že $(\forall x \in X)(g(x) \neq 0)$.

Důkaz. 1. Definujme si pomocné funkce $F : X \to \mathbb{C}^2$ a $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ vztahy

$$F(x) = (f(x), g(x)) \quad \text{a} \quad \phi(z, w) = z + w.$$

Z měřitelnosti funkcí f a g a Věty 5.7 plyne, že funkce F je $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}^2})$-měřitelná, neboť platí $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^2} = \mathcal{B}_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$, viz Věta 4.13. Dále funkce ϕ je spojitá, a proto měřitelná podle Důsledku 5.3. Nyní si stačí uvědomit, že $f + g = \phi \circ F$ a využít již známého faktu, že složení měřitelných zobrazení je měřitelné.

2. Postupuje se zcela analogicky jako v bodě 1. jen s tím rozdílem, že pomocnou funkci $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definujeme vztahem $\phi(z, w) = zw$.

3. Protože už máme dokázaný bod 2., stačí ukázat, že je-li $g : X \to \mathbb{C}$ měřitelná funkce taková, že $(\forall x \in X)(g(x) \neq 0)$, potom je $1/g$ také měřitelná. K tomu si zaveďme pomocnou funkci $\psi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ vztahem $\psi(z) = 1/z$. Funkce $\psi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ je spojitá, a tudíž $(\mathcal{B}_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-měřitelná podle Důsledku 5.3. Dále g je $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}\setminus\{0\}})$-měřitelná, neboť $\mathcal{B}_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ a g je měřitelná. Tudíž i funkce $1/g = \psi \circ g$ je měřitelná. □

Někdy je výhodné pracovat s funkcemi, jejichž hodnoty mohou být i $\pm\infty$, tj. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, kde $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ je rozšířená reálná osa. Topologie na $\overline{\mathbb{R}}$ se zavádí přirozenou volbou lokální báze jako v Příkladu 2.51. Ekvivalentně je tato topologie na $\overline{\mathbb{R}}$ indukována metrikou

$$\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$$

pro $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, kde dodefinujeme $\operatorname{arctg}(\pm\infty) := \pm\pi/2$.

Borelovská σ-algebra $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ je v následujícím vztahu s $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$:

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{E \subset \overline{\mathbb{R}} \mid E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\};$$

ověřte jako Cvičení 5.2. Potom analogicky jako ve Větě 4.9 lze dokázat, že σ-algebra $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ je generována např. systémy polopřímek typu $(a, \infty]$ nebo $[-\infty, a)$, kde $a \in \mathbb{R}$, viz Cvičení 5.2. Pojem měřitelnosti funkce s hodnotami v $\overline{\mathbb{R}}$ přirozeně rozšiřujeme tak, že $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ nazveme *$\mathcal{M}$-měřitelná*, nebo jen *měřitelná*, pokud je $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$-měřitelná.

Při rozšiřování aritmetických operací plus a krát na $\overline{\mathbb{R}}$ je třeba dbát jisté opatrnosti. Existují dva typy výrazů, u nichž bychom mohli váhat, jak je rozumně definovat. První výraz definujeme

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := 0,$$

což může být na první pohled překvapivé, ale v teorii, kterou budujeme, je to vhodná volba. Na druhou stranu výrazy

$$\infty - \infty \quad \text{a} \quad -\infty + \infty$$

nedefinujeme (žádná volba není vhodná). Všechny ostatní kombinace jsou dodefinovány tak, jak bychom očekávali:

$$a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & \text{pro } a \in (0, \infty], \\ \mp\infty, & \text{pro } a \in [-\infty, 0), \end{cases}$$

$$a + \infty = \infty + a = \infty, \quad \text{pro } a \in (-\infty, \infty],$$

$$a - \infty = -\infty + a = -\infty, \quad \text{pro } a \in [-\infty, \infty).$$

Analogie Věty 5.9 pro funkce s hodnotami v $\overline{\mathbb{R}}$ je obsahem Cvičení 5.3.

Věta 5.10: Nechť $(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ měřitelná. Potom také funkce

$$g_1(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \quad g_2(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

a

$$g_3(x) := \limsup_{n\to\infty} f_n(x), \quad g_4(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

jsou měřitelné. Speciálně funkce $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ je měřitelná za předpokladu, že limita existuje pro každé $x \in X$.

Důkaz. 1. Funkce g_1: Podle Lemma 5.2 a Cvičení 5.2 stačí ukázat, že $g_1^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{M}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. K tomu si stačí uvědomit, že

$$g_1^{-1}((a, \infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((a, \infty]),$$

využít předpokladu měřitelnosti funkcí f_n a toho, že $\mathcal{M}$ je σ-algebra.

2. Funkce g_2: Postupuje se podobně jako v předchozím bodě, akorát tentokrát použijeme systém $\{[-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$, který také generuje $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$, neboť pro něj máme

$$g_2^{-1}([-\infty, a)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([-\infty, a)).$$

3. Funkce g_3: Podle definice limes superior je

$$g_3(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{j\geq n} f_j(x).$$

Z již dokázaného bodu 1. plyne, že funkce $h_n := \sup_{j\geq n} f_j$ jsou měřitelné pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a dále z bodu 2. vyplývá měřitelnost funkce $g_3 = \inf_{n\in\mathbb{N}} h_n$.

4. Funkce g_4: Postupuje se analogicky jako v předchozím bodě, neboť

$$g_4(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{j\geq n} f_j(x).$$

□

Důsledek 5.11: Nechť $(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor a $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ měřitelné funkce. Potom také funkce $\max(f, g)$ a $\min(f, g)$ jsou měřitelné.

Důkaz. Stačí položit $f_1 := f$ a $f_n := g$ pro všechna $n \geq 2$ ve Větě 5.10. □

Důsledek 5.12: Nechť $(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n : X \to \mathbb{C}$, je posloupnost měřitelných funkcí takových, že limita $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existuje pro každé $x \in X$. Potom je f měřitelná.

Důkaz. Z předpokladu bodové konvergence $f_n \to f$ plyne, že $\operatorname{Re} f_n \to \operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f_n \to \operatorname{Im} f$. Funkce $\operatorname{Re} f_n$ a $\operatorname{Im} f_n$ jsou reálné, a proto můžeme aplikovat Větu 5.10, ze které vyplývá měřitelnost limitních funkcí $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$. Nyní podle Důsledku 5.8 je f měřitelná komplexní funkce. □

Pro pozdější účely si zavedeme *pozitivní* a *negativní část* funkce.

Definice 5.13 (Pozitivní a negativní část funkce)**:** Nechť $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Funkce $f^{\pm} : X \to [0, \infty]$ definované vztahy

$$f^{+}(x) := \max(f(x), 0) \quad \text{a} \quad f^{-}(x) := \max(-f(x), 0)$$

nazýváme *pozitivní* a *negativní část* funkce f.

Všimněte si, že

$$f = f^{+} - f^{-}, \quad |f| = f^{+} + f^{-} \quad \text{a} \quad f^{+}f^{-} = 0.$$

Dále podle Důsledku 5.11 jsou f^{+} i f^{-} měřitelné, je-li f měřitelná.

Základním stavebním kamenem budované teorie integrálu jsou *jednoduché funkce.*

Definice 5.14 (Jednoduchá funkce)**:** Funkce $\phi : X \to \mathbb{C}$ s konečným oborem hodnot $\phi(X)$ se nazývá *jednoduchá*.

Je-li $\phi : X \to \mathbb{C}$ jednoduchá, potom existuje $n \in \mathbb{N}$ a navzájem různá čísla $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ taková, že $\phi(X) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a funkci ϕ lze zapsat ve tvaru

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}, \tag{47}$$

kde $E_i := \phi^{-1}(\{a_i\})$ a

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x \in E, \\ 0, & \text{je-li } x \notin E, \end{cases}$$

je *charakteristická funkce* množiny $E \subset X$. Reprezentaci (47) ve tvaru lineární kombinace charakteristických funkcí s komplexními koeficienty budeme nazývat *standardní reprezentace* ϕ. Všimněte si, že jednoduchou funkci lze zapsat jako lineární kombinaci charakteristických funkcí více způsoby, neboť $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ pro disjunktní množiny A, B. Ovšem standardní reprezentace jednoduché funkce je určena jednoznačně. Upozorněme také, že jednoduchá funkce nabývá jen konečných hodnot.

Zřejmě součet $\phi_1 + \phi_2$ i součin $\phi_1\phi_2$ jednoduchých funkcí ϕ_1 a ϕ_2 jsou opět jednoduché funkce. Dále je jasné, že je-li $(X, \mathcal{M})$ měřitelný prostor, je jednoduchá funkce $\phi : X \to \mathbb{C}$ měřitelná, právě když $(\forall i \in \hat{n})(E_i \in \mathcal{M})$, kde $E_i = \phi^{-1}(\{a_i\})$ jsou množiny ze standardní reprezentace (47) funkce ϕ (rozmyslete).

Nyní si ukážeme velmi důležitou vlastnost, že každou měřitelnou funkci lze zespodu aproximovat měřitelnými jednoduchými funkcemi.

Věta 5.15: Nechť $(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor.

1. Je-li $f : X \to [0, \infty]$ měřitelná, potom existuje posloupnost měřitelných jednoduchých funkcí $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že
$$0 \le \phi_1 \le \phi_2 \le \cdots \le f \quad \text{a} \quad \phi_n \to f.$$
Navíc $\phi_n \overset{B}{\rightrightarrows} f$ pro libovolnou množinu $B \subset X$, na níž je f omezená.

2. Je-li $f : X \to \mathbb{C}$ měřitelná, potom existuje posloupnost měřitelných jednoduchých funkcí $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že
$$0 \le |\phi_1| \le |\phi_2| \le \cdots \le |f| \quad \text{a} \quad \phi_n \to f.$$
Navíc $\phi_n \overset{B}{\rightrightarrows} f$ pro libovolnou množinu $B \subset X$, na níž je f omezená.

Důkaz. 1. Nechť $f : X \to [0, \infty]$ je měřitelná. Zafixujme $n \in \mathbb{N}_0$. Rozložíme $[0, \infty]$ na disjunktní intervaly $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ pro $0 \le k \le 2^{2n} - 1$ a $[2^n, \infty]$ a definujeme

$$\phi_n(x) := \begin{cases} k2^{-n}, & f(x) \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}),\ \text{kde } 0 \le k \le 2^{2n} - 1, \\ 2^n, & f(x) \in [2^n, \infty], \end{cases}$$

viz Obrázek 14. Ekvivalentně lze definici ϕ_n vyjádřit ve tvaru

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}} \frac{k}{2^n} \chi_{E_n^k}$$

kde

$$\begin{aligned} E_n^k &:= f^{-1}\left([k2^{-n}, (k+1)2^{-n})\right), \quad 0 \le k \le 2^{2n} - 1, \\ E_n^{2^{2n}} &:= f^{-1}\left([2^n, \infty]\right). \end{aligned}$$

Zřejmě ϕ_n je jednoduchá a měřitelná funkce, neboť z měřitelnosti f vyplývá, že $E_n^k \in \mathcal{M}$ pro každé $0 \le k \le 2^{2n}$. Dále z definice ϕ_n vyplývá, že $0 \le \phi_n \le \phi_{n+1}$ a $\phi_n \le f$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $0 \le f - \phi_n \le 2^{-n}$ na množině $X \setminus E_n^{2^{2n}}$, tj. tam, kde $f < 2^n$. Z toho plyne, že $\phi_n(x) \to f(x)$ pro každé $x \in X$, pro které je $f(x) < \infty$. Je-li $f(x) = \infty$, potom $x \in E_n^{2^{2n}}$, a proto $\phi_n(x) = 2^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy i v tomto případě $\phi_n(x) \to f(x) = \infty$. Celkem vidíme, že $\phi_n \to f$ na X.

Je-li $B \subset X$ množina, na níž je f omezená, tj. $\sup_{x\in B} f(x) < \infty$, potom $(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)(\forall n \ge n_0)(B \subset X \setminus E_n^{2^{2n}})$, a proto

$$\sup_{x\in B} |f(x) - \phi_n(x)| \le 2^{-n}$$

pro všechna $n \ge n_0$. Z toho plyne, že $\phi_n \overset{B}{\rightrightarrows} f$.

2. Nechť $f : X \to \mathbb{C}$ je měřitelná. Potom f můžeme rozložit

$$f = \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \operatorname{Im} f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + \mathrm{i}(\operatorname{Im} f)^+ - \mathrm{i}(\operatorname{Im} f)^-,$$

kde $(\operatorname{Re} f)^\pm$ a $(\operatorname{Im} f)^\pm$ jsou pozitivní a negativní části funkcí $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$. Podle Důsledků 5.8 a 5.11 jsou $(\operatorname{Re} f)^\pm$ a $(\operatorname{Im} f)^\pm$ měřitelné funkce s hodnotami v $[0,\infty)$. Můžeme na ně tedy aplikovat stejný postup jako v důkazu 1. tvrzení a dostaneme nezáporné měřitelné jednoduché funkce $\phi_n^{(\pm)}$ a $\psi_n^{(\pm)}$, které zespodu aproximují funkce $(\operatorname{Re} f)^\pm$ a $(\operatorname{Im} f)^\pm$.

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

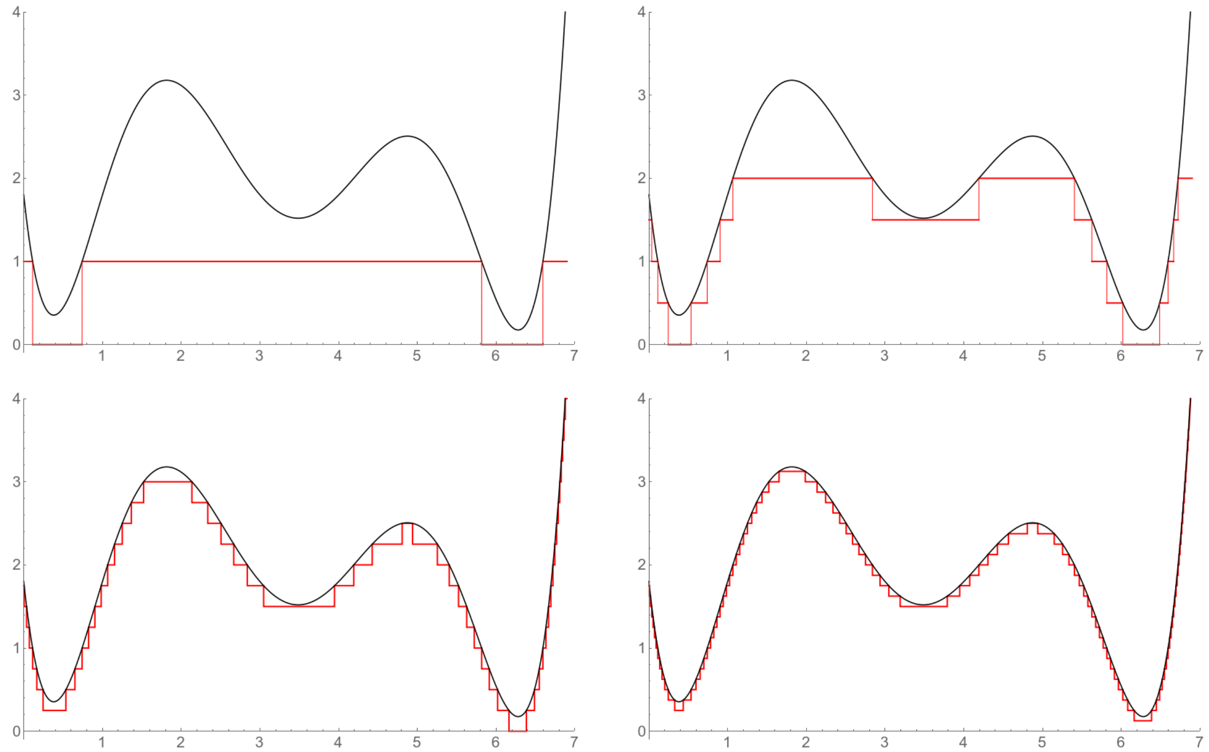
$$\phi_n := \phi_n^{(+)} - \phi_n^{(-)} + \mathrm{i}\left(\psi_n^{(+)} - \psi_n^{(-)}\right).$$

Funkce ϕ_n jsou jednoduché a měřitelné podle Věty 5.9. Protože $\phi_n^{(\pm)} \to (\operatorname{Re} f)^\pm$ a $\psi_n^{(\pm)} \to (\operatorname{Im} f)^\pm$, také $\phi_n \to f$. Je-li f omezená na $B \subset X$, jsou také $(\operatorname{Re} f)^\pm$ a $(\operatorname{Im} f)^\pm$ omezené na B, a tudíž $\phi_n \overset{B}{\rightrightarrows} f$, neboť $\phi_n^{(\pm)} \overset{B}{\rightrightarrows} (\operatorname{Re} f)^\pm$ a $\psi_n^{(\pm)} \overset{B}{\rightrightarrows} (\operatorname{Im} f)^\pm$.

Nakonec jelikož $0 \le \phi_n^{(\pm)} \le (\operatorname{Re} f)^\pm$ a $(\operatorname{Re} f)^+(\operatorname{Re} f)^- = 0$, máme také $\phi_n^{(+)}\phi_n^{(-)} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Analogicky $\psi_n^{(+)}\psi_n^{(-)} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Odtud dostaneme

$$\begin{aligned} |\phi_n|^2 &= \left(\phi_n^{(+)} - \phi_n^{(-)}\right)^2 + \left(\psi_n^{(+)} - \psi_n^{(-)}\right)^2 = \left(\phi_n^{(+)}\right)^2 + \left(\phi_n^{(-)}\right)^2 + \left(\psi_n^{(+)}\right)^2 + \left(\psi_n^{(-)}\right)^2 \\ &\le \left((\operatorname{Re} f)^+\right)^2 + \left((\operatorname{Re} f)^-\right)^2 + \left((\operatorname{Im} f)^+\right)^2 + \left((\operatorname{Im} f)^-\right)^2 \\ &= \left((\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^-\right)^2 + \left((\operatorname{Im} f)^+ - (\operatorname{Im} f)^-\right)^2 = (\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2 = |f|^2 \end{aligned}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Analogicky se také ověří nerovnost $|\phi_n| \le |\phi_{n+1}|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. $\square$



Obrázek 14: Jednoduché funkce ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 a ϕ_3 (červeně) z důkazu Věty 5.15 aproximující funkci f (černě).

Je-li na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{M})$ dána míra μ, je často výhodné při práci s měřitelnými funkcemi „ignorovat" chování těchto funkcí na μ-nulových množinách. Avšak při modifikaci funkce na μ-nulové množině se obecně nezachovává její měřitelnost. Podobný problém nastává pro limitní funkci μ-s.v. konvergentní posloupnosti měřitelných funkcí. Pokud je navíc μ úplná míra, měřitelnost se zachovává, jak ukazuje další věta. Nicméně uvažovat pouze úplné míry, by bylo dosti omezující, proto tento problém později odstraníme tak, že rozšíříme samotnou definici měřitelnosti funkce (viz Definice 5.40 a Věta 5.42).

Věta 5.16: Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je prostor s ***úplnou*** mírou μ.

1. Je-li f měřitelná funkce na X a $g = f$ μ-s.v. na X, potom je g také měřitelná.

2. Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost měřitelných funkcí na X a $f_n \to f$ μ-s.v., potom je f měřitelná.

Důkaz. 1. Rovnost $f(x) = g(x)$ pro μ-s.v. $x \in X$ znamená, že existuje μ-nulová množina $N \in \mathcal{M}$ taková, že

$$(\forall x \in X \setminus N)(f(x) = g(x)).$$

Buď B borelovská podmnožina z $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ resp. $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ v závislosti na tom, zda $f, g : X \to \mathbb{C}$, resp. $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$; věta platí pro obě možnosti. Potom

$$g^{-1}(B) = \left(g^{-1}(B) \setminus N\right) \cup \left(g^{-1}(B) \cap N\right) = \left(f^{-1}(B) \setminus N\right) \cup \left(g^{-1}(B) \cap N\right).$$

Z měřitelnosti f plyne, že $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$, a tudíž také $f^{-1}(B) \setminus N \in \mathcal{M}$. Dále protože $g^{-1}(B) \cap N \subset N$ a $\mu(N) = 0$, je $g^{-1}(B) \cap N \in \mathcal{M}$ (a také μ-nulová) z úplnosti míry μ na $\mathcal{M}$. Odtud vyvodíme, že $g^{-1}(B) \in \mathcal{M}$, a tedy g je měřitelná.

2. Podle předpokladu existuje μ-nulová množina $N \in \mathcal{M}$ taková, že

$$(\forall x \in X \setminus N)(f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)).$$

Předefinujme f_n na množině N následovně:

$$\tilde{f}_n(x) := \begin{cases} f_n(x), & x \in X \setminus N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

Potom $\tilde{f}_n = f_n$ μ-s.v., a proto jsou funkce $\tilde{f}_n$ měřitelné pro každé $n \in \mathbb{N}$ podle již dokázaného bodu 1. Dále posloupnost funkcí $\{\tilde{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na celém X k funkci

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in X \setminus N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

Podle Důsledku 5.12 je $\tilde{f}$ měřitelná, a protože $\tilde{f} = f$ μ-s.v., je také f měřitelná opět podle bodu 1. □

Věta 5.17: Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je prostor s mírou a $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ jeho zúplnění (viz Věta 4.30). Je-li f $\overline{\mathcal{M}}$-měřitelná funkce na X, potom existuje $\mathcal{M}$-měřitelná funkce g taková, že $f = g$ $\overline{\mu}$-skoro všude.

Důkaz. Důkaz provedeme ve třech krocích nejprve pro případ, že f je charakteristická, pak jednoduchá a nakonec obecná měřitelná funkce.

Je-li f charakteristická $\overline{\mathcal{M}}$-měřitelná funkce, tj. $f = \chi_E$ pro $E \in \overline{\mathcal{M}}$, plyne z definice zúplnění míry, viz Věta 4.30, že existují $F \subset N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$ a $E \setminus F \in \mathcal{M}$. Proto položíme-li $g := \chi_{E\setminus F}$, je $f = g$ všude mimo množinu F, která je $\overline{\mu}$-nulová.

Ověření, že tvrzení platí i pro jednoduchou $\overline{\mathcal{M}}$-měřitelnou funkci f, je přímočaré a je přenecháno čtenáři.

Nakonec předpokládejme, že f je obecná $\overline{\mathcal{M}}$-měřitelná funkce. Podle Věty 5.15 existují jednoduché $\overline{\mathcal{M}}$-měřitelné funkce ϕ_n takové, že $\phi_n \to f$ na X. Podle předchozí části důkazu existují $\mathcal{M}$-měřitelné funkce ψ_n takové, že $\psi_n = \phi_n$ $\overline{\mu}$-s.v. pro každé $n \in \mathbb{N}$. Označme $E_n \in \overline{\mathcal{M}}$ $\overline{\mu}$-nulové množiny, pro které platí, že $(\forall x \in X \setminus E_n)(\phi_n(x) = \psi_n(x))$. Podle Věty 4.26 je

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0,$$

a proto z definice zúplnění existuje μ-nulová množina $N \in \mathcal{M}$ taková, že

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset N.$$

Nyní stačí položit $g := \lim_{n\to\infty} \chi_{X\setminus N}\psi_n$. Potom g je $\mathcal{M}$-měřitelná podle Důsledku 5.12. Navíc $g = f$ všude mimo množinu N, tedy $\overline{\mu}$-skoro všude. □

5.2 Integrace nezáporných funkcí

V této části zavedeme integrál z **nezáporných** měřitelných funkcí vzhledem k míře μ v daném prostoru s mírou $(X, \mathcal{M}, \mu)$. K tomuto účelu si označíme

$$\mathscr{L}_+ = \mathscr{L}_+(X, \mathcal{M}) := \{ f : X \to [0, \infty] \mid f \text{ měřitelná } \}.$$

Nejprve definujeme integrál jednoduché nezáporné měřitelné funkce.

Definice 5.18 (Integrál jednoduché funkce)**:** Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je prostor s mírou a $\phi \in \mathscr{L}_+$ je jednoduchá funkce se standardní reprezentací

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i},$$

viz (47). Potom definujeme *integrál funkce ϕ vzhledem k μ* vztahem

$$\int \phi \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i).$$

Nemůže-li dojít k nejasnostem, budeme stručně psát $\int \phi$ místo $\int \phi \, \mathrm{d}\mu$. Dále podle potřeby budeme používat také značení:

$$\int_X \phi \, \mathrm{d}\mu = \int \phi(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \phi(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int \phi \, \mathrm{d}\mu.$$

Připomeňme, že v definici $\int \phi$ používáme konvenci $0 \cdot \infty = 0$. Všimněte si, že $\int \phi$ může být ∞. Je-li $A \in \mathcal{M}$ a $\phi \in \mathscr{L}_+$ jednoduchá, potom je také $\chi_A \phi \in \mathscr{L}_+$ jednoduchá a je přirozené definovat *integrál z jednoduché funkce na množině A* následujícím způsobem.

Definice 5.19 (Integrál jednoduché funkce na množině)**:** Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je prostor s mírou, $A \in \mathcal{M}$ a $\phi \in \mathscr{L}_+$ je jednoduchá funkce. Potom *integrál funkce ϕ vzhledem k μ na množině A* definujeme vztahem

$$\int_A \phi \, \mathrm{d}\mu := \int \chi_A \phi \, \mathrm{d}\mu$$

a podle potřeby používáme jedno z následujících značení:

$$\int_A \phi = \int_A \phi(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_A \phi \, \mathrm{d}\mu.$$

Pro určitost jsme v definici integrálu jednoduché funkce $\phi \in \mathscr{L}_+$ použili její standardní reprezentaci. Dále si ukážeme, že vzorec z definice integrálu vlastně nezávisí na tom, jakým způsobem je ϕ vyjádřena jako lineární kombinace charakteristických funkcí s nezápornými koeficienty a měřitelnými množinami.

Lemma 5.20: Nechť $\phi = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{F_j}$, kde $F_1, \dots, F_m \in \mathcal{M}$ a $b_1, \dots, b_m \geq 0$. Potom

$$\int \phi \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(F_j).$$

Důkaz. V důkazu ověříme, že pokud

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{F_j}, \tag{48}$$

kde $E_1, \dots, E_n, F_1, \dots, F_m \in \mathcal{M}$ a $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \geq 0$, potom

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(F_j),$$

z čehož vyplývá tvrzení lemma.

Množiny $E_1, \dots, E_n, F_1, \dots, F_m$ rozkládají X na 2^{m+n} po dvou disjunktních podmnožin, z nichž každá vznikne jako průnik některých množin z $E_1, \dots, E_n, F_1, \dots, F_m$ s doplňky těch zbývajících. Vynecháme-li prázdné množiny, dostaneme takto $k \leq 2^{m+n}$ po dvou disjunktních neprázdných množin $A_1, \dots, A_k$ takových, že $A_1 \cup \dots \cup A_k = X$. Potom

$$(\forall i \in \hat{n})(\exists I_i \subset \hat{k}) \left(E_i = \bigcup_{r \in I_i} A_r \right)$$

a podobně

$$(\forall j \in \hat{m})(\exists J_j \subset \hat{k}) \left(F_j = \bigcup_{r \in J_j} A_r \right).$$

Jelikož jsou množiny $A_1, \dots, A_k$ po dvou disjunktní a také měřitelné, plyne z aditivity μ, že

$$\mu(E_i) = \sum_{r \in I_i} \mu(A_r) \quad \text{a} \quad \mu(F_j) = \sum_{r \in J_j} \mu(A_r)$$

pro všechna $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$.

Zafixujme index $r \in \hat{k}$ a zvolme jedno pevné $x \in A_r$. Potom pro libovolné $i \in \hat{n}$ je bod $x \in E_i$, právě když $r \in I_i$. To lze ekvivalentně vyjádřit tak, že

$$(\forall i \in \hat{n})(\chi_{E_i}(x) = \chi_{I_i}(r))$$

a podobně

$$(\forall j \in \hat{m})(\chi_{F_j}(x) = \chi_{J_j}(r)).$$

Vyhodnotíme-li obě strany rovnosti (48) v bodě x, dává nám předpoklad (48) identitu

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{I_i}(r) = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{J_j}(r),$$

která platí pro každé $r \in \hat{k}$. Vynásobíme-li poslední rovnost $\mu(A_r)$ a následně sečteme přes všechna $r \in \hat{k}$, dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{r=1}^{k} \mu(A_r) \chi_{I_i}(r) = \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{r=1}^{k} \mu(A_r) \chi_{J_j}(r).$$

Nakonec si stačí uvědomit, že

$$\sum_{r=1}^{k} \mu(A_r)\chi_{I_i}(r) = \sum_{r\in I_i} \mu(A_r) = \mu(E_i)$$

a podobně

$$\sum_{r=1}^{k} \mu(A_r)\chi_{J_j}(r) = \sum_{r\in J_j} \mu(A_r) = \mu(F_j)$$

a důkaz je dokončen. □

Další věta shrnuje základní vlastnosti integrálu jednoduchých funkcí.

Věta 5.21: Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je prostor s mírou a $\phi, \psi \in \mathscr{L}_+$ jednoduché funkce. Potom platí:

1. Je-li $a \geq 0$, potom $\int a\phi = a \int \phi$.
2. $\int(\phi + \psi) = \int \phi + \int \psi$.
3. Je-li $\phi \leq \psi$, potom $\int \phi \leq \int \psi$.
4. Zobrazení $\mu_\phi : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ definované vztahem

$$\mu_\phi(A) := \int_A \phi \,\mathrm{d}\mu$$

je míra na $\mathcal{M}$.

Důkaz. 1. Plyne okamžitě z definice.

2. Nechť

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{E_i} \quad \text{a} \quad \psi = \sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{F_j}$$

jsou standardní reprezentace ϕ a ψ. Protože množiny $E_1, \dots E_n$ jsou po dvou disjunktní a $X = \cup_{i=1}^{n} E_i$ a podobně množiny $F_1, \dots F_m$. Z toho plyne, že

$$(\forall i \in \hat{n}) \left(E_i = \bigcup_{j=1}^{m} (E_i \cap F_j) \right), \quad (\forall j \in \hat{m}) \left(F_j = \bigcup_{i=1}^{n} (E_i \cap F_j) \right)$$

a

$$(\forall i \in \hat{n}) \left(\chi_{E_i} = \sum_{j=1}^{m} \chi_{E_i\cap F_j} \right), \quad (\forall j \in \hat{m}) \left(\chi_{F_j} = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i\cap F_j} \right).$$

Potom

$$\phi+\psi = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{E_i} + \sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{F_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i\chi_{E_i\cap F_j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{E_i\cap F_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_i+b_j)\chi_{E_i\cap F_j},$$

a tedy

$$\begin{aligned}\int(\phi+\psi) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i+b_j)\mu\left(E_i\cap F_j\right) = \sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{m}\mu\left(E_i\cap F_j\right)+\sum_{j=1}^{m}b_j\sum_{i=1}^{n}\mu\left(E_i\cap F_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}a_i\mu(E_i)+\sum_{j=1}^{m}b_j\mu(F_j) = \int\phi+\int\psi\end{aligned}$$

z aditivity míry μ.

3. Ještě jednou využijeme reprezentací funkcí ϕ a ψ ve tvaru

$$\phi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_i\chi_{E_i\cap F_j}\quad \text{a}\quad \psi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_j\chi_{E_i\cap F_j}$$

jako v důkazu bodu 2. Z předpokladu $\phi\le\psi$ plyne, že $a_i\le b_j$, kdykoliv je $E_i\cap F_j\neq\emptyset$. Odtud plyne

$$\int\phi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_i\mu(E_i\cap F_j)\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_j\mu(E_i\cap F_j)=\int\psi.$$

4. Zřejmě

$$\mu_\phi(\emptyset)=\int_\emptyset\phi\,\mathrm{d}\mu=\int 0\,\mathrm{d}\mu=0.$$

Dále nechť je $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{M}$ a $\phi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}$. Potom pro $A:=\cup_{k=1}^{\infty}A_k$ dostaneme ze σ-aditivity μ rovnost

$$\mu_\phi(A)=\int_A\phi\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(A\cap E_i)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(A_k\cap E_i)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}\phi\,\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_\phi(A_k),$$

a tedy μ_ϕ je σ-aditivní. □

Nyní si rozšíříme definici integrálu na libovolnou nezápornou měřitelnou funkci.

Definice 5.22 (Integrál nezáporné funkce)**:** Nechť $(X,\mathcal{M},\mu)$ je prostor s mírou a $f\in\mathscr{L}_+$. *Integrál funkce f vzhledem k μ* definujeme vztahem

$$\int f\mathrm{d}\mu:=\sup\left\{\int\phi\,\mathrm{d}\mu\;\middle|\;\phi\in\mathscr{L}_+\text{ je jednoduchá a }\phi\le f\right\}.$$

Podobně pro $A\in\mathcal{M}$ definujeme *integrál f vzhledem k μ na množině A* vztahem

$$\int_A f\mathrm{d}\mu:=\sup\left\{\int_A\phi\,\mathrm{d}\mu\;\middle|\;\phi\in\mathscr{L}_+\text{ je jednoduchá a }\phi\le f\right\}.$$

Poznámka: Všimněte si, nyní máme dvě definice integrálu pro nezáporné jednoduché funkce, avšak nejsou v rozporu. Hodnota $\int f$ pro jednoduchou funkci f je stejná v Definici 5.22 jako v Definici 5.18, neboť funkce f je jednou z funkcí v supremu z Definice 5.22.

Z Definice 5.22 a Věty 5.21 jednoduše plyne, že pro $f, g \in \mathscr{L}_+$, $f \leq g$, platí

$$\int f \leq \int g.$$

Podobně pro libovolné $f \in \mathscr{L}_+$ a $c \geq 0$ je $cf \in \mathscr{L}_+$ a platí

$$\int cf = c \int f.$$

Nyní si můžeme ukázat první ze tří fundamentálních limitních vět teorie integrálu - tzv. *Větu o monotónní konvergenci* známou také jako *Léviho větu.* Předpoklad, že **je dán prostor s mírou** $(X, \mathcal{M}, \mu)$, bude platit pro každou z následujících vět, aniž bychom to explicitně v každé větě zmiňovali.

Věta 5.23 (O monotónní konvergenci)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí z $\mathscr{L}_+$ taková, že $f_n \leq f_{n+1}$ pro každé n. Potom funkce $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ $(= \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n)$ je z $\mathscr{L}_+$ a platí:

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Jelikož je posloupnost $\{\int f_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající, $\lim_{n\to\infty} \int f_n$ existuje v $[0, \infty]$. Dále z předpokladů a Věty 5.10 plyne, že $f \in \mathscr{L}_+$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n \leq f$. Odtud máme

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \leq \int f \mathrm{d}\mu.$$

Stačí tedy dokázat opačnou nerovnost.

Zvolme pevně $\alpha \in (0, 1)$ a jednoduchou funkci $\phi \in \mathscr{L}_+$ takovou, že $\phi \leq f$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme množiny

$$E_n := \{x \in X \mid f_n(x) \geq \alpha\phi(x)\}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $E_n \in \mathcal{M}$, protože $E_n = (f_n - \alpha\phi)^{-1}([0, \infty])$ a $f_n - \alpha\phi$ je měřitelná funkce. Navíc platí $E_n \subset E_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Dále

$$\int f_n \mathrm{d}\mu \geq \int \chi_{E_n} f_n \mathrm{d}\mu = \int_{E_n} f_n \mathrm{d}\mu \geq \alpha \int_{E_n} \phi \, \mathrm{d}\mu \tag{49}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. S využitím 4. tvrzení Věty 5.21 a spojitosti míry μ_ϕ zdola, viz Věta 4.24, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \phi \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_\phi(E_n) = \mu_\phi(X) = \int \phi \, \mathrm{d}\mu.$$

Proto limitním přechodem $n \to \infty$ v nerovnosti (49) dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \geq \alpha \int \phi \, \mathrm{d}\mu.$$

Tato nerovnost platí pro každé $\alpha \in (0,1)$, a proto opět limitním přechodem $\alpha \to 1-$ odvodíme nerovnost

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \geq \int \phi \,\mathrm{d}\mu.$$

Nyní stačí vzít supremum přes všechny jednoduché funkce $\phi \in \mathscr{L}_+$ takové, že $\phi \leq f$, a dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \geq \int f \mathrm{d}\mu.$$

$\square$

Věta o monotónní konvergenci je zcela zásadní nástroj v mnoha situacích. Mimo to má pro nás následující bezprostřední důsledek. Jen velmi zřídka můžeme spočítat integrál funkce $f \in \mathscr{L}_+$ přímo z Definice 5.22, protože je třeba najít supremum přes v jistém smyslu složitou a typicky nespočetnou množinu jednoduchých funkcí. Věta 5.23 nám říká, že stačí najít jakoukoliv neklesající posloupnost jednoduchých funkcí $\phi_n \in \mathscr{L}_+$, která bodově konverguje f, a spočítat $\lim_{n\to\infty} \int \phi_n$. Navíc Věta 5.15 garantuje existenci takové posloupnosti.

Příklad 5.24: Uvažujme $x_0 \in \mathbb{R}$ a $\mu = \delta_{x_0}$ Diracovu delta míru na $\mathbb{R}$, tzn., že $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = 2^{\mathbb{R}}$ a pro každé $E \subset \mathbb{R}$ máme

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x_0 \in E, \\ 0, & \text{je-li } x_0 \notin E. \end{cases}$$

Není těžké si rozmyslet, že z Definice 5.18 a Vět 5.15 a 5.23 plyne, že pro každé $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ platí:

$$\int f \mathrm{d}\delta_{x_0} = f(x_0)$$

(rozmyslete).

Příklad 5.25: Uvažujme počítací míru μ na $\mathbb{N}$, tzn., že $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = 2^{\mathbb{N}}$ a $\mu(E)$ je počet prvků množiny $E \subset \mathbb{N}$. Funkce $f \in \mathscr{L}_+$ jsou v tomto případě nezáporné posloupnosti, a proto místo $f(n)$ budeme psát f_n. Všimněte si, že je-li nezáporná funkce ϕ nulová od jistého indexu, tj. $(\exists j_0 \in \mathbb{N})(\forall j \geq j_0)(\phi_j = 0)$, potom je ϕ jednoduchá a z Definice 5.18 plyne, že

$$\int \phi \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{j_0} \phi_j,$$

neboť ϕ lze reprezentovat ve tvaru $\phi = \sum_{j=1}^{j_0} \phi_j \chi_{\{j\}}$.

Obecnou posloupnost $f \in \mathscr{L}_+$ lze aproximovat zespodu posloupností jednoduchých funkcí tvaru $\sum_{j=1}^{n} f_j \chi_{\{j\}}$, a proto je

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_j = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$$

podle Věty 5.23. Připomeňme, že poslední výraz může být ∞. Vidíme tedy, že pro počítací míru μ, je integrál vlastně číselná řada (prozatím s nezápornými členy). Mnoho vět, které platí pro číselné řady, lze získat jako speciální případ obecných vět teorie integrálu.

Jako první aplikaci Věty o monotónní konvergenci si dokážeme následující tvrzení, ze kterého speciálně vyplývá aditivita integrálu na $\mathscr{L}_+$.

Věta 5.26: Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí z $\mathscr{L}_+$ a $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Potom je $f \in \mathscr{L}_+$ a platí:

$$\int f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Speciálně pro $f, g \in \mathscr{L}_+$ platí:

$$\int (f+g) \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu + \int g \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Nejprve uvažujme dvě funkce $f_1, f_2 \in \mathscr{L}_+$. Podle Věty 5.15 existují neklesající posloupnosti jednoduchých funkcí $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $\mathscr{L}_+$ takové, že $\phi_n \le f_1$ a $\psi_n \le f_2$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\phi_n \to f_1$ a $\psi_n \to f_2$. Potom $\{\phi_n + \psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je také neklesající posloupnost jednoduchých funkcí z $\mathscr{L}_+$ taková, že $\phi_n + \psi_n \le f_1 + f_2$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\phi_n + \psi_n \to f_1 + f_2$. Z Věty 5.23 o monotónní konvergenci a 2. tvrzení Věty 5.21 plyne, že

$$\int (f_1 + f_2) \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int (\phi_n + \psi_n)\, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n \mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n \mathrm{d}\mu = \int f_1 \mathrm{d}\mu + \int f_2 \mathrm{d}\mu.$$

Dále indukcí snadno dokážeme, že pro každé $N \in \mathbb{N}$ a $f_1, \dots, f_N \in \mathscr{L}_+$ platí:

$$\int \sum_{n=1}^{N} f_n \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{N} \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Nyní stačí v poslední rovnosti poslat $N \to \infty$ a opět použít Větu 5.23 o monotónní konvergenci. Odtud plyne, že $f \in \mathscr{L}_+$ a také rovnost

$$\int f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Důsledek 5.27: Nechť $a_{i,j} \ge 0$ pro všechna $i, j \in \mathbb{N}$, potom

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}.$$

Důkaz. Ve Větě 5.26 stačí vzít za μ počítací míru na $\mathbb{N}$. □

Věta 5.28: Buď $f \in \mathscr{L}_+$. Potom platí:

$$\int f \mathrm{d}\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \quad \mu\text{-s.v.}$$

Důkaz. Předpokládejme nejdřív, že f je jednoduchá. Je-li f tvaru $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$, kde $a_i \geq 0$ a $E_i \in \mathcal{M}$, potom

$$\int f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall i \in \hat{n})\, (a_i \mu(E_i) = 0)\,,$$

neboli $\int f \mathrm{d}\mu = 0$, právě když $a_i = 0$, kdykoliv je $\mu(E_i) > 0$, což znamená, že $f = 0$ μ-s.v.

Nyní předpokládejme, že je dána obecná funkce $f \in \mathscr{L}_+$ taková, že $f = 0$ μ-s.v. Potom libovolná jednoduchá funkce $\phi \in \mathscr{L}_+$ splňující $0 \leq \phi \leq f$ je také skoro všude nulová, tj. $\phi = 0$ μ-s.v. Tudíž

$$\begin{aligned}\int f \mathrm{d}\mu &= \sup \left\{ \int \phi \,\mathrm{d}\mu \,\middle|\, \phi \in \mathscr{L}_+ \text{ je jednoduchá a } \phi \leq f \right\} \\ &= \sup \left\{ \int \phi \,\mathrm{d}\mu \,\middle|\, \phi \in \mathscr{L}_+ \text{ je jednoduchá a } \phi = 0 \ \mu\text{-s.v.} \right\} = 0.\end{aligned}$$

Nechť naopak $f \in \mathscr{L}_+$ splňuje $\int f \mathrm{d}\mu = 0$. Pro spor předpokládejme, že f není μ-s.v. nulová. Zaveďme pomocné měřitelné množiny

$$E_n := f^{-1}\left(\left(\frac{1}{n}, \infty\right)\right) = \left\{ x \in X \,\middle|\, f(x) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Potom

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \{x \in X \mid f(x) > 0\}.$$

Jelikož f není μ-s.v. nulová, $\mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) > 0$, a proto existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\mu(E_n) > 0$. Z definice množiny E_n plyne, že

$$f > \frac{1}{n} \chi_{E_n},$$

a proto

$$\int f \mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{n} \int \chi_{E_n} \mathrm{d}\mu = \frac{\mu(E_n)}{n} > 0,$$

což je spor s předpokladem $\int f \mathrm{d}\mu = 0$. $\square$

Důsledek 5.29: Pro funkce $f, g \in \mathscr{L}_+$ platí implikace:

$$f = g \ \mu\text{-s.v.} \quad \Rightarrow \quad \int f \mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu. \tag{50}$$

Poznámka: Opačná implikace v (50) samozřejmě neplatí. Stačí uvážit např. Lebesgueovu míru $\mu = m$ a funkce $f = \chi_{(0,1)}$ a $g = \chi_{(-1,0)}$.

Důkaz Důsledku 5.29. Je-li $f = g$ μ-s.v., pak existuje μ-nulová množina $E \in \mathcal{M}$ tak, že $(\forall x \in X \setminus E)(f(x) = g(x))$. Potom $f\chi_{E^c} = g\chi_{E^c}$. Uvážíme-li ještě, že $f = f\chi_E + f\chi_{E^c}$ a $f\chi_E = 0$ μ-s.v. a analogicky pro funkci g, potom z aditivity integrálu a Věty 5.28 dostaneme

$$\int f \mathrm{d}\mu = \underbrace{\int f\chi_E \,\mathrm{d}\mu}_{=0} + \int f\chi_{E^c} \,\mathrm{d}\mu = \underbrace{\int g\chi_E \,\mathrm{d}\mu}_{=0} + \int g\chi_{E^c} \,\mathrm{d}\mu = \int g \mathrm{d}\mu.$$

□

Předpoklady Věty o monotónní konvergenci lze mírně zeslabit, neboť, jak už jsme naznačili, chování funkcí na množinách nulové míry můžeme při integraci zanedbávat.

Důsledek 5.30: Nechť f a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou funkce z $\mathscr{L}_+$, které splňují:

i. $(\forall n \in \mathbb{N})(f_n \leq f_{n+1}$ μ-s.v.$)$,

ii. $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-s.v.

Potom platí:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Z předpokladu i. plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje μ-nulová množina $E_n \in \mathcal{M}$ taková, že $(\forall x \in X \setminus E_n)(f_n(x) \leq f_{n+1}(x))$. Podobně předpoklad ii. implikuje existenci μ-nulové množiny $E_0 \in \mathcal{M}$ takové, že $(\forall x \in X \setminus E_0)(f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x))$. Položíme-li

$$E := \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n,$$

potom podle Věty 4.26 je $\mu(E) = 0$ a funkce $f\chi_{E^c}$ a $\{f_n\chi_{E^c}\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovují předpokladům Věty 5.23, ze které plyne

$$\int f\chi_{E^c} \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\chi_{E^c} \mathrm{d}\mu.$$

Protože $\mu(E) = 0$, je $f = f\chi_{E^c}$ μ-s.v. a podobně $f_n = f_n\chi_{E^c}$ μ-s.v. pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tudíž s využitím Důsledku 5.29 dostáváme

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int f\chi_{E^c} \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\chi_{E^c} \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

□

Předpoklad monotonie ve Větě o monotónní konvergenci musí být splněn alespoň μ-s.v., jinak věta neplatí. Stačí uvážit např. posloupnosti funkcí $f_n := \chi_{(n,n+1)}$ nebo $g_n := n\chi_{(0,1/n)}$, které obě bodově konvergují k nulové funkci na $\mathbb{R}$. Avšak je-li $\mu = m$ Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$, potom

$$\int f_n \mathrm{d}m = m((n, n+1)) = 1 \quad \text{a} \quad \int g_n \mathrm{d}m = n \cdot m\left(\left(0, \frac{1}{n}\right)\right) = 1$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tedy limita posloupnosti integrálů není integrál limitní funkce, který by v tomto příkladě byl 0. Jedna nerovnost ovšem platí vždy, což je důsledek další fundamentální limitní věty teorie integrálu - tzv. *Fatouovo lemma.*

Lemma 5.31 (Fatou)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}_+$, potom

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Měřitelnost všech funkcí v tomto důkazu je zaručena předpokladem a Větou 5.10. Buď $k \in \mathbb{N}$. Pro každé $j \geq k$ platí

$$\inf_{n\geq k} f_n \leq f_j,$$

z čehož plyne, že

$$\int \inf_{n\geq k} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int f_j \, \mathrm{d}\mu.$$

Vezmeme-li v této nerovnosti infimum přes všechna $j \in \mathbb{N}$, $j \geq k$, máme

$$\int \inf_{n\geq k} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \inf_{j\geq k} \int f_j \, \mathrm{d}\mu.$$

Protože $\{\inf_{n\geq k} f_n\}_{k=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost funkcí z $\mathcal{L}_+$, můžeme v poslední nerovnosti poslat $k \to \infty$ a aplikovat Větu 5.23 o monotónní konvergenci, čímž dostaneme

$$\begin{aligned}\int (\liminf_{n\to\infty} f_n) \mathrm{d}\mu &= \int (\lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} f_n) \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int (\inf_{n\geq k} f_n) \mathrm{d}\mu \leq \lim_{k\to\infty} \inf_{j\geq k} \int f_j \, \mathrm{d}\mu \\ &= \liminf_{j\to\infty} \int f_j \, \mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka: Nerovnost v Lemma 5.31 může být ostrá, jak ukazují příklady zmíněné před ním.

Důsledek 5.32: Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}_+$, $f \in \mathscr{L}_+$ a $f_n \to f$ μ-s.v. Potom

$$\int f \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Z předpokladu $f_n \to f$ μ-s.v. vyplývá, že existuje μ-nulová množina $E \in \mathcal{M}$ tak, že $(\forall x \in X \setminus E)(f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x))$. Odtud máme

$$(\forall x \in X)(f(x)\chi_{E^c}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\chi_{E^c}(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\chi_{E^c}(x)).$$

Dále rovnosti $f = f\chi_{E^c}$ a $f_n = f_n\chi_{E^c}$ platí μ-skoro všude a pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Proto aplikací Fatouova Lemma 5.31 na posloupnost $\{f_n\chi_{E^c}\}_{n=1}^{\infty}$ a Důsledku 5.29 dostane

$$\int f\chi_{E^c} \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\chi_{E^c} \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

□

Následující jednoduché pozorování, že funkce s konečným integrálem je skoro všude konečná, budeme potřebovat později.

Lemma 5.33: Nechť $f \in \mathscr{L}_+$ a $\int f \mathrm{d}\mu < \infty$. Potom

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) = 0.$$

Důkaz. Pro spor předpokládejme naopak, že $\mu(E_\infty) > 0$, kde

$$E_\infty := \{x \in X \mid f(x) = \infty\}.$$

Protože $f \geq f\chi_{E_\infty}$, máme

$$\int f \mathrm{d}\mu \geq \int f\chi_{E_\infty} \mathrm{d}\mu = \infty \cdot \mu(E_\infty) = \infty,$$

což je ve sporu s předpokladem $\int f \mathrm{d}\mu < \infty$. □

Nakonec si dokážeme větu, která je rozšířením 4. tvrzení Věty 5.21. Existuje velmi důležitá tzv. *Radon–Nikodymova věta*, která je v jistém smyslu obrácení následujícího tvrzení, ale tu si dokážeme až mnohem později.

Věta 5.34: Nechť $f \in \mathscr{L}_+$ a $\mu_f : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ je definována vztahem

$$\mu_f(E) := \int_E f \mathrm{d}\mu.$$

Potom μ_f je míra na $\mathcal{M}$ a pro každé $g \in \mathscr{L}_+$ platí:

$$\int g \,\mathrm{d}\mu_f = \int fg \,\mathrm{d}\mu. \tag{51}$$

Důkaz. Nejprve dokážeme, že μ_f je míra na $\mathcal{M}$. Zřejmě $\mu_f(\emptyset) = 0$, a proto stačí ověřit σ-aditivitu μ_f. Nechť $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ jsou po dvou disjunktní a $E := \cup_{n=1}^\infty E_n$. Všimněte si, že

$$f\chi_E = \sum_{n=1}^\infty f\chi_{E_n},$$

a proto s použitím Věty 5.26 dostaneme

$$\mu_f(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu = \int f\chi_E \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int f\chi_{E_n} \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \mu_f(E_n),$$

což jsme chtěli ověřit.

Dále dokážeme rovnost (51). Uvažujme nejdříve funkci $g = \chi_E \in \mathscr{L}_+$, kde $E \in \mathcal{M}$, potom

$$\int g \mathrm{d}\mu_f = \mu_f(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu = \int fg \mathrm{d}\mu.$$

Odtud a z aditivity integrálu plyne, že (51) platí pro každou jednoduchou funkci $g \in \mathscr{L}_+$. Nyní k důkazu rovnosti (51) pro obecnou funkci $g \in \mathscr{L}_+$ stačí aproximovat g zespodu jednoduchými funkcemi jako ve Větě 5.15 a použít Větu 5.23 o monotónní konvergenci (ověřte). □

5.3 Integrace reálných a komplexních funkcí

Budeme pokračovat v konstrukci integrálu a definici si rozšíříme z měřitelných nezáporných funkcí nejprve na měřitelné funkce reálné a poté komplexní, tzn. s hodnotami v $\mathbb{R}$ a v $\mathbb{C}$. Stále předpokládáme, že je daný prostor s mírou $(X, \mathcal{M}, \mu)$, aniž bychom to explicitně zmiňovali.

K rozšíření integrálu z nezáporných funkcí na reálné, využijeme rozkladu funkce f na pozitivní a negativní část:

$$f = f^+ - f^-,$$

viz Definice 5.13. Je-li f měřitelná, jsou $f^\pm \in \mathscr{L}_+$, a tudíž integrály $\int f^\pm$ jsou dobře definované. Nyní je jasné, jakým způsobem rozšířit definici integrálu na f. Jediné (kromě měřitelnosti f), co je třeba ošetřit, je, abychom v definici integrálu nedostali výraz „$\infty - \infty$“. Rozšíření integrálu z reálných na komplexní funkce přirozeně využívá rozkladu funkce f na reálnou a imaginární část, $f = \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \operatorname{Im} f$.

Definice 5.35 (Integrál reálné a komplexní funkce)**:** Buď $f : X \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce taková, že alespoň jeden integrál z $\int f^+ \mathrm{d}\mu$ a $\int f^- \mathrm{d}\mu$ je konečný. Potom definujeme

$$\int f \mathrm{d}\mu := \int f^+ \mathrm{d}\mu - \int f^- \mathrm{d}\mu.$$

Je-li $f : X \to \mathbb{C}$ měřitelná funkce, potom klademe

$$\int f \mathrm{d}\mu := \int \operatorname{Re} f \mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int \operatorname{Im} f \mathrm{d}\mu,$$

mají-li oba integrály napravo smysl podle definice výše.

Navíc, je-li $f : X \to \mathbb{C}$ měřitelná na $E \in \mathcal{M}$, definujeme

$$\int_E f \mathrm{d}\mu := \int f \chi_E \, \mathrm{d}\mu,$$

je-li integrál napravo dobře definován ve smyslu definice výše.

Hodnota integrálu z předchozí definice nemusí být konečná, v aplikacích však obvykle pracujeme s funkcemi, jež mají konečný integrál. Tyto funkce nazýváme *integrabilní*. Všimněte si, že $f : X \to \mathbb{R}$ má konečný integrál, pokud oba $\int f^+ \mathrm{d}\mu < \infty$ i $\int f^- \mathrm{d}\mu < \infty$. Protože $|f| = f_+ + f_-$, lze integrabilitu f stručně vyjádřit následovně:

$$f \text{ je integrabilní} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ je měřitelná a } \int |f| \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Stejnou ekvivalenci lze napsat i pro funkce s komplexními hodnotami, tzn., že $f : X \to \mathbb{C}$ nazveme integrabilní, právě když jsou obě reálné funkce $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ integrabilní v předchozím smyslu.

Definice 5.36 (Integrabilní funkce, prostor integrabilních funkcí)**:** Funkci $f : X \to \mathbb{C}$ nazveme *integrabilní*, právě když je f měřitelná a $\int |f| \mathrm{d}\mu < \infty$. Obecněji řekneme, že f je *integrabilní na množině* $E \in \mathcal{M}$, právě když je f měřitelná na E a $\int_E |f| \mathrm{d}\mu < \infty$. Dále pro prostor integrabilních komplexních funkcí používáme následující značení:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(X, \mathcal{M}, \mu) = \mathscr{L}(X, \mu) = \mathscr{L}(\mu) := \{ f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ integrabilní} \}.$$

Věta 5.37: Je-li $f, g \in \mathscr{L}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$, potom $f + \alpha g \in \mathscr{L}$ a platí:

$$\int (f + \alpha g) \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu + \alpha \int g \mathrm{d}\mu.$$

Tedy $\mathscr{L}$ je lineární prostor nad $\mathbb{C}$ a integrál je lineární funkcionál na $\mathscr{L}$.

Důkaz. Je-li $f, g \in \mathscr{L}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$, potom je $\alpha f + g$ měřitelná, a protože $|f + \alpha g| \leq |f| + |\alpha||g|$, máme také

$$\int |f + \alpha g| \mathrm{d}\mu \leq \int (|f| + |\alpha||g|) \, \mathrm{d}\mu = \int |f| \mathrm{d}\mu + |\alpha| \int |g| \mathrm{d}\mu,$$

díky již známým vlastnostem integrálu na $\mathscr{L}_+$. Tedy $f + \alpha g \in \mathscr{L}$.

Druhé tvrzení bude dokázáno, ověříme-li, že

$$\int (f + g) \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu + \int g \mathrm{d}\mu \tag{52}$$

a

$$\int (\alpha f) \mathrm{d}\mu = \alpha \int f \mathrm{d}\mu. \tag{53}$$

Nejprve ověříme aditivitu (52). Všimněte si, že pokud ověříme (52) pro dvě reálné funkce $f, g \in \mathscr{L}$, bude (52) platit také pro dvě obecně komplexní funkce $f, g \in \mathscr{L}$, jak vyplývá jednoduše z definice integrálu. Předpokládejme tedy, že $f, g \in \mathscr{L}$ jsou reálné funkce a označme $h := f + g$. Potom

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

neboli

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+.$$

Z aditivity integrálu na $\mathscr{L}_+$, viz Věta 5.26, vyplývá rovnost

$$\int h^+ \mathrm{d}\mu + \int f^- \mathrm{d}\mu + \int g^- \mathrm{d}\mu = \int h^- \mathrm{d}\mu + \int f^+ \mathrm{d}\mu + \int g^+ \mathrm{d}\mu,$$

která po přeskládání implikuje rovnost

$$\int h \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu + \int g \mathrm{d}\mu,$$

což jsme chtěli dokázat.

Pro důkaz homogenity (53) předpokládejme nejprve, že $f \in \mathscr{L}$ je reálná funkce a $\alpha \in \mathbb{R}$. Je-li $\alpha \geq 0$, platí $(\alpha f)^\pm = \alpha f^\pm$ a rovnost (53) je snadné ověřit. Je-li naopak $\alpha < 0$, potom máme

$$\begin{aligned}\int (\alpha f) \mathrm{d}\mu &= \int (\alpha f)^+ \mathrm{d}\mu - \int (\alpha f)^- \mathrm{d}\mu = \int (-\alpha)(-f)^+ \mathrm{d}\mu - \int (-\alpha)(-f)^- \mathrm{d}\mu \\ &= -\alpha \left(\int (-f)^+ \mathrm{d}\mu - \int (-f)^- \mathrm{d}\mu \right) = -\alpha \left(\int f^- \mathrm{d}\mu - \int f^+ \mathrm{d}\mu \right) = \alpha \int f \mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že $(-f)^{\pm} = f^{\mp}$. K důkazu obecného případu s $\alpha \in \mathbb{C}$ a komplexní funkcí $f \in \mathscr{L}$ nyní stačí použít již dokázané vlastnosti a definici integrálu komplexní funkce. Označíme-li pro jednoduchost $a := \operatorname{Re}\alpha$, $b := \operatorname{Im}\alpha$ a podobně $g := \operatorname{Re} f$, $h := \operatorname{Im} f$, dostaneme

$$\begin{aligned}\int \alpha f \mathrm{d}\mu &= \int (a+\mathrm{i}b)(g+\mathrm{i}h)\mathrm{d}\mu = \int \left((ag-bh)+\mathrm{i}(ah+bg)\right)\mathrm{d}\mu \\ &= \int (ag-bh)\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int (ah+bg)\mathrm{d}\mu = a\int g\mathrm{d}\mu - b\int h\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}a\int h\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}b\int g\mathrm{d}\mu \\ &= (a+\mathrm{i}b)\left(\int g\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int h\mathrm{d}\mu\right) = \alpha\int f\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

□

Věta 5.38: Je-li $f \in \mathscr{L}$, potom

$$\left|\int f\mathrm{d}\mu\right| \leq \int |f|\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Nerovnost platí triviálně, pokud $\int f\mathrm{d}\mu = 0$ a téměř triviálně, je-li $f \in \mathscr{L}$ reálná, neboť

$$\left|\int f\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int f^{+}\mathrm{d}\mu - \int f^{-}\mathrm{d}\mu\right| \leq \int f^{+}\mathrm{d}\mu + \int f^{-}\mathrm{d}\mu = \int (f^{+}+f^{-})\mathrm{d}\mu = \int |f|\mathrm{d}\mu.$$

Předpokládejme tedy, že $f \in \mathscr{L}$ a $\int f\mathrm{d}\mu \neq 0$. Položme

$$\alpha := \frac{\overline{\int f\mathrm{d}\mu}}{\left|\int f\mathrm{d}\mu\right|}.$$

Protože

$$\left|\int f\mathrm{d}\mu\right| = \alpha\int f\mathrm{d}\mu = \int \alpha f\mathrm{d}\mu,$$

je číslo $\int \alpha f\mathrm{d}\mu$ reálné (dokonce nezáporné), a tudíž

$$\int \alpha f\mathrm{d}\mu = \operatorname{Re}\int \alpha f\mathrm{d}\mu = \int \operatorname{Re}(\alpha f)\,\mathrm{d}\mu.$$

Využijeme-li navíc toho, že nerovnost jsme již dokázali pro reálné funkce, dostaneme

$$\left|\int f\mathrm{d}\mu\right| = \int \operatorname{Re}(\alpha f)\,\mathrm{d}\mu \leq \int |\operatorname{Re}(\alpha f)|\,\mathrm{d}\mu \leq \int |\alpha f|\,\mathrm{d}\mu = |\alpha|\int |f|\mathrm{d}\mu = \int |f|\mathrm{d}\mu,$$

neboť $|\alpha| = 1$. □

Věta 5.39: Nechť $f, g \in \mathscr{L}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $f = g$ μ-s.v.,

2. $\int |f-g|\mathrm{d}\mu = 0$,

3. $(\forall E \in \mathcal{M})\left(\int_E f\mathrm{d}\mu = \int_E g\mathrm{d}\mu\right)$.

Důkaz. Ekvivalence 1. ⇔ 2. vyplývá z Věty 5.28, neboť $|f-g| \in \mathscr{L}_+$ pro $f, g \in \mathscr{L}$ a $f = g$ μ-s.v., právě když $|f-g| = 0$ μ-s.v.

Implikace 2. ⇒ 3.: Pokud je $\int |f-g|\mathrm{d}\mu = 0$ a $E \in \mathcal{M}$, potom s využitím Věty 5.38 máme

$$\left|\int_E f\mathrm{d}\mu - \int_E g\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int \chi_E(f-g)\mathrm{d}\mu\right| \leq \int \chi_E|f-g|\mathrm{d}\mu \leq \int |f-g|\mathrm{d}\mu = 0,$$

a proto $\int_E f\mathrm{d}\mu = \int_E g\mathrm{d}\mu$.

Implikace 3. ⇒ 1.: Důkaz provedeme sporem. Všimněte si, že označíme-li $u := \mathrm{Re}(f-g)$ a $v := \mathrm{Im}(f-g)$, potom

$$f = g \quad \mu\text{-s.v.} \quad \Leftrightarrow \quad u = v = 0 \quad \mu\text{-s.v.} \quad \Leftrightarrow \quad u^+ = u^- = v^+ = v^- = 0 \quad \mu\text{-s.v.}$$

Pokud tedy $f \neq g$ μ-s.v., potom některá z funkcí u^+, u^-, v^+, v^- není μ-s.v. nulová. Nechť je to např. u^+. Potom pro množinu $E := \{x \in X \mid u^+(x) > 0\}$ platí $\mu(E) > 0$, a proto

$$\mathrm{Re}\left(\int_E f\mathrm{d}\mu - \int_E g\mathrm{d}\mu\right) = \int_E u\mathrm{d}\mu = \int_E u^+\mathrm{d}\mu > 0,$$

kde druhá rovnost plyne z toho, že $u^- = 0$ na E, neboť $u^+u^- = 0$. Na druhou stranu podle předpokladu 3. je $\int_E f\mathrm{d}\mu = \int_E g\mathrm{d}\mu$, z čehož speciálně plyne

$$\mathrm{Re}\left(\int_E f\mathrm{d}\mu - \int_E g\mathrm{d}\mu\right) = 0$$

a to je spor. Ostatní možnosti se diskutují analogicky. □

Věta 5.39 ukazuje, že z hlediska integrace je lhostejné, změníme-li funkci na množině nulové míry. Funkce by nemusela být na množině nulové míry ani definována a přesto má integrál této funkce dobrý smysl, dodefinujeme-li ji třeba nulou (nebo jinak). V podobném duchu lze integrovat také funkce s hodnotami v $\overline{\mathbb{R}}$, pokud jsou μ-skoro všude konečné. Např. integrál funkce $f(x) = \ln|x|$ na intervalu $(-1, 1)$ vzhledem k Lebesgueově míře je dobře definovaný, ať už hodnotu $\ln 0$ definujeme jakkoliv, např. $\ln 0 := 0$.

Tyto úvahy si formalizujeme a rozšíříme tak definici měřitelnosti a integrability funkce. Připomeňme, že je dán prostor s mírou $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Definiční obor funkce f označíme D_f.

Definice 5.40 (Rozšíření pojmu měřitelná funkce)**:** Komplexní funkci f definovanou μ-skoro všude na X nazveme ***měřitelnou*** na X, právě když existuje $E_f \in \mathcal{M}$, $E_f \subset D_f$, $\mu(E_f^c) = 0$ a platí $f^{-1}(U) \cap E_f \in \mathcal{M}$ pro každou otevřenou množinu $U \subset \mathbb{C}$ (viz Lemma 5.2).

Dodefinujeme-li měřitelnou f na množině E_f^c nulou, tj. definujeme

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in E_f, \\ 0, & x \in E_f^c, \end{cases} \tag{54}$$

potom je $\tilde{f}$ měřitelná v původním smyslu (ověřte). Samozřejmě pokud je f definovaná na celém X a měřitelná v původním smyslu, je také f měřitelná ve smyslu novém, neboť v tomto případě stačí položit $E_f = X$. Tedy definici měřitelnosti jsme skutečně rozšířili. Pokud je navíc μ úplná, mohli bychom v definici (54) dodefinovat f na E_f^c jakkoliv, a pak by taková $\tilde{f}$ byla také měřitelná, což plyne z 1. tvrzení Věty 5.16.

Podobně rozšíříme integrabilitu na μ-s.v. definované měřitelné funkce.

Definice 5.41 (Rozšíření pojmu integrabilní funkce a její integrál)**:** Řekneme, že μ-s.v. definovaná komplexní funkce f je *integrabilní*, právě když je měřitelná a funkce $\tilde{f}$ z definice (54) je integrabilní, tj. $\tilde{f} \in \mathscr{L}$. Prostor integrabilních μ-s.v. definovaných funkcí označíme

$$L = L(X, \mathcal{M}, \mu) = L(X, \mu) = L(\mu).$$

Integrál funkce $f \in L$ dodefinujeme vztahem

$$\int f \mathrm{d}\mu := \int \tilde{f} \mathrm{d}\mu.$$

I když není množina E_f z definice měřitelnosti f, a tedy ani funkce $\tilde{f}$, určena jednoznačně, je korektnost definice integrálu pro funkci $f \in L$ zaručena Větou 5.39. V následující větě shrneme základní vlastnosti týkající se právě rozšířených pojmů.

Věta 5.42: Platí:

1. L je lineární prostor a integrál je lineární funkcionál na L.

2. Je-li f měřitelná resp. integrabilní a $g = f$ μ-s.v., potom je také g měřitelná resp. integrabilní.

3. Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost μ-s.v. definovaných měřitelných funkcí a $f_n \to f$ μ-s.v., potom je f měřitelná.

Důkaz. 1. Ověření 1. tvrzení je jednoduchá aplikace Vět 5.37 a 5.39 a příslušných definic.

2. Je-li f měřitelná a E_f množina z definice měřitelnosti f, potom stačí položit $E_g := E \cap E_f$, kde $E \in \mathcal{M}$ je taková, že $\mu(E^c) = 0$ a $f(x) = g(x)$ pro všechna $x \in E$. Potom je $\mu(E_g^c) = 0$ a pro $U \subset \mathbb{C}$ otevřenou máme

$$g^{-1}(U) \cap E_g = f^{-1}(U) \cap E_f \cap E \in \mathcal{M},$$

protože $f^{-1}(U) \cap E_f \in \mathcal{M}$.

Je-li f navíc integrabilní a $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ funkce f, g dodefinované nulou na E_f^c, E_g^c, potom $\tilde{g} = \tilde{f}$ μ-s.v., a tudíž

$$\int |\tilde{g}| \mathrm{d}\mu = \int |\tilde{f}| \mathrm{d}\mu = \int |f| \mathrm{d}\mu < \infty,$$

neboli $g \in L$.

3. Podle předpokladu existuje množina $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E^c) = 0$ taková, že $(\forall x \in E)(f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x))$. Jsou-li dále $E_{f_n} \in \mathcal{M}$ množiny z definice měřitelnosti funkcí f_n, potom položíme

$$E_f := E \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{f_n}.$$

Z Věty 4.26 plyne, že $\mu(E_f^c) = 0$. Zavedeme-li pomocné funkce

$$\tilde{f}_n(x) := \begin{cases} f_n(x), & x \in E_f, \\ 0, & x \in E_f^c, \end{cases} \qquad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in E_f, \\ 0, & x \in E_f^c, \end{cases}$$

potom $\tilde{f}_n \to \tilde{f}$, a proto podle Důsledku 5.12 je $\tilde{f}$ měřitelná. Protože $f = \tilde{f}$ na E_f, tedy μ-s.v., je f měřitelná podle již dokázaného bodu 2. $\square$

V úvahách, které nás vedly k rozšíření množiny integrabilních funkcí, bychom mohli jít ještě dál a dojít k tomu, že bychom mezi funkcemi, které se liší na množině nulové míry, nemuseli vůbec rozlišovat a mohli bychom je ztotožnit. To je základní myšlenka konstrukce důležitého funkčního prostoru - tzv. *Lebesgueova prostoru* L^1 nebo obecněji prostorů L^p. Konstrukci těchto prostorů odložíme na později, viz část 5.7.

Nyní si dokážeme třetí fundamentální limitní větu teorie integrálu, tzv. *Lebesgueovu větu.* Předchozí dvě limitní věty, Věta 5.23 o monotónní konvergenci a Fatouovo Lemma 5.31, se týkaly pouze *nezáporných* funkcí. Lebesgueova věta se týká obecných komplexních funkcí a dává nám postačující a velmi obecnou podmínku pro to, abychom mohli v 3. tvrzení Věty 5.42 nahradit měřitelnost integrabilitou. Navíc budeme moci zaměňovat limitu a integrál. Zásadním předpokladem Lebesgueovy věty, který umožní limitní přenos integrability a také záměnu limity a integrálu, je existence tzv. *integrabilní majoranty* posloupnosti měřitelných funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, tj. integrabilní funkce g takové, že $|f_n| \leq g$ pro každé n. Tuto informaci v sobě skrývá anglický název věty - *Lebesgue's dominated convergence theorem.*

Věta 5.43 (Lebesgue)**:** Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost měřitelných μ-s.v. definovaných funkcí taková, že limita

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existuje pro μ-s.v. $x \in X$. Předpokládejme dále, že

$$(\exists g \in L)(\forall n \in \mathbb{N})(|f_n| \leq g \ \mu\text{-s.v.}).$$

Potom je $f \in L$ a platí:

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Podle 3. tvrzení Věty 5.42 je f měřitelná. Podle předpokladů nerovnost $|f_n| \leq g$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a μ-s.v., z čehož limitním přechodem vyvodíme, že také $|f| \leq g$ μ-s.v. Odtud a z toho, že $g \in L$, vyplývá

$$\int |f| \mathrm{d}\mu \leq \int g \mathrm{d}\mu < \infty,$$

a tudíž $f \in L$.

Dále dokážeme tvrzení o záměně limity a integrálu. Uvědomte si, že stačí uvažovat reálné funkce f_n (a tedy i f), protože toto tvrzení lze aplikovat zvlášť na $\operatorname{Re} f_n$ a $\operatorname{Im} f_n$ a dostat tak obecné tvrzení věty pro komplexní f_n.

Předpokládejme tedy, že hodnoty funkcí f_n jsou reálné pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom z předpokladu $|f_n| \leq g$ μ-s.v. plyne, že $g+f_n \geq 0$ a $g-f_n \geq 0$ μ-s.v. Potom aplikací Fatouova Lemma 5.31 na posloupnosti $\{g+f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{g-f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (které podle potřeby dodefinujeme nulou v bodech, ve kterých nejsou nezáporné, což nemá vliv na hodnoty integrálů níže) a dostaneme

$$\int g\mathrm{d}\mu + \int f\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g+f_n)\mathrm{d}\mu = \int g\mathrm{d}\mu + \liminf_{n\to\infty} \int f_n\mathrm{d}\mu$$

a

$$\int g\mathrm{d}\mu - \int f\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g-f_n)\mathrm{d}\mu = \int g\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n\mathrm{d}\mu.$$

Odtud plyne, že

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\mathrm{d}\mu \leq \int f\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\mathrm{d}\mu,$$

a tedy všechny nerovnosti platí jako rovnosti. To znamená, že limita posloupnosti $\{\int f_n\mathrm{d}\mu\}_{n=1}^{\infty}$ existuje a je rovna $\int f\mathrm{d}\mu$. □

Poznámka: Všimněte si, že předpoklady Věty 5.43 implikují, že $\{f_n\}$ je posloupnost integrabilních funkcí, neboť konečnost integrálu $\int |f_n|\mathrm{d}\mu$ je důsledkem nerovnosti $|f_n| \leq g$ μ-s.v. a toho, že $g \in L$.

Poznámka: Z Lebesgueovy věty snadno odvodíme tvrzení, které je zobecněním Věty 1.19: Nechť μ je konečná míra, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost omezených měřitelných funkcí, která konverguje stejnoměrně k funkci f na X, potom

$$\int f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\mathrm{d}\mu.$$

Není-li μ konečná na X, tj. $\mu(X) = \infty$, tvrzení neplatí. Důkaz je přenechán čtenáři jako Cvičení 5.8.

Poznámka: Je-li μ Lebesgueova míra m na $\mathbb{R}$, je obvyklé psát např. místo $\int_{(a,b)} f\mathrm{d}m$ symbol

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

stejně jako pro integrál Riemannův. Všimněte si, že v případě Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}$ je

$$\int_{(a,b)} f\mathrm{d}m = \int_{(a,b]} f\mathrm{d}m = \int_{[a,b)} f\mathrm{d}m = \int_{[a,b]} f\mathrm{d}m,$$

protože se jednotlivé intervaly liší jen na množině Lebesgueovy míry 0. Pro obecnou Lebesgueovu–Stieltjesovu míru μ asociovanou s funkcí F platí $\int_{(a,b)} f\mathrm{d}\mu = \int_{(a,b]} f\mathrm{d}\mu$, jen pokud je F spojitá v bodě b, viz Cvičení 4.7, a podobně pro druhý krajní bod.

Příklad 5.44: Spočítáme limitu

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x.$$

Použijeme Lebesgueovu větu na posloupnost funkcí

$$f_n(x) := \frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)},$$

které jsou měřitelné na $(0,\infty)$, neboť jsou zde spojité. Protože

$$\left|\frac{\sin y}{y}\right| \le 1$$

pro všechna $y \in (0,\infty)$, dostaneme

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{1+x^2} =: g(x)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (0,\infty)$. Funkce g je integrabilní majoranta posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, tj. $g \in L((0,\infty),m)$, protože

$$\int_0^\infty g(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

Zde použitý Lebesgueův integrál má stejnou hodnotu jako odpovídající integrál Riemannův, což si ukážeme později (viz podkapitola 5.4). Dále

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

pro každé $x \in (0,\infty)$. Proto podle Lebesgueovy věty můžeme zaměnit limitu a integrál a dostaneme tak výsledek

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Dále si ukážeme několik užitečných aplikací Lebesgueovy věty.

Věta 5.45: Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost μ-s.v. definovaných měřitelných funkcí taková, že

$$\sum_{n=1}^\infty \int |f_n|\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Potom funkční řada $\sum_{n=1}^\infty f_n$ konverguje μ-s.v. k funkci z L a platí:

$$\int \sum_{n=1}^\infty f_n \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Položíme-li $g := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$, potom je g μ-s.v. definovaná funkce s hodnotami v $[0, \infty]$. Z Věty 5.26 plyne, že

$$\int g \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Tedy $g \in L$. Speciálně Lemma 5.33 implikuje, že g je konečná μ-skoro všude. Jinými slovy řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutně konverguje pro μ-s.v. $x \in X$ a v těchto bodech x tedy také konverguje. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ a μ-skoro všude platí

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f_j \right| \leq g.$$

Tudíž z Lebesgueovy Věty 5.43 aplikované na posloupnost částečných součtů $\sum_{j=1}^{n} f_j$ dostaneme, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L$ a

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

□

Další tvrzení ukazuje, že funkce z prostoru L lze v jistém smyslu libovolně přesně aproximovat jednoduchými integrabilními funkcemi.

Věta 5.46: Nechť $f \in L$. Potom platí:

1. Pro každé $\epsilon > 0$ existuje jednoduchá integrabilní funkce $\phi = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}$ taková, že

$$\int |\phi - f| \mathrm{d}\mu < \epsilon.$$

2. Je-li μ Lebesgue–Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$, potom lze množiny E_j z definice ϕ volit jako konečná sjednocení otevřených intervalů.

3. Je-li μ Lebesgue–Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$, potom ke každému $\epsilon > 0$ existuje spojitá funkce g, která je konstantně nulová mimo kompaktní interval a platí

$$\int |f - g| \mathrm{d}\mu < \epsilon.$$

Důkaz. 1. Nechť $f \in L$. Z Věty 5.15 vyplývá, že existuje posloupnost jednoduchých integrabilních funkcí $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a μ-s.v. je $|\phi_n| \leq |f|$ a $\phi_n \to f$. Funkce $2|f| \in L$ je integrabilní majoranta posloupnosti $\{|\phi_n - f|\}_{n=1}^{\infty}$, neboť

$$|\phi_n - f| \leq |\phi_n| + |f| \leq 2|f|$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a μ-s.v. Proto můžeme aplikovat Lebesgueovu Větu 5.43, ze které vyplývá, že

$$\lim_{n \to \infty} \int |\phi_n - f| \mathrm{d}\mu = 0.$$

Tedy k danému $\epsilon > 0$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ dostatečně velké tak, že pro $\phi := \phi_{n_0}$ platí

$$\int |\phi_{n_0} - f| \mathrm{d}\mu < \epsilon,$$

což jsme chtěli dokázat.

2. Předpokládejme, že μ je Lebesgueova–Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak velké, aby pro $\phi := \phi_{n_0}$ platilo

$$\int |\phi - f| \mathrm{d}\mu < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dále uvažujme reprezentaci ϕ ve tvaru $\phi = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}$, kde $a_1, \ldots, a_m$ jsou navzájem různá **nenulová** čísla a $E_1, \ldots, E_m$ jsou po dvou disjunktní měřitelné množiny. Naším úmyslem je aplikovat Větu 4.49 na množiny E_j.

Všimněte si, že pro dvě množiny $E, F \in \mathcal{M}$ platí

$$\mu(E\Delta F) = \int |\chi_E - \chi_F| \mathrm{d}\mu,$$

neboť $|\chi_E - \chi_F| = \chi_{E\Delta F}$, kde $E\Delta F = E \setminus F \cup F \setminus E$ je symetrická diference množin E a F. Dále ověříme, že $\mu(E_j) < \infty$ pro každé $j \in \hat{m}$. Protože $|\phi| = \sum_{j=1}^{m} |a_j| \chi_{E_j}$, máme

$$\int_{E_j} |\phi| \mathrm{d}\mu = |a_j| \mu(E_j),$$

a proto

$$\mu(E_j) = \frac{1}{|a_j|} \int_{E_j} |\phi| \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{|a_j|} \int |f| \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Nyní můžeme aplikovat Větu 4.49 na množinu E_j, podle které existuje množina A_j, která je konečným sjednocením otevřených intervalů, tak, že platí

$$\mu(A_j \Delta E_j) < \frac{\epsilon}{2m|a_j|}$$

pro každé $j \in \hat{m}$. Hledanou jednoduchou funkci nyní můžeme zavést vztahem

$$\tilde{\phi} := \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}.$$

Pro ni totiž máme

$$\int |\tilde{\phi} - \phi| \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} |a_j| \mu\left(A_j \Delta E_j\right) < \frac{\epsilon}{2}$$

a celkem tedy

$$\int |\tilde{\phi} - f| \mathrm{d}\mu \leq \int |\tilde{\phi} - \phi| \mathrm{d}\mu + \int |\phi - f| \mathrm{d}\mu < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

3. Z tvrzení 2. vyplývá existence jednoduché funkce $\phi = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{I_j}$, kde $I_1, \ldots, I_m$ jsou otevřené intervaly, takové, že

$$\int |f - \phi| \mathrm{d}\mu < \frac{\epsilon}{2}.$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $I_1, \ldots, I_m$ jsou po dvou disjunktní a $c_j \neq 0$ pro každé $j \in \hat{m}$.

Idea důkazu je pro fixní $j \in \hat{m}$ aproximovat funkci χ_{I_j} spojitou funkcí g_j, která bude konstantně nulová vně intervalu obsahujícího I_j a $\int |\chi_j - g_j| \mathrm{d}\mu$ bude malý. Je-li $I_j = (a_j, b_j)$, potom můžeme volit g_j např. tak, že g_j má hodnotu 0 na $(-\infty, a_j] \cup [b_j + \delta, \infty)$, hodnotu 1 na $[a_j + \delta, b_j]$ a je lineární na $[a_j, a_j + \delta]$ a $[b_j, b_j + \delta]$ pro $\delta > 0$ malé. Potom je

$$\int |\chi_{I_j} - g_j| \mathrm{d}\mu \leq \mu((a_j, a_j + \delta]) + \mu((b_j, b_j + \delta]) = F(a_j + \delta) - F(a_j) + F(b_j + \delta) - F(b_j),$$

kde F je neklesající zprava spojitá funkce asociovaná s Lebesgueovou–Stieltjesovou mírou μ. Protože je F zprava spojitá, lze volbou dostatečně malého $\delta > 0$ udělat rozdíly $F(a_j+\delta) - F(a_j)$ a $F(b_j + \delta) - F(b_j)$ libovolně malé. Zvolme tedy $\delta > 0$ tak, aby

$$(\forall j \in \hat{m}) \left(F(a_j + \delta) - F(a_j) < \frac{\epsilon}{4m|c_j|} \quad \wedge \quad F(b_j + \delta) - F(b_j) < \frac{\epsilon}{4m|c_j|} \right).$$

Potom hledanou spojitou funkcí g pro tvrzení věty je $g := \sum_{j=1}^{m} c_j g_j$, neboť

$$\begin{aligned} \int |f - g| \mathrm{d}\mu &\leq \int |f - \phi| \mathrm{d}\mu + \int |\phi - g| \mathrm{d}\mu < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{j=1}^{m} |c_j| \int |\chi_{I_j} - g_j| \mathrm{d}\mu \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \sum_{j=1}^{m} |c_j| \left(\frac{\epsilon}{4m|c_j|} + \frac{\epsilon}{4m|c_j|} \right) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Poznámka: Později zavedeme metrický prostor $L^1(\mu)$ s metrikou definovanou integrálem $\int |f - g| \mathrm{d}\mu$ pro $f, g \in L^1(\mu)$. Poznamenejme již nyní, že Věta 5.46 říká, že prostor jednoduchých funkcí je hustý v $L^1(\mu)$. Je-li navíc μ Lebesgueova–Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$, je také prostor $C_c(\mathbb{R})$ spojitých funkcí s kompaktním nosičem (tzn. nulových vně kompaktního intervalu) hustý v $L^1(\mu)$; viz také Cvičení 5.9.

Jako poslední aplikaci Lebesgueovy věty si v této části odvodíme dvě užitečná tvrzení týkající se záměny limity/derivace a integrálu pro funkce závislé na reálném parametru.

Věta 5.47 (O limitě)**:** Nechť $-\infty < a < b < \infty$, $t_0 \in (a, b)$ a $f : X \times (a, b) \to \mathbb{C}$. Předpokládejme dále, že

i. $(\forall t \in (a, b))(f(\cdot, t)$ je měřitelná$)$,

ii. $(\mu\text{-s.v. } x \in X)(\lim_{t \to t_0} f(x, t) =: h(x))$,

iii. $(\exists g \in L)(\mu\text{-s.v. } x \in X)(\forall t \in (a,b))(|f(x,t)| \leq g(x))$.

Potom je $h \in L$ a platí:

$$\lim_{t \to t_0} \int f(x,t) \mathrm{d}\mu(x) = \int h(x) \mathrm{d}\mu(x).$$

Speciálně je-li $h(x) = f(x,t_0)$, tj. $f(x,\cdot)$ je spojitá v t_0 pro μ-s.v. $x \in X$, potom také funkce $F(t) := \int f(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$ je spojitá v bodě t_0.

Důkaz. Zvolme libovolně posloupnost $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a,b)$ tak, že $t_n \to t_0$ a označme

$$f_n(x) := f(x,t_n).$$

Z předpokladů i.-iii. plyne, že $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí, $f_n \to h$ μ-s.v. a existuje $g \in L$ taková, že $|f_n(x)| \leq g(x)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a μ-s.v. $x \in X$. Můžeme tedy aplikovat Lebesgueovu Větu 5.43, z níž plyne, že $h \in L$ a

$$\lim_{n \to \infty} \int f(x,t_n) \mathrm{d}\mu(x) = \int h \mathrm{d}\mu.$$

Tvrzení je nyní důsledkem Heineho Věty 2.75. □

Poznámka: Není nutné, aby f z Věty 5.47 byla definována v bodě t_0, jak čtenář snadno domyslí z důkazu. Uvedená formulace věty je zvolena pro jednoduchost. Dále technický krok použitý v důkazu, kdy místo limity $t \to t_0$ přecházíme k posloupnosti $t_n \to t_0$ a využíváme Heineho věty je nezbytný, protože Lebesgueova věta se týká pouze funkčních posloupností.

Věta 5.48 (O derivaci)**:** Nechť $-\infty < a < b < \infty$ a $f : X \times (a,b) \to \mathbb{C}$. Předpokládejme dále, že

i. $(\forall t \in (a,b))(f(\cdot,t)$ je integrabilní$)$,

ii. $(\mu\text{-s.v. } x \in X)(f(x,\cdot)$ je diferencovatelná na $(a,b))$,

iii. $$(\exists g \in L)(\mu\text{-s.v. } x \in X)(\forall t \in (a,b)) \left(\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| \leq g(x) \right).$$

Potom je funkce $F(t) := \int f(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$ diferencovatelná na (a,b), $\partial_t f(\cdot,t) \in L$ a platí:

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \mathrm{d}\mu(x)$$

pro každé $t \in (a,b)$.

Důkaz. Zvolme libovolně $t_0 \in (a,b)$, posloupnost $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a,b) \setminus \{t_0\}$ takovou, že $t_n \to t_0$ a definujme

$$h_n(x) := \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}.$$

Podle předpokladu i. jsou funkce h_n měřitelné a podle předpokladu ii. existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$$

pro μ-s.v. $x \in X$. Dále z Věty o přírůstku a předpokladu iii. plyne, že pro μ-s.v. x a všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|h_n(x)| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_n)\right| \leq g(x),$$

kde $\xi_n \in (a, b)$.

Můžeme tedy aplikovat Lebesgueovu větu na posloupnost $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ a dostaneme, že $\partial_t f(\cdot, t_0) \in L$ a existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n\to\infty} \int h_n(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \mathrm{d}\mu(x).$$

Jelikož byla posloupnost $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ volena libovolně, vyplývá z Heineho věty, že existuje limita

$$\lim_{t\to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \mathrm{d}\mu(x).$$

To znamená, že je F diferencovatelná v bodě t_0 a pro její derivaci $F'(t_0)$ platí tvrzení věty. □

Poznámka: Předpoklad i. ve Větě 5.48 je možné zeslabit a předpokládat měřitelnost $f(\cdot, t)$ pro všechna $t \in (a, b)$ a integrabilitu $f(\cdot, t_0)$ pro jedno nějaké $t_0 \in (a, b)$. Potom totiž dostaneme pro lib. $t \in (a, b)$ s pomocí Věty o přírůstku a předpokladu iii. odhad

$$|f(x, t)| \leq |f(x, t_0)| + g(x)|t - t_0|$$

platný pro μ-s.v. $x \in X$, z čehož plyne, že $f(\cdot, t) \in L$.

Poznámka: Poznamenejme, že interval (a, b), který vystupuje ve Větách 5.48 a 5.47, zejména v předpokladech iii. s integrabilní majorantou g, může být obsažen ve větší otevřené množině I (např. $I = \mathbb{R}$), na níž je funkce $f(x, \cdot)$ definována. Pokud předpoklady Vět 5.48 a 5.47 platí pro všechny $(a, b) \subset I$, kde ovšem majoranta g může záviset na a a b, dostaneme spojitost i diferencovatelnost funkce F na celém I, neboť jsou to lokální vlastnosti.

Příklad 5.49: Spočítáme integrál

$$F(t) := \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(t \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} \mathrm{d}x,$$

kde $t \in \mathbb{R}$. Pomocí Věty 5.48 nejprve najdeme derivaci F. Označme $f : (0, \pi/2) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkci

$$f(x, t) := \frac{\operatorname{arctg}(t \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}.$$

Pro každé $t \in \mathbb{R}$ je funkce $f(\cdot, t)$ spojitá na $(0, \pi/2)$, a tudíž měřitelná. Dále pro každé $x \in (0, \pi/2)$ je funkce $f(x, \cdot)$ diferencovatelná na $\mathbb{R}$. Tedy předpoklady i. a ii. Věty 5.48 jsou splněny. Také předpoklad iii. je splněn, protože

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| = \frac{1}{1+t^2 \operatorname{tg}^2 x} \leq 1$$

pro každé $(x,t) \in (0,\pi/2) \times \mathbb{R}$ a 1 je integrabilní funkce na $(0, \pi/2)$. Tedy podle Věty 5.48 máme

$$F'(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+t^2 \operatorname{tg}^2 x}$$

pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Poslední integrál již jednoduše spočítáme (jako Riemannův integrál). Všimněte si, že F je lichá funkce, a proto se stačí se omezit na $t \geq 0$. Po substituci $y = \operatorname{tg} x$ dostaneme

$$F'(t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2y^2} \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{1}{t^2-1} \int_0^{\infty} \left(\frac{t^2}{1+t^2y^2} - \frac{1}{1+y^2} \right) \mathrm{d}y,$$

kde pro platnost druhé rovnosti musíme navíc předpokládat, že $t \neq 1$. Odtud dále spočítáme, že

$$F'(t) = \frac{1}{t^2-1} \left[t \operatorname{arctg}(ty) - \operatorname{arctg} y \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{t+1}$$

pro $t \geq 0$, $t \neq 1$. Případ $t = 1$ bychom mohli počítat přímo, ale jednodušší je si všimnout, že z Věty 5.47 plyne, že F' je spojitá v bodě $t = 1$. Předpoklad iii. platí, protože majoranta 1 z odhadu

$$\frac{1}{1+t^2 \operatorname{tg}^2 x} \leq 1$$

je samozřejmě integrabilní na $[0, \pi/2]$. Také předpoklady i. a ii. jsou splněny (ověřte). Celkem tedy máme rovnost

$$F'(t) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{t+1}$$

pro všechna $t \geq 0$. Integrací dostaneme $F(t)$ až na aditivní konstantu $C \in \mathbb{R}$:

$$F(t) = \frac{\pi}{2} \ln(1+t) + C, \qquad t \geq 0.$$

Jelikož $F(0) = 0$, vyjde nám $C = 0$. Nakonec stačí F prodloužit jako lichou funkci na $(-\infty, 0)$ a dostaneme závěr:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ln(1+t) & \text{pro } t \geq 0, \\ -\frac{\pi}{2} \ln(1-t) & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$

5.4 Vztah Lebesgueova a Riemannova integrálu*

Je-li μ Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$, potom integrál vzhledem k μ vybudovaný v předchozí části se nazývá *Lebesgueův integrál*. Čtenář už zná z prvního ročníku integrál Riemannův, a proto je vhodné se na tomto místě podívat na vztah obou integrálů.

Připomeňme si stručně definici Riemannova integrálu. Dělením kompaktního intervalu $[a, b]$ rozumíme konečnou posloupnost bodů $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ splňující $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$. Nechť f je reálná omezená funkce definovaná na $[a, b]$. Horní a dolní integrální součet f při rozdělení σ jsou čísla

$$S_\sigma(f) := \sum_{i=1}^{m} M_i^{(f)} (x_i - x_{i-1}) \quad \text{a} \quad s_\sigma(f) := \sum_{i=1}^{m} m_i^{(f)} (x_i - x_{i-1}),$$

kde

$$M_i^{(f)} = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{a} \quad m_i^{(f)} = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Potom definujeme horní a dolní integrál vztahy

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x := \inf\{S_\sigma(f) \mid \sigma \text{ je dělení } [a, b]\},$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x := \sup\{s_\sigma(f) \mid \sigma \text{ je dělení } [a, b]\}.$$

Funkci f nazýváme riemannovsky integrabilní, právě když

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

Tuto společnou hodnotu nazýváme Riemannův integrál f na $[a, b]$ a značíme $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Věta 5.50: Buď $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omezená. Je-li f riemannovsky integrabilní na $[a, b]$, je f také (lebesgueovsky) integrabilní na $[a, b]$ a platí:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\mathrm{d}m.$$

Poznámka: Zde ještě striktně rozlišujeme ve značení, abychom odlišili Riemannův a Lebesgueův integrál. Je ale zcela běžné používat značení $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ pro Lebesgueův integrál $\int_{[a,b]} f\mathrm{d}m$.

Důkaz Věty 5.50. Stačí ukázat, že riemannovsky integrabilní funkce f je lebesgueovsky měřitelná, neboť integrabilita f potom plyne ihned z omezenosti f a intervalu $[a, b]$.

Nechť je f riemannovsky integrabilní na $[a, b]$. Pro libovolné dělení $\sigma = \{x_i\}_{i=0}^m$ intervalu $[a, b]$ definujme jednoduché funkce

$$G_\sigma := \sum_{i=1}^{m} M_i^{(f)} \chi_{(x_{i-1}, x_i]} \quad \text{a} \quad g_\sigma := \sum_{i=1}^{m} m_i^{(f)} \chi_{(x_{i-1}, x_i]}.$$

Potom $g_\sigma \leq f \leq G_\sigma$ na $[a,b]$ a platí

$$S_\sigma(f) = \int G_\sigma \mathrm{d}m \quad \text{a} \quad s_\sigma(f) = \int g_\sigma \mathrm{d}m.$$

Připomeňme dále, že z riemannovské integrability f plyne existence posloupnosti zjemňujících se rozdělení σ_n intervalu $[a,b]$, tj. $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$ pro každé n, jejichž norma $\|\sigma_n\| = \max_i |x_i - x_{i-1}| \to 0$ a pro kterou platí:

$$\lim_{n\to\infty} S_{\sigma_n}(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} s_{\sigma_n}(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Z inkluze $\sigma_n \subset \sigma_{n+1}$ plyne, že $G_{\sigma_n} \geq G_{\sigma_{n+1}}$ a $g_{\sigma_n} \leq g_{\sigma_{n+1}}$. Díky této monotonii existují limitní funkce $G := \lim_{n\to\infty} G_{\sigma_n}$ a $g := \lim_{n\to\infty} g_{\sigma_n}$, které jsou konečné, protože

$$|G_{\sigma_n}| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| < \infty \quad \text{a} \quad |g_{\sigma_n}| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| < \infty$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z Lebesgueovy Věty 5.43 plyne, že g a G jsou lebesgueovsky měřitelné a

$$\int G\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int G_{\sigma_n}\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} S_{\sigma_n}(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

a podobně

$$\int g\mathrm{d}m = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Odtud plyne, že $\int (G-g)\mathrm{d}m = 0$ a protože $G \geq g$, je $G = g$ s.v. podle Věty 5.39. Vezmeme-li do úvahy také nerovnosti $g \leq f \leq G$, zjistíme, že $f = G$ s.v. Tudíž f je měřitelná a platí

$$\int f\mathrm{d}m = \int G\mathrm{d}m = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

□

Z Věty 5.50 plyne, že Lebesgueova teorie integrálu v sobě zahrnuje teorii Riemannova (vlastního) integrálu. Podobně také funkce s absolutně konvergentním zobecněným Riemannanovým integrálem jsou lebesgueovsky integrabilní a oba integrály se shodují.

Věta 5.51: Nechť f má absolutně konvergentní Riemannův integrál na kompaktním intervalu $[a,b]$, potom je f (lebesgueovsky) integrabilní na $[a,b]$ a platí:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\mathrm{d}m.$$

Důkaz. Stačí předpokládat, že b je jediný kritický bod funkce f na $[a,b]$. Nejprve ukážeme, že f je lebesgueovsky měřitelná na $[a,b]$. Podle předpokladu je f riemannovsky integrabilní na $[a, b-1/n]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a proto podle Vět 5.50 a 5.5 máme

$$E_{\alpha,n} := \left\{x \in \left[a, b-\frac{1}{n}\right] \;\middle|\; f(x) > \alpha\right\} \equiv f^{-1}((\alpha,\infty)) \cap \left[a, b-\frac{1}{n}\right] \in \mathcal{L}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Protože

$$E_\alpha := \{x \in [a,b] \mid f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\alpha,n} \cup F,$$

kde $F = \emptyset$, nebo $F = \{b\}$, v každém případě $F \in \mathcal{L}$, je také $E_\alpha \in \mathcal{L}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Z Věty 5.5 plyne, že f je lebesgueovsky měřitelná na $[a,b]$ a totéž platí o $|f|$.

Aplikujeme-li Větu 5.23 o monotónní konvergenci spolu s Větou 5.50, dostaneme

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^{b-1/n} |f(x)|\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b-1/n]} |f|\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int \chi_{[a,b-1/n]}|f|\mathrm{d}m$$
$$= \int_{[a,b]} |f|\mathrm{d}m,$$

a tudíž $f \in L([a,b])$. Nyní můžeme v rovnosti

$$\int_a^{b-1/n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b-1/n]} f\mathrm{d}m,$$

která je opět důsledkem Věty 5.50, poslat $n \to \infty$ a z Lebesgueovy Věty 5.43 dostaneme tvrzení o rovnosti integrálů. $\square$

Poznámka: Modifikací důkazu můžeme Větu 5.51 dokázat také pro funkce mající absolutně konvergentní Riemannův integrál na neomezených intervalech.

Tedy Lebesgueova teorie integrálu zahrnuje také funkce s absolutně konvergentním zobecněným Riemannovým integrálem. Na druhou stranu funkce s neabsolutně konvergentním Riemannovým integrálem už lebesguevsky integrabilní být nemusí, viz Příklad 5.52. V takovém případě je nějaké dodatečné rozšíření Lebesgueova integrálu nevyhnutelné. Někteří autoři zavádějí zobecněný Lebesgueův integrál na $\mathbb{R}$ pomocí limity podobně jako zobecněný Riemannův integrál, ale my se tímto zobecněním zde zabývat nebudeme.

Příklad 5.52: Uvažujme funkci

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{(n-1,n]}.$$

Potom

$$f^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \chi_{(2n-1,2n]} \quad \text{a} \quad f^- = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \chi_{(2n-2,2n-1]},$$

a proto

$$\int f^+\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty \quad \text{a} \quad \int f^-\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \infty.$$

Tudíž $f \notin L([0,\infty), \mathrm{d}m)$. Na druhou stranu f má neabsolutně konvergentní Riemannův integrál na $[0,\infty)$, neboť

$$\lim_{c\to\infty} \int_0^c f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

Příklad 5.53: Klasický příklad ilustrující tutéž skutečnost jako Příklad 5.52 je tzv. *Dirichletův integrál*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \tag{55}$$

jehož výpočet už není tak triviální. Upozorněme, že jde o zobecněný Riemannův integrál, který je definován příslušnou limitou, a nikoli Lebesgův integrál, protože funkce $\sin(x)/x$ není lebesgueovsky integrabilní na $(0,\infty)$. To ověříme níže. Obvyklý výpočet Dirichletova integrálu je založen na tzv. reziduové větě z komplexní analýzy, kterou zde nemůžeme aplikovat. Výpočet, který si ukážeme, využívá již nabytých znalostí o Fourierových řadách.

1. Označme

$$g(x) := \frac{\sin x}{x}$$

pro $x > 0$. Nejprve ověříme, že $g \notin L\left((0,\infty), \mathrm{d}m\right)$. Jelikož

$$g^+(x) = \frac{\sin x}{x}\left(\chi_{(0,\pi/2)} + \sum_{j=2}^{\infty} \chi_{((2j-1)\pi/2,(2j+1)\pi/2)}\right),$$

můžeme odhadovat

$$\int g^+ \mathrm{d}m \geq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)\pi/2} \int_{(2j-1)\pi/2}^{(2j+1)\pi/2} \sin(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{2j-1} = \infty.$$

Podobně se ukáže, že také

$$\int g^- \mathrm{d}m = \infty.$$

Odtud plyne, že g není integrabilní na $(0,\infty)$.

2. Dále dokážeme (55). Konvergence zobecněného Riemannova integrálu v (55) plyne z Dirichletova kritéria.

Uvažujme funkci

$$f(x) := \frac{\sin(x/2)}{x}$$

na intervalu $[-\pi,\pi]$ dodefinovanou spojitě v bodě $x = 0$, tj. $f(0) = 1/2$. Podle Věty 1.64 konverguje Fourierova řada funkce f na $(-\pi,\pi)$ k funkci f v každém bodě intervalu $[-\pi,\pi]$, speciálně v bodě $x = 0$. Dále aplikací Věty 1.58 dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} = f(0) = \lim_{n\to\infty} F_n(0) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left((n+1/2)t\right)}{\sin\left(t/2\right)}\mathrm{d}t\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left((n+1/2)t\right)}{t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

V posledním integrálu provedeme substituci $x = (n+1/2)t$ a po drobné úpravě máme

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\int_{-(n+1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,$$

z čehož plyne rovnost (55).

Ukážeme si ještě jednu zajímavou větu, která je Lebesgueovou charakterizací riemannovské intebrability. Rozhodnout, zda je daná omezená funkce na kompaktním intervalu riemannovsky integrabilní, nemusí být jednoduchý úkol. Následující věta může tento problém značně zjednodušit.

Věta 5.54 (Lebesgueovo kritérium riemannovské integrability)**:** Omezená funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrabilní, právě když

$$m\left(\{x \in [a, b] \mid f \text{ není spojitá v } x\}\right) = 0.$$

Důkaz. Než se pustíme do samotného důkazu, uvedeme definici oscilace f na množině a v bodě a její základní vlastnosti. Je-li $A \subset [a, b]$, potom číslo

$$\omega_f(A) := \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x) = \sup_{x, y \in A} |f(x) - f(y)|$$

nazýváme *oscilace f na A*. Všimněte si, že $\omega_f(A) \leq \omega_f(B)$, pokud $A \subset B$. Je-li $x \in [a, b]$, nazýváme číslo

$$\omega_f(x) := \inf_{\delta > 0} \omega_f(B_x(\delta) \cap [a, b]) = \inf_{\delta \to 0+} \omega_f(B_x(\delta) \cap [a, b])$$

oscilace f v bodě x. Následující vlastnosti oscilace funkce použijeme dále. Jejich ověření je přenecháno čtenáři jako Cvičení 5.10.

- Funkce f je spojitá v bodě x, právě když $\omega_f(x) = 0$.
- Pro každé $\alpha > 0$ je množina $\{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) < \alpha\}$ otevřená v $[a, b]$.
- Pro každé $\alpha > 0$ je množina $\{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) \geq \alpha\}$ uzavřená v $[a, b]$.

1. Implikace ($\Rightarrow$): Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrabilní. Označme

$$N(\alpha) := \{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) \geq \alpha\},$$

kde $\alpha > 0$. Protože

$$\{x \in [a, b] \mid f \text{ není spojitá v } x\} = \{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} N\left(\frac{1}{n}\right),$$

stačí dokázat, že $m(N(\alpha)) = 0$ pro libovolné $\alpha > 0$.

Zvolme pevně $\alpha > 0$ a $\epsilon > 0$. Z riemannovské integrability f na $[a, b]$ plyne, že existuje dělení $\sigma = \{x_i\}_{i=0}^{m}$ intervalu $[a, b]$ takové, že

$$S_\sigma(f) - s_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{m} \omega_f\left([x_{i-1}, x_i]\right)(x_i - x_{i-1}) < \alpha\epsilon.$$

Označme $F := \{i \in \hat{m} \mid (x_{i-1}, x_i) \cap N(\alpha) \neq \emptyset\}$. Pro každý index $i \in F$ je $\omega_f\left([x_{i-1}, x_i]\right) \geq \alpha$, a tudíž

$$\alpha \sum_{i \in F} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{m} \omega_f\left([x_{i-1}, x_i]\right)(x_i - x_{i-1}) < \alpha\epsilon.$$

Odtud plyne, že

$$\sum_{i \in F} m\left((x_i, x_{i-1})\right) = \sum_{i \in F} (x_i - x_{i-1}) < \epsilon.$$

Intervaly $\{(x_i, x_{i-1}) \mid i \in F\}$ pokrývají množinu $N(\alpha)$ s možnou výjimkou bodů $\{x_0, \ldots, x_m\}$, což je ale množina Lebesgueovy míry nula.

Celkem tedy jsme k libovolnému $\epsilon > 0$ našli množinu $E_\epsilon \in \mathcal{L}$ takovou, že $N(\alpha) \subset E_\epsilon$ a $m(E_\epsilon) < \epsilon$. Položme

$$E := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{1/n}.$$

Potom $N(\alpha) \subset E$ a $m(E) = 0$ a z úplnosti míry m plyne, že $N(\alpha)$ je měřitelná a $m(N(\alpha)) = 0$.

2. Implikace $(\Leftarrow)$: Podle předpokladu je $m(\{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > 0\}) = 0$. Zvolme $\epsilon > 0$. Potom $N(\epsilon) \subset \{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > 0\}$, a proto $m(N(\epsilon)) = 0$. Množina $N(\epsilon)$ je uzavřená a omezená, tedy kompaktní. Podle 2. tvrzení Lemma 4.46 lze množinu $N(\epsilon)$ pokrýt spočetně mnoha otevřenými intervaly, jejichž celková Lebesgueova míra je menší než ϵ. Díky kompaktnosti $N(\epsilon)$, existuje konečný počet těchto otevřených intervalů pokrývajících $N(\epsilon)$. Označme je $U_1, \ldots U_k$ a jejich uzávěry $I_1, \ldots, I_k$. Tedy

$$N(\epsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{k} m(U_i) = \sum_{i=1}^{k} m(I_i) < \epsilon.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že intervaly $I_1, \ldots, I_k$ jsou po dvou disjunktní, jinak bychom každé dva intervaly s neprázdným průnikem spojili do jednoho intervalu.

Množina $K := [a, b] \setminus \cup_{i=1}^{k} U_i$ je konečné sjednocení po dvou disjunktních uzavřených intervalů a pro každé $x \in K$ je $\omega_f(x) < \epsilon$. Označme si tyto intervaly $J_1, \ldots, J_l$. O těchto intervalech můžeme předpokládat, že $\omega_f(J_j) < \epsilon$ pro každé $j \in \hat{l}$. Pokud by tomu tak nebylo, lze rozdělit J_j na konečně mnoho uzavřených podintervalů tak, že oscilace f na každém dělícím intervalu už bude menší než ϵ. Ukažme si, že to lze skutečně provést. Nechť $J \subset [a, b]$ je uzavřený interval takový, že $(\forall x \in J)(\omega_f(x) < \epsilon)$. Z definice $\omega_f(x)$ vyvodíme, že

$$(\forall x \in J)(\exists \delta_x > 0)(\omega_f(\overline{B_x(\delta_x)} \cap [a, b]) < \epsilon).$$

Systém otevřených intervalů $\{B_x(\delta_x)\}_{x \in J}$ je otevřené pokrytí kompaktu J, a proto z nich lze vybrat konečně mnoho intervalů, které stále pokrývají J. Jejich různé koncové body obsažené v J můžeme uspořádat a označit $t_1, \ldots t_{r-1} \in J$. Označíme-li ještě t_0 a t_r koncové body J, dostáváme dělení J, pro jehož dílčí intervaly platí

$$(\forall s \in \hat{r})(\omega_f([t_{s-1}, t_s]) < \epsilon),$$

neboť pro každé $s \in \hat{r}$ existuje nějaké $x \in J$ tak, že $[t_{s-1}, t_s] \subset \overline{B_x(\delta_x)}$.

Celkem tedy máme intervaly $I_1, \ldots, I_k, J_1, \ldots, J_l$, které představují dělení σ intervalu $[a, b]$ a platí pro ně, že

$$\sum_{i=1}^{k} m(I_i) < \epsilon \quad \text{a} \quad (\forall j \in \hat{l})(\omega_f(J_j) < \epsilon).$$

Dílčí body dělení σ si označme $x_0, \ldots, x_m$. Potom máme

$$\begin{aligned} S_\sigma(f) - s_\sigma(f) &= \sum_{i=1}^{m} \omega_f\left([x_{i-1}, x_i]\right)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k} \omega_f\left(I_i\right) m(I_i) + \sum_{j=1}^{l} \omega_f\left(J_j\right) m(J_j) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} 2\|f\|_\infty m(I_i) + \sum_{j=1}^{l} \epsilon m(J_j) < 2\|f\|_\infty \epsilon + \epsilon(b-a), \end{aligned}$$

kde $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Poslední výraz lze udělat libovolně malý vhodnou volbou ϵ, z čehož plyne, že f je riemannovsky integrabilní na $[a, b]$. $\square$

Příklad 5.55: Riemannova funkce (nebo též Thomaeova) je definována vztahem

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{je-li } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & \text{je-li } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ a } p, q \text{ nesoudělná}. \end{cases}$$

Ověříme, že f je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a není spojitá na $\mathbb{Q}$.

Funkce f není spojitá na $\mathbb{Q}$: Buď $r \in \mathbb{Q}$. Zvolme posloupnost iracionálních čísel r_n konvergujících k r, např. $r_n := r + \sqrt{2}/n$. Potom je $f(r_n) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $f(r) > 0$. Tudíž $f(r_n)$ nekonverguje k $f(r)$, a proto f není spojitá v r.

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Buď $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a $\epsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $1/n_0 < \epsilon$. Jelikož je v intervalu $(a-1, a+1)$ pouze konečně mnoho racionálních čísel, jejichž jmenovatel je menší než n_0 (rozmyslete), najdeme $\delta > 0$ dostatečně malé tak, aby interval $(a - \delta, a + \delta)$ neobsahoval žádné racionální číslo se jmenovatelem menším než n_0. Potom pro každé $x \in (a - \delta, a + \delta)$ je

$$|f(x) - f(a)| = |f(x)| < \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Tudíž f je spojitá v bodě a.

Protože $m(\mathbb{Q}) = 0$, plyne z Věty 5.54, že f je riemannovsky integrabilní na libovolném kompaktním intervalu $[a, b]$. Navíc podle Věty 5.50 se Riemannův integrál f na $[a, b]$ shoduje s Lebesgueovým, z čehož vyvodíme, že

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = 0,$$

neboť $f = 0$ s.v.

Ukažme si ještě příklad riemannovsky integrabilní funkce, která je nespojitá na množině mohutnosti kontinua.

Příklad 5.56: Uvažujme charakteristickou funkci χ_C Cantorovy množiny C z Příkladu 4.51. Jelikož je C totálně nesouvislá, viz Cvičení 4.10, existuje k libovolnému bodu $c \in C$ posloupnost $x_n \in [0,1] \setminus C$ tak, že $x_n \to c$. Tzn., že $\chi_C(x_n) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, kdežto $\chi_C(c) = 1$. Proto χ_C není spojitá na C. Naopak z toho, že C je kompaktní, a tudíž $[0,1] \setminus C$ je otevřená, vyvodíme, že χ_C je spojitá funkce na $[0,1] \setminus C$.

Jak víme z Příkladu 4.51, $m(C) = 0$, a proto je podle Věty 5.54 χ_C riemannovsky integrabilní funkce na $[0,1]$. Navíc podle Věty 5.50 dostaneme okamžitě hodnotu Riemannova integrálu

$$\int_0^1 \chi_C(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Lebesgueova teorie nabízí dvě zásadní výhody oproti Riemannově teorii. Za prvé máme k dispozici mocné limitní věty jako je Věta o monotónní konvergenci a Lebesgueova věta. Za druhé Lebesgueův integrál umožňuje integrovat mnohem větší třídu funkcí. Např. Dirichletova funkce $\chi_\mathbb{Q}$ není riemannovsky integrabilní na žádném intervalu $[a,b]$, neboť není nikde spojitá. Z hlediska Lebesgueovy teorie je $\chi_\mathbb{Q} = 0$ s.v., tudíž je integrabilní a $\int \chi_\mathbb{Q}\mathrm{d}m = 0$. Samozřejmě tuto větší obecnost zřídka využijeme při výpočtu konkrétních integrálů, protože integrály klasické analýzy typicky integrují riemannovsky integrabilní funkce. Avšak zcela zásadní důsledek větší množiny lebesgueovsky integrabilních funkcí je, že mnoho metrických prostorů, jejichž metrika je definována pomocí Lebesgueova integrálu, jako např. prostory L^p, jsou **úplné** metrické prostory (viz Věta 5.87). To má fundamentální důsledky jak v teorii funkčních prostorů, tak v mnoha aplikacích, které využívají těchto metrických prostorů.

5.5 Součin měr a Fubiniho–Tonelliho věta

Uvažujme dva prostory s mírou $(X, \mathcal{M}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{N}, \nu)$. Jak už víme z minulé kapitoly, systém množin $\mathcal{M} \times \mathcal{N} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}\}$, které bychom mohli nazývat *měřitelné obdélníky*, není σ-algebra na $X \times Y$. Proto jsme zavedli $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ jako σ-algebru generovanou $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$, tj. minimální σ-algebru obsahující měřitelné obdélníky. Naším cílem bude zavést na $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ míru $\mu \otimes \nu$ splňující

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \tag{56}$$

pro každé $A \in \mathcal{M}$ a $B \in \mathcal{N}$. Ze zřejmých důvodů se $\mu \otimes \nu$ nazývá *součinem měr* μ a ν nebo též *součinovou (produktovou) mírou.*

Idea definice součinové míry staví opět na obecné Carathéodoryho konstrukci míry z pramíry na algebře. Tuto konstrukci provedeme v následujících odstavcích. Po celu dobu předpokládáme, že jsou dány dva prostory s mírou $(X, \mathcal{M}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{N}, \nu)$.

Lemma 5.57: Systém $\mathcal{A}$ konečných sjednocení po dvou disjunktních měřitelných obdélníků je algebra na $X \times Y$.

Důkaz. Podle Lemma 4.16 stačí ukázat, že měřitelné obdélníky $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ tvoří elementární systém.

Zřejmě $\emptyset = \emptyset \times \emptyset$, a proto $\emptyset \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$. Zbylé dvě vlastnosti z definice elementárního systému vyplývají z následujících rovností:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

a

$$(A \times B)^c = (X \times B^c) \cup (A^c \times B),$$

které platí pro libovolné $A, C \subset X$ a $B, D \subset Y$ a které se ověří přímo z definice kartézského součinu množin. □

Na algebře $\mathcal{A}$ konečných sjednocení po dvou disjunktních měřitelných obdélníků definujeme zobrazení $\pi : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ vztahem

$$\pi(E) := \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\nu(B_i),$$

kde $E = \cup_{i=1}^{n} A_i \times B_i \in \mathcal{A}$. Připomeňme, že i zde používáme konvenci $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Lemma 5.58: Zobrazení $\pi : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ je dobře definovaná pramíra.

Důkaz. Ověříme nejprve korektnost definice π. K tomu účelu předpokládejme, že měřitelný obdélník $A \times B$ je sjednocením po dvou disjunktních měřitelných obdélníků $A_k \times B_k$, jejichž počet může být konečný i spočetně nekonečný. Druhá možnost se nám bude hodit dále, a proto rozsah pro index k nebudeme specifikovat. Tedy

$$A \times B = \bigcup_k A_k \times B_k.$$

Potom pro libovolné $x \in X$ a $y \in Y$ máme

$$\chi_A(x)\chi_B(y) = \chi_{A \times B}(x, y) = \sum_k \chi_{A_k \times B_k}(x, y) = \sum_k \chi_{A_k}(x)\chi_{B_k}(y).$$

Zintegrujeme-li tuto rovnost vzhledem k μ a použijeme Větu 5.26, dostaneme rovnost

$$\mu(A)\chi_B(y) = \sum_k \mu(A_k)\chi_{B_k}(y)$$

pro každé $y \in Y$. Zintegrujeme ještě jednou tentokrát vzhledem k ν a vyvodíme rovnost

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_k \mu(A_k)\nu(B_k). \tag{57}$$

Pro ověření toho, že hodnota $\pi(E)$ nezávisí na reprezentaci $E \in \mathcal{A}$, předpokládejme, že

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i = \bigcup_{j=1}^{m} C_j \times D_j$$

kde $\{A_i \times B_i\}_{i=1}^n$ a $\{C_j \times D_j\}_{j=1}^m$ jsou po dvou disjunktní měřitelné obdélníky. Potom pro každé $i \in \hat{n}$ je

$$A_i \times B_i = A_i \times B_i \cap E = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap C_j) \times (B_i \cap D_j)$$

a množiny $\{(A_i \cap C_j) \times (B_i \cap D_j)\}_{j=1}^m$ jsou po dvou disjunktní. Podobně

$$C_j \times D_j = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap C_j) \times (B_i \cap D_j)$$

pro každé $j \in \hat{m}$. Odtud a z pozorování (57) vyvodíme, že

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i)\nu(B_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu\left(A_i \cap C_j\right)\nu\left(B_i \cap D_j\right) = \sum_{j=1}^m \mu(C_j)\nu(D_j),$$

což jsme chtěli ukázat.

Zbývá ověřit, že π je pramíra na $\mathcal{A}$. Zřejmě $\pi(\emptyset) = \mu(\emptyset)\nu(\emptyset) = 0$, a proto stačí dokázat σ-aditivitu π. Uvažujme tedy posloupnost $\{A_k \times B_k\}_{k=1}^\infty$ po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}$ takovou, že $\cup_{k=1}^\infty A_k \times B_k \in \mathcal{A}$. Vzhledem k aditivní definici π stačí předpokládat, že $\cup_{k=1}^\infty A_k \times B_k \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ (rozmyslete), tj. $\cup_{k=1}^\infty A_k \times B_k = A \times B$ pro nějaká $A \in \mathcal{M}$ a $B \in \mathcal{N}$. Jelikož $A_k \times B_k \in \mathcal{A}$, lze množinu vyjádřit

$$A_k \times B_k = \bigcup_{i=1}^{n_k} A_i^{(k)} \times B_i^{(k)},$$

kde $\{A_i^{(k)} \times B_i^{(k)}\}_{i=1}^{n_k}$ jsou po dvou disjunktní měřitelné obdélníky. Potom je množina $A \times B$ spočetným sjednocením po dvou disjunktních měřitelných obdélníků

$$A \times B = \bigcup_{k=1}^\infty \bigcup_{i=1}^{n_k} A_i^{(k)} \times B_i^{(k)},$$

a proto můžeme aplikovat rovnost (57). Použijeme-li také definici π, dostaneme

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=1}^{n_k} \mu(A_i^{(k)})\nu(B_i^{(k)}) = \sum_{k=1}^\infty \pi(A_k \times B_k),$$

což jsme chtěli ověřit. □

Nyní již je všechno připraveno na aplikaci Carathéodoryho metody kontrukce míry z pramíry π na algebře $\mathcal{A}$. Všimněte si, že algebra $\mathcal{A}$ generuje σ-algebru $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Tedy podle Lemma 4.37 určuje π vnější míru π^* na $X \times Y$, jejíž zúžení na $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ je podle Věty 4.38 míra, kterou jsme chtěli zkonstruovat.

Definice 5.59 (Součin měr)**:** Nechť π^* je vnější míra na $X \times Y$ určená pramírou π na algebře $\mathcal{A}$ definovaných výše. Míru
$$\mu \otimes \nu := \pi^* \restriction \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$$
nazýváme *součinem měr* μ a ν.

Jsou-li míry μ a ν σ-konečné, tj. existují $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, kde $\mu(A_i) < \infty$ pro každé $i \in \mathbb{N}$ tak, že $X = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ a podobně $\{B_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}$, kde $\nu(B_j) < \infty$ pro každé $j \in \mathbb{N}$ tak, že $Y = \cup_{j=1}^{\infty} B_j$. Potom $X \times Y = \cup_{i,j=1}^{\infty} A_i \times B_j$ a $\mu \otimes \nu(A_i \times B_j) = \mu(A_i)\nu(B_j) < \infty$ pro všechna $i, j \in \mathbb{N}$. Tudíž π je σ-konečná pramíra, a tedy i míra $\nu \otimes \mu$ je σ-konečná. Navíc podle podle Věty 4.38 je $\nu \otimes \mu$ jediná míra na $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ splňující (56).

Naším cílem je najít vztah mezi integrací vzhledem k součinové míře $\mu \otimes \nu$ a integrací vzhledem k mírám μ a ν. Pro tyto výsledky bude předpoklad σ-konečnosti měr μ a ν nezbytný.

Poznámka: Pro jednoduchost zde uvažujeme jen dva prostory s mírou, ovšem stejnou konstrukcí se zavede součin libovolného konečného počtu měr. Konkrétně jsou-li $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, $\ldots, (X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n)$ dané prostory s mírou, potom systém $\mathcal{A}$ konečných sjednocení množin tvaru $A_1 \times \cdots \times A_n$, kde $A_i \in \mathcal{M}_i$, $i \in \hat{n}$, je algebra a analogickým postupem zkonstruujeme součinovou míru $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ na σ-algebře $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n$ splňující
$$\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n\, (A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i),$$
kde $A_i \in \mathcal{M}_i$, $i \in \hat{n}$. Navíc jsou-li μ_i σ-konečné míry pro všechna $i \in \hat{n}$, je míra $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ na $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n$ určena jednoznačně vlastností výše. Také asociativita
$$(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3) = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3$$
platí. Detailní ověření přenecháme čtenáři.

Uvažujme stále dva prostory s mírou $(X, \mathcal{M}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{N}, \nu)$. Pro budoucí potřeby zavedeme následující terminologii.

Definice 5.60 (Řez množiny)**:** Nechť $E \subset X \times Y$, $x \in X$ a $y \in Y$. Množiny
$$E_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in E\} \quad \text{a} \quad E^y := \{x \in X \mid (x, y) \in E\}$$
nazýváme *x-řez* a *y-řez množiny* E.

Lemma 5.61: Je-li $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, potom $(\forall x \in X)(E_x \in \mathcal{N})$ a $(\forall y \in Y)(E^y \in \mathcal{M})$.

Důkaz. Pro potřeby důkazu uvažujme systém
$$\mathcal{R} := \{E \in X \times Y \mid (\forall x \in X)(E_x \in \mathcal{N}) \text{ a } (\forall y \in Y)(E^y \in \mathcal{M})\}.$$
Systém $\mathcal{R}$ obsahuje měřitelné obdélníky, tj. $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$, neboť např.
$$(A \times B)_x = \begin{cases} B, & \text{je-li } x \in A, \\ \emptyset, & \text{je-li } x \notin A. \end{cases}$$

Dále pro libovolnou množinu $E \subset X \times Y$ a posloupnost $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X \times Y$ platí rovnosti

$$(E^c)_x = (E_x)^c \quad \text{a} \quad \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x$$

a podobně pro y-řezy (ověřte). Odtud plyne, že $\mathcal{R}$ je σ-algebra. Potom podle Lemma 4.7 je $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{R}$, což implikuje tvrzení.

□

K odvození hlavního výsledku budeme ještě potřebovat jeden pomocný výsledek týkající se tzv. *monotónních tříd.*

Definice 5.62 (Monotónní třída)**:** Neprázdný systém množin $\mathcal{C} \subset 2^X$ nazýváme *monotónní třída* na X, právě když platí:

1. Je-li $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}$ a $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$, pak $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{C}$.
2. Je-li $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}$ a $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$, pak $\cap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{C}$.

Zřejmě každá σ-algebra je monotónní třída. Také se jednoduše ověří, že průnik monotónních tříd je monotónní třída, a proto můžeme definovat monotónní třídu generovanou systémem množin jako nejmenší monotónní třídu, která systém obsahuje podobně, jako jsme to udělali v případě σ-algeber.

Definice 5.63 (Monotónní třída generovaná systémem množin)**:** Nechť $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset 2^X$. Minimální monotónní třídu obsahující $\mathcal{E}$, tj. systém

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{C} \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{C} \ \wedge \ \mathcal{C} \text{ je monotónní třída}\},$$

nazýváme *monotónní třída generovaná systémem* $\mathcal{E}$.

Lemma 5.64 (O monotónních třídách)**:** Nechť $\mathcal{A}$ je algebra. Potom σ-algebra generovaná $\mathcal{A}$ a monotónní třída generovaná $\mathcal{A}$ jsou totožné systémy, tj.

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}(\mathcal{A}).$$

Důkaz. Pro stručnost budeme v důkazu psát $\mathcal{C} := \mathcal{C}(\mathcal{A})$ a $\mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Jelikož je $\mathcal{M}$ také monotónní třída, která obsahuje $\mathcal{A}$, je $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$. Opačnou inkluzi $\mathcal{C} \supset \mathcal{M}$ dokážeme, ukážeme-li, že $\mathcal{C}$ je σ-algebra.

Definujme si pro každé $E \in \mathcal{C}$ pomocný systém

$$\mathcal{C}_E := \{F \in \mathcal{C} \mid E \setminus F \in \mathcal{C} \ \wedge \ F \setminus E \in \mathcal{C} \ \wedge \ E \cap F \in \mathcal{C}\}.$$

Zřejmě $\emptyset, E \in \mathcal{C}_E$ a $F \in \mathcal{C}_E \iff E \in \mathcal{C}_F$. Dále je jednoduché ověřit, že $\mathcal{C}_E$ je monotónní třída (proveďte).

Je-li $E \in \mathcal{A}$, potom $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_E$, protože je $\mathcal{A}$ algebra. Odtud dále plyne, že $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_E$ pro každé $E \in \mathcal{A}$, protože je $\mathcal{C}$ nejmenší monotónní třída obsahující $\mathcal{A}$. Tedy

$$(\forall F \in \mathcal{C})(\forall E \in \mathcal{A})(F \in \mathcal{C}_E),$$

což je ekvivalentní tvrzení

$$(\forall F \in \mathcal{C})(\forall E \in \mathcal{A})(E \in \mathcal{C}_F),$$

neboli $(\forall F \in \mathcal{C})(\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_F)$ a odtud dále plyne

$$(\forall F \in \mathcal{C})(\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_F), \tag{58}$$

protože je $\mathcal{C}$ nejmenší monotónní třída obsahující $\mathcal{A}$.

Z inkluze (58) vyplývá, že $(\forall E, F \in \mathcal{C})(E \setminus F \in \mathcal{C} \ \wedge E \cap F \in \mathcal{C})$. Tedy $\mathcal{C}$ je uzavřený na konečné průniky a položíme-li $E := X \in \mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, zjistíme, že $\mathcal{C}$ je uzavřený také na doplňky. Odtud plyne, že $\mathcal{C}$ je uzavřený i na konečná sjednocení, a tedy $\mathcal{C}$ je algebra.

Nakonec je-li $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}$, potom

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(F_n := \bigcup_{j=1}^{n} E_j \in \mathcal{C} \right).$$

Protože $F_n \subset F_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, dostáváme $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{C}$, neboť $\mathcal{C}$ je monotónní třída. Tím jsme ověřili, že $\mathcal{C}$ je σ-algebra. $\square$

Nyní máme vše připraveno pro to, abychom dokázali vztah pro součinovou míru $\mu \otimes \nu$ pomocí integrace vzhledem k jednotlivým mírám μ a ν, což bude hlavní ingredience pro důkaz Fubiniho–Tonelliho věty.

Věta 5.65: Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ jsou prostory se σ-konečnými mírami μ a ν. Potom pro každé $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ je funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ resp. $y \mapsto \mu(E^y)$ $\mathcal{M}$-měřitelná resp. $\mathcal{N}$-měřitelná a platí:

$$\mu \otimes \nu(E) = \int \nu(E_x) \mathrm{d}\mu(x) = \int \mu(E^y) \mathrm{d}\nu(y).$$

Důkaz. 1) Tvrzení nejprve dokážeme pro případ, že míry μ a ν jsou konečné. Označme $\mathcal{C}$ systém množin $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, pro které platí tvrzení věty. V několika krocích dokážeme inkluzi $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{C}$, čímž bude věta dokázána.

a) Nejprve ukážeme, že $\mathcal{M} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{C}$. Buď $E = A \times B$ měřitelný obdélník z $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$. Potom

$$\nu(E_x) = \chi_A(x)\nu(B) \quad \text{a} \quad \mu(E^y) = \mu(A)\chi_B(y)$$

pro všechna $x \in X$ a $y \in Y$. Tudíž jsou funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ a $y \mapsto \mu(E^y)$ měřitelné a také platí rovnosti

$$\mu \otimes \nu(E) = \mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B),$$

$$\int \nu(E_x) \mathrm{d}\mu(x) = \nu(B) \int \chi_A(x) \mathrm{d}\mu(x) = \mu(A)\nu(B)$$

a

$$\int \nu(E^y) \mathrm{d}\nu(y) = \mu(A) \int \chi_B(y) \mathrm{d}\nu(y) = \mu(A)\nu(B).$$

Z toho plyne, že $E = A \times B \in \mathcal{C}$.

b) Snadno rozšíříme předchozí část a ukážeme, že $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, kde $\mathcal{A}$ je algebra konečných sjednocení po dvou disjunktních měřitelných obdélníků z $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$. Skutečně pokud $E = \cup_{j=1}^{m} E_j$, kde $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ jsou po dvou disjunktní, potom $E_x = \cup_{j=1}^{m} (E_j)_x$ a $E^y = \cup_{j=1}^{m} (E_j)^y$, a tudíž s využitím bodu a) zjistíme, že funkce

$$x \mapsto \nu(E_x) = \sum_{j=1}^{m} \nu((E_j)_x) \quad \text{a} \quad y \mapsto \mu(E^y) = \sum_{j=1}^{m} \mu((E_j)^y)$$

jsou měřitelné,

$$\int \nu(E_x) \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{j=1}^{m} \int \nu((E_j)_x) \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{j=1}^{m} \mu \otimes \nu(E_j) = \mu \otimes \nu(E)$$

a podobně pro druhý integrál. Tedy $E \in \mathcal{C}$.

c) Dále ukážeme, že $\mathcal{C}$ je monotónní třída. Potom už s využitím Lemma 5.64 dostaneme kýženou inkluzi, neboť $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \mathcal{C}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) \subset \mathcal{C}$.

i) Nechť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}$, $E_n \subset E_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $E := \cup_{j=1}^{\infty} E_j$. Potom pro každé $x \in X$ platí:

$$(E_n)_x \in \mathcal{N}, \quad (E_n)_x \subset (E_{n+1})_x \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N} \text{ a } E_x = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j)_x \,,$$

kde jsme použili 1. tvrzení Lemma 5.61. Definujme funkce $f_n : X \to [0, \infty]$ vztahem

$$f_n(x) := \nu\left((E_n)_x\right). \tag{59}$$

Jelikož $E_n \in \mathcal{C}$, je f_n $\mathcal{M}$-měřitelná, dále $f_n \leq f_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a díky spojitosti míry ν zdola, viz Věta 4.24, máme

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \nu(E_x) =: f(x)$$

pro každé $x \in X$. Nyní podle Věty 5.23 o monotónní konvergenci je f $\mathcal{M}$-měřitelná funkce a platí:

$$\begin{aligned}\int_X \nu(E_x) \mathrm{d}\mu(x) &= \int_X f(x) \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X \nu\left((E_n)_x\right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu \otimes \nu(E_n) = \mu \otimes \nu(E),\end{aligned}$$

kde poslední rovnost platí díky spojitosti míry $\mu \otimes \nu$ zdola. Analogicky se ukáže, že také funkce $y \mapsto \mu(E^y)$ je $\mathcal{N}$-měřitelná a platí rovnost

$$\int_Y \mu(E^y) \mathrm{d}\nu(y) = \mu \otimes \nu(E).$$

Tudíž $\mathcal{C}$ splňuje první vlastnost z definice monotónní třídy.

ii) Podobně ověříme i druhou vlastnost. Nechť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}$, $E_n \supset E_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $E := \cap_{j=1}^{\infty} E_j$. Potom opět s využitím Lemma 5.61 máme

$$(E_n)_x \in \mathcal{N}, \quad (E_n)_x \supset (E_{n+1})_x \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N} \text{ a } E_x = \bigcap_{j=1}^{\infty} (E_j)_x$$

pro každé $x \in X$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou funkce f_n definované vztahem (59) $\mathcal{M}$-měřitelné, $f_n \geq f_{n+1}$ a pro každé $x \in X$ existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \nu(E_x) =: f(x),$$

což plyne ze spojitosti míry ν shora, neboť z předpokladu konečnosti míry ν máme $\nu(E_x) \leq \nu(Y) < \infty$. Dále $(\forall n \in \mathbb{N})(|f_n| = f_n \leq f_1)$ a $f_1 \in L(\mathcal{M}, \mu)$, protože

$$\int_X f_1(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \nu(E_x)\mathrm{d}\mu(x) \leq \nu(Y) \int_X 1\mathrm{d}\mu(x) = \mu(X)\nu(Y) < \infty$$

díky předpokladu konečnosti měr μ a ν. Můžeme tedy na posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ aplikovat Lebesgueovu Větu 5.43, ze které plyne $\mathcal{M}$-měřitelnost f (dokonce integrabilita) a také rovnost

$$\int_X \nu(E_x)\mathrm{d}\mu(x) = \mu \otimes \nu(E).$$

podobně jako v části i). Zbytek tvrzení se odvodí analogicky.

2) Předpokládejme nyní, že μ a ν jsou σ-konečné míry. Potom existují $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ a $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}$, tak že $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ a $Y = \cup_{n=1}^{\infty} Y_n$ a $\mu(X_n) < \infty$ a $\nu(Y_n) < \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Navíc množiny X_n a Y_n lze volit tak, že $X_n \subset X_{n+1}$ a $Y_n \subset Y_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ (rozmyslete).

Nechť $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ pevné je zúžení μ na X_n konečná míra, a proto můžeme aplikovat závěry části 1), ze kterých plyne, že funkce

$$f_n(x) := \mu\left((E \cap X_n \times Y_n)_x\right) = \chi_{X_n}(x)\mu\left(E_x \cap Y_n\right)$$

je $\mathcal{M}$-měřitelná a platí

$$\int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu(x) = \mu \otimes \nu\left(E \cap X_n \times Y_n\right).$$

Jelikož pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n \leq f_{n+1}$, protože $X_n \times Y_n \subset X_{n+1} \times Y_{n+1}$, můžeme ještě jednou aplikovat Větu 5.23 o monotónní konvergenci spolu se spojitostí měr zdola, z čehož vyvodíme, že funkce

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mu(E_x)$$

je $\mathcal{M}$-měřitelná a

$$\begin{aligned}\int_X \mu(E_x)\mathrm{d}\mu(x) &= \int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \mu \otimes \nu\left(E \cap X_n \times Y_n\right) \\ &= \mu \otimes \nu(E).\end{aligned}$$

Měřitelnost druhé funkce a také druhou rovnost z tvrzení ověříme analogicky. □

Konečně se dostáváme k větě, která je spojením dvou tvrzení - *Tonelliho a Fubiniho*. Tyto věty říkají, za jakých předpokladů lze integrál z funkce f na $X \times Y$ vzhledem k součinové míře $\mu \otimes \nu$ počítat tak, že integrujeme f nejprve v první proměnné vzhledem k μ a poté v druhé proměnné vzhledem k ν nebo naopak. Tonelliho předpoklad vyžaduje měřitelnost a nezápornost f, tedy $f \in \mathscr{L}_+(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$, kdežto Fubiniho předpoklad je integrabilita f, tedy $f \in L(\mu \otimes \nu)$. Mimo její teoretický význam, je Fubiniho–Tonelliho věta praktický nástroj pro výpočet vícerozměrných integrálů. Speciálně věta dává postačující podmínky pro záměnu pořadí integrace funkce více proměnných.

Věta 5.66 (Fubini–Tonelli)**:** Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ jsou prostory se σ-konečnými mírami μ a ν.

1. (Tonelli) Je-li $f \in \mathscr{L}_+(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$, potom

$$(\forall x \in X)(f(x, \cdot) \in \mathscr{L}_+(Y, \mathcal{N})), \qquad (\forall y \in Y)(f(\cdot, y) \in \mathscr{L}_+(X, \mathcal{M})),$$

$$\int f(\cdot, y) \mathrm{d}\nu(y) \in \mathscr{L}_+(X, \mathcal{M}), \qquad \int f(x, \cdot) \mathrm{d}\mu(x) \in \mathscr{L}_+(Y, \mathcal{N})$$

   a platí:

$$\int f \, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y). \quad (60)$$

2. (Fubini) Je-li $f \in L(\mu \otimes \nu)$, potom

$$(\mu\text{-s.v. } x \in X)(f(x, \cdot) \in L(\nu)), \qquad (\nu\text{-s.v. } y \in Y)(f(\cdot, y) \in L(\mu)),$$

$$\int f(\cdot, y) \mathrm{d}\nu(y) \in L(\mu), \qquad \int f(x, \cdot) \mathrm{d}\mu(x) \in L(\nu)$$

   a opět platí (60).

Důkaz. 1. Označme $f_x := f(x, \cdot)$ a $f^y := f(\cdot, y)$. Jelikož pro libovolnou množinu $B \subset \overline{\mathbb{R}}$, $x \in X$ a $y \in Y$ platí

$$\left(f^{-1}(B)\right)_x = (f_x)^{-1}(B) \quad \text{a} \quad \left(f^{-1}(B)\right)^y = (f^y)^{-1}(B),$$

ověříme s pomocí Lemma 5.61 implikaci:

$$f \text{ je } \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}\text{-měřitelná} \Rightarrow (\forall x \in X)(\forall y \in Y)(f_x \text{ je } \mathcal{N}\text{-měřitelná a } f^y \text{ je } \mathcal{M}\text{-měřitelná}).$$

Tedy předpoklad $f \in \mathscr{L}_+(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ implikuje, že $f_x \in \mathscr{L}_+(Y, \mathcal{N})$ a $f^y \in \mathscr{L}_+(X, \mathcal{M})$ pro každé $x \in X$ a $y \in Y$, což je první tvrzení Tonelliho věty.

Všimněte si, že pro $E \subset X \times Y$, $x \in X$ a $y \in Y$ platí:

$$(\chi_E)_x = \chi_{E_x} \quad \text{a} \quad (\chi_E)^y = \chi_{E^y},$$

kde jsme opět použili značení $(\chi_E)_x(y) = \chi_E(x,y)$ a $(\chi_E)^y(x) = \chi_E(x,y)$. Z tohoto pozorování přímo ověříme, že je-li speciálně $f = \chi_E$, kde $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, je zbývající část Tonelliho věty schodná s tvrzením Věty 5.65. Díky linearitě integrálu rozšíříme snadno platnost tvrzení Tonelliho věty také pro případ, že f je měřitelná nezáporná jednoduchá funkce.

Předpokládejme nyní obecnou funkci $f \in \mathscr{L}_+(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$. Buď $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající posloupnost jednoduchých funkcí z $\mathscr{L}_+(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$, $\phi_n \to f$ z Věty 5.15. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme

$$g_n := \int_Y \phi_n(\cdot, y)\mathrm{d}\nu(y).$$

Potom $g_n \in \mathscr{L}_+(X, \mathcal{M})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a z Věty o monotónní konvergenci aplikované na posloupnost $\{\phi_n(x,\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ dostaneme, že

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_Y \phi_n(x,y)\mathrm{d}\nu(y) = \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y).$$

pro každé $x \in X$. Aplikujeme-li nyní Větu o monotónní konvergenci na neklesající posloupnost funkcí $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ a dále také na $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, vyvodíme, že $g \in \mathscr{L}_+(X, \mathcal{M})$ a

$$\begin{aligned}\int_X g(x)\mathrm{d}\mu(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X \left(\int_Y \phi_n(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} \phi_n \,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu),\end{aligned}$$

neboli

$$\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x).$$

Zcela analogicky, pokud bychom namísto g_n uvažovali funkce

$$h_n := \int_X \phi_n(x,\cdot)\mathrm{d}\mu(x),$$

odvodili bychom, že

$$h := \lim_{n\to\infty} h_n = \int_X f(x,\cdot)\mathrm{d}\mu(x) \in \mathscr{L}_+(Y, \mathcal{N})$$

a rovnost

$$\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y).$$

2. Nechť $f \in L(\mu\otimes\nu)$ a navíc předpokládejme, že $f \geq 0$. Potom je $f \in \mathscr{L}_+(X\times Y, \mathcal{M}\otimes\mathcal{N})$ a $\int f\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) < \infty$. Potom z již dokázané Tonelliho věty víme, že nezáporné měřitelné funkce $g := \int f(\cdot,y)\mathrm{d}\nu(y)$ a $h := \int f(x,\cdot)\mathrm{d}\mu(x)$ splňují

$$\int_X g(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y h(y)\mathrm{d}\nu(y) = \int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) < \infty,$$

z čehož plyne $g \in L(\mu)$ a $h \in L(\nu)$, a proto podle Lemma 5.33 je $g < \infty$ μ-s.v. a $h < \infty$ ν-s.v. Odtud a z definice funkcí g a h plyne, že $f(x,\cdot) \in L(\nu)$ pro μ-s.v. $x \in X$ a $f(\cdot, y) \in L(\mu)$ pro ν-s.v. $y \in Y$.

Nyní pro obecnou funkci $f \in L(\mu \otimes \nu)$ stačí aplikovat poslední pozorování a již dokázanou Tonelliho větu jednotlivě na kladné a záporné části funkcí $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ a získáme tvrzení Fubiniho věty (rozmyslete). $\square$

Poznámka: Závorky objevující se v rovnici (60) často vynecháváme a píšeme např.

$$\int \left(\int f(x,y) \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int \int f(x,y) \mathrm{d}\nu(y) \mathrm{d}\mu(x) = \int \int f \, \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\mu.$$

Pořadí integrace je jasné i z tohoto stručnějšího značení.

Poznámka: Předpoklad σ-konečnosti měr μ a ν v Tonelliho–Fubiniho větě je nezbytný, viz Cvičení 5.11. Taktéž předpoklad $f \in \mathscr{L}_+(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ je v Tonelliho větě nezbytný a podobně předpoklad $f \in L(\mu \otimes \nu)$ pro Fubiniho větu, jak ilustruje Příklad 5.67 níže. Dokonce se dá ukázat, že oba integrály $\int \int f \mathrm{d}\mu \mathrm{d}\nu$ a $\int \int f \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\mu$ mohou existovat i pro neměřitelnou funkci f, avšak v takovém případě nemusí mít stejnou hodnotu, viz např. [10, Sec. 2.5, Exer. 47].

Poznámka: Obě věty, Tonelliho a Fubiniho, se často používají společně. Obvyklá je např. situace, že máme měřitelnou funkci f a chceme zaměnit pořadí integrace ve „dvojném integrálu“ $\int \int f \mathrm{d}\mu \mathrm{d}\nu$. Abychom dokázali integrabilitu f, ukážeme konečnost integrálu $\int |f| \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)$, který spočítáme/odhadneme postupným integrováním $\int \int |f| \mathrm{d}\mu \mathrm{d}\nu$ nebo $\int \int |f| \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\mu$, což umožňuje Tonelliho věta. Poté už Fubiniho věta garantuje záměnu pořadí integrace $\int \int f \mathrm{d}\mu \mathrm{d}\nu = \int \int f \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\mu$.

Příklad 5.67: Uvažujme $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = 2^{\mathbb{N}}$ a $\mu = \nu$ počítací míry. Definujme funkci $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vztahem

$$f(m,n) = \begin{cases} 1, & m = n, \\ -1, & m = n+1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom pro $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\int_{\mathbb{N}} f(m,n) \mathrm{d}\mu(m) = \sum_{m=1}^{\infty} f(m,n) = f(n,n) + f(n+1,n) = 1 - 1 = 0,$$

Pro $m \in \mathbb{N}$ je

$$\int_{\mathbb{N}} f(m,n) \mathrm{d}\mu(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(m,n) = \begin{cases} f(1,1) = 1, & \text{je-li } m = 1, \\ f(m,m-1) + f(m,m) = -1 + 1 = 0, & \text{je-li } m \geq 2. \end{cases}$$

Odtud vidíme, že

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(m,n) \mathrm{d}\mu(m) \mathrm{d}\mu(n) = \int_{\mathbb{N}} 0 \, \mathrm{d}\mu(n) = 0,$$

kdežto

$$\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\mathrm{d}\mu(n)\mathrm{d}\mu(m) = \int_{\mathbb{N}} \chi_{\{1\}}(m)\,\mathrm{d}\mu(m) = 1.$$

Tedy

$$\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\mathrm{d}\mu(m)\mathrm{d}\mu(n) \neq \int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\mathrm{d}\mu(n)\mathrm{d}\mu(m),$$

neboli rovnost z Fubiniho věty neplatí.

Není totiž splněn předpoklad Fubiniho věty, neboť $f \notin L(\mu \otimes \mu)$, jak ukážeme dále. Snadno určíme pozitivní a negativní část f:

$$f^+(m,n) = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \qquad f^-(m,n) = \begin{cases} 1, & m = n+1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Odtud

$$\int f^\pm \,\mathrm{d}(\mu \otimes \mu) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} f^\pm(m,n) = \infty,$$

a proto $f \notin L(\mu \otimes \mu)$.

I v případě, že jsou obě míry μ a ν úplné, není součinová míra $\mu \otimes \nu$ téměř nikdy úplná. Skutečně pokud existuje $\emptyset \neq A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$ a $\mathcal{N} \neq 2^Y$ (např. jsou-li $\mu = \nu = m$ Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$), potom pro libovolnou $B \in 2^Y \setminus \mathcal{N}$ je $A \times B \notin \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, jinak bychom dostali spor s Lemma 5.61, neboť pro $x \in A$ je $(A \times B)_x = B$. Avšak $A \times B \subset A \times Y$ a $\mu \otimes \nu(A \times Y) = \mu(A)\nu(Y) = 0$, a proto $\mu \otimes \nu$ není úplná.

Chceme-li pracovat s úplnou mírou, přirozeně se nabízí míru $\mu \otimes \nu$ zúplnit. Tonelliho–Fubiniho věta platí i pro případ zúplněné součinové míry.

Věta 5.68 (Fubini–Tonelli pro úplné míry)**:** Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ jsou prostory s úplnými σ-konečnými mírami μ a ν. Označme $(X \times Y, \mathcal{R}, \rho)$ zúplnění prostoru $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \otimes \nu)$, tj. $\mathcal{R} := \overline{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}$ a $\rho := \overline{\mu \otimes \nu}$.

1. (Tonelli) Je-li $f \in \mathscr{L}_+(X \times Y, \mathcal{R})$, potom

$$(\mu\text{-s.v. } x \in X)(f(x,\cdot) \in \mathscr{L}_+(Y,\mathcal{N})), \qquad (\nu\text{-s.v. } y \in Y)(f(\cdot,y) \in \mathscr{L}_+(X,\mathcal{M})),$$
$$\int f(\cdot,y)\mathrm{d}\nu(y) \in \mathscr{L}_+(X,\mathcal{M}), \qquad \int f(x,\cdot)\mathrm{d}\mu(x) \in \mathscr{L}_+(Y,\mathcal{N})$$

a platí:

$$\int f\,\mathrm{d}\rho = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y). \tag{61}$$

2. (Fubini) Je-li $f \in L(\rho)$, potom

$$(\mu\text{-s.v. } x \in X)(f(x,\cdot) \in L(\nu)), \qquad (\nu\text{-s.v. } y \in Y)(f(\cdot,y) \in L(\mu)),$$
$$\int f(\cdot,y)\mathrm{d}\nu(y) \in L(\mu), \qquad \int f(x,\cdot)\mathrm{d}\mu(x) \in L(\nu)$$

a opět platí (61).

Důkaz. Nejprve si důkaz redukujeme na ρ-s.v. nulové funkce. Předpokládejme, že f je $\mathcal{R}$-měřitelná funkce. Podle Věty 5.17 existuje $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-měřitelná funkce g taková, že $g = f$ ρ-s.v. Definujme $h := f - g$. Potom h je $\mathcal{R}$-měřitelná a $h = 0$ ρ-s.v. Protože (standardní) Fubiniho–Tonelliho Věta 5.66 je aplikovatelná na g, stačí dokázat tvrzení pro ρ-s.v. nulovou funkci h namísto f.

V další části důkazu použijeme následující pozorování.

Lemma 5.69: Nechť $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ a $\mu \otimes \nu(E) = 0$. Potom

$$(\mu\text{-s.v. } x \in X)(\nu(E_x) = 0) \quad \text{a} \quad (\nu\text{-s.v. } y \in Y)(\mu(E^y) = 0).$$

Důkaz Lemma 5.69. Aplikací Tonelliho věty na charakteristickou funkci χ_E dostaneme

$$\int_X \nu(E_x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \int_Y \underbrace{\chi_{E_x}(y)}_{=\chi_E(x,y)} \mathrm{d}\nu(y) \mathrm{d}\mu(x) = \mu \otimes \nu(E) = 0,$$

a proto je $\nu(E_x) = 0$ pro μ-s.v. $x \in X$, viz Věta 5.28. Podobně dokážeme i druhé tvrzení. $\square$

Protože je $h = 0$ ρ-s.v. a ρ je zúplnění $\mu \otimes \nu$, existuje $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, $\mu \otimes \nu(E) = 0$ a

$$\{(x, y) \in X \times Y \mid h(x, y) \neq 0\} \subset E.$$

Vezmeme-li v poslední inkluzi x-řezy, dostaneme

$$\{y \in Y \mid h(x, y) \neq 0\} \subset E_x.$$

Podle Lemma 5.69 je $\nu(E_x) = 0$ pro μ-s.v. $x \in X$, a proto pro tato x je

$$\nu\left(\{y \in Y \mid h(x, y) \neq 0\}\right) = 0$$

díky úplnosti ν. To znamená, že pro μ-s.v. $x \in X$ je funkce $h(x, \cdot)$ ν-nulová. Analogicky se ukáže, že pro ν-s.v. $y \in Y$ je funkce $h(\cdot, y)$ μ-nulová.

Podle Věty 5.16 jsou funkce $h(x, \cdot)$ a $h(\cdot, y)$ měřitelné pro μ-s.v. $x \in X$ a ν-s.v. $y \in Y$ a vzhledem k jejich nulovosti s.v. také integrabilní pro μ-s.v. $x \in X$ a ν-s.v. $y \in Y$. Odtud dále plyne, že

$$\int_X h(x, y) \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y h(x, y) \mathrm{d}\nu(x) = 0$$

pro μ-s.v. $x \in X$ a ν-s.v. $y \in Y$, z čehož již plynou všechna tvrzení dokazované věty pro ρ-nulovou funkci h, neboť $\int h \mathrm{d}\rho = 0$. $\square$

Pomocí Fubiniho Věty můžeme spočítat Dirichletův integrál z Příkladu 5.53 bez použití výsledků z komplexní analýzy i teorie Fourierových řad.

Příklad 5.70: Vyjdeme z rovnosti

$$\int_0^n e^{-yx} \mathrm{d}y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} e^{-nx},$$

která platí pro každé $x > 0$ a $n \in \mathbb{N}$. Vynásobíme ji $\sin x$ a integrujeme od 0 do n. Potom

$$\int_0^n \int_0^n e^{-yx} \sin x \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^n \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x - \int_0^n e^{-nx}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x. \tag{62}$$

Jelikož je $|e^{-xy}\sin x| \leq 1$, $\forall x, y \in (0, n)$, je integrand vlevo v (62) integrabilní funkce, tj. v $L((0,n)^2, m \otimes m)$, můžeme podle Fubiniho věty prohodit pořadí integrace. Vnitřní integrál spočítáme jako Riemannův např. dvojnásobnou aplikací per partes (detaily přenechány čtenáři) a vyjde nám:

$$\int_0^n e^{-yx}\sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{1+y^2} - \frac{e^{-ny}\cos n}{1+y^2} - \frac{ye^{-ny}\sin n}{1+y^2}$$

pro každé $y > 0$ a $n \in \mathbb{N}$. Zintegrujeme-li poslední výraz v proměnné y od 0 do n, zjistíme, že se levá strana (62) rovná

$$\operatorname{arctg} n - \cos(n)\int_0^n \frac{e^{-ny}}{1+y^2}\mathrm{d}y - \sin(n)\int_0^n \frac{ye^{-ny}}{1+y^2}\mathrm{d}y.$$

Aplikací Lebesguoevy věty ukážeme, že

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{e^{-ny}}{1+y^2}\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \chi_{(0,n)}(y)\frac{e^{-ny}}{1+y^2}\mathrm{d}y = 0$$

a podobně

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{ye^{-ny}}{1+y^2}\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \chi_{(0,n)}(y)\frac{ye^{-ny}}{1+y^2}\mathrm{d}y = 0,$$

neboť z odhadů

$$\frac{e^{-ny}}{1+y^2} \leq e^{-y} \quad \text{a} \quad \frac{ye^{-ny}}{1+y^2} \leq ye^{-y},$$

které platí pro každé $y > 0$ a $n \in \mathbb{N}$, dostaneme integrabilní majoranty z $L((0,\infty), m)$. Vidíme tedy, že

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \int_0^n e^{-yx}\sin x \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2}.$$

Podívejme se na limitu výrazu na pravé straně (62) pro $n \to \infty$. Aplikujeme-li opět Lebesgueovu větu, zjistíme, že druhý člen má také nulovou limitu, neboť

$$\left|\chi_{(0,n)}(x)e^{-nx}\frac{\sin x}{x}\right| \leq e^{-x}$$

pro všechna $x > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ a my můžeme zaměnit limitu a integrál. Odtud celkem po limitním přechodu $n \to \infty$ v rovnosti (62) dostáváme, že

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

což jsme chtěli ukázat.

5.6 Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^n$ a Věta o substituci

Nyní když už máme zavedenou Lebesgueovu míru m na $\mathbb{R}$ a víme, co je součinová míra, můžeme definovat *Lebesgueovu míru na* $\mathbb{R}^n$. Zavedeme ji přirozeně jako součin n Lebesguevých měr m na $\mathbb{R}$, který navíc zúplníme.

Definice 5.71 (Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^n$)**:** Míru m^n definovanou na σ-algebře $\mathcal{L}^n$ podmnožin $\mathbb{R}^n$, která vznikne zúplněním míry $m \otimes \cdots \otimes m$ na $\mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}$, tedy

$$\mathcal{L}^n := \overline{\mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}} \quad \text{a} \quad m^n := \overline{m \otimes \cdots \otimes m},$$

nazýváme *Lebesgueovou mírou na* $\mathbb{R}^n$ a množiny z $\mathcal{L}^n$ *Lebesgueovsky měřitelné* podmnožiny $\mathbb{R}^n$.

Nemůže-li dojít k pochybnostem, budeme vynechávat horní index n a psát jen m místo m^n. Také místo $\int f \mathrm{d}m$ budeme často psát $\int f(x)\mathrm{d}x$ (i pro $n > 1$). Integrál vzhledem k Lebesgueově míře se nazývá *Lebesgueův*.

Poznámka: Všimněte si, že

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \subset \mathcal{L}^n,$$

dokonce $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \subset \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}$, neboť $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ podle Důsledku 4.14 a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}$.

Připomeňme, že množiny tvaru $E = \times_{j=1}^n E_j$, kde $E_j \in \mathcal{L}$, nazýváme měřitelné obdélníky. Speciálně jsou-li E_j intervaly pro všechna $j \in \hat{n}$, nazýváme E n-interval. Tedy n-intervaly jsou měřitelné obdélníky, ale ne naopak (ačkoliv to geometricky docela neodpovídá). Nejprve si ukážeme, že vlastnosti, které jsme již dříve dokázali pro Lebesgueovy–Stieltjesovy míry na $\mathbb{R}$, platí také pro Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}^n$.

Věta 5.72:

1. Pro každé $E \in \mathcal{L}^n$ platí:

   $$m(E) = \inf\{m(U) \mid E \subset U \ \wedge\ U \text{ otevřená}\} = \sup\{m(K) \mid K \subset E \ \wedge\ K \text{ kompaktní}\}.$$

2. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

   a) $E \in \mathcal{L}^n$,

   b) $E = H \cup N$, kde $H \subset \mathbb{R}^n$ je F_σ-množina a $N \in \mathcal{L}^n$, $m(N) = 0$.

   c) $E = V \setminus N$, kde $V \subset \mathbb{R}^n$ je G_δ-množina a $N \in \mathcal{L}^n$, $m(N) = 0$.

3. Je-li $E \in \mathcal{L}^n$, $m(E) < \infty$, potom

   $$(\forall \epsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\exists R_1, \ldots, R_k \ n\text{-intervaly}) \left(m\left(E \Delta \bigcup_{j=1}^{k} R_j \right) < \epsilon \right).$$

Důkaz. 1. Nechť $E \in \mathcal{L}^n$. Dokážeme nejprve vnější regularitu m^n. Zvolme $\epsilon \in (0,1)$. Z definice součinové míry jako zúžení příslušné vnější míry, viz (37), plyne, že existuje posloupnost měřitelných obdélníků $T_j = T_1^{(j)} \times \cdots \times T_n^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, taková, že $E \subset \cup_{j=1}^\infty T_j$ a

$$\sum_{j=1}^{\infty} m^n(T_j) \leq m^n(E) + \epsilon.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $m^n(T_j) < \infty$ pro každé $j \in \mathbb{N}$, jinak bychom místo $\{T_j\}_{j=1}^\infty$ vzali např. spočetný systém $\{T_j \cap (-l,l)^n \mid j,l \in \mathbb{N}\}$.

Pro každé $j \in \mathbb{N}$ můžeme aplikovat Větu 4.47 na množiny $T_1^{(j)}, \dots, T_n^{(j)} \in \mathcal{L}$, z níž plyne existence otevřených množin $U_1^{(j)}, \dots, U_n^{(j)} \subset \mathbb{R}$ tak, že

$$(\forall i \in \hat{n}) \left(m\left(U_i^{(j)}\right) \leq m\left(T_i^{(j)}\right) + \epsilon 2^{-j}\delta_j \right),$$

kde $\delta_j > 0$ volíme dostatečně malé tak, aby

$$\delta_j \left(1 + \max_{i\in\hat{n}} m\left(T_i^{(j)}\right)\right)^n < 1.$$

Důvod pro tuto speciální volbu se vyjasní dále. Podstatné je jen to, že výraz, kterým násobíme δ_j, je nějaké konečné číslo, což je zde zaručeno, protože $m^n(T_j) = m(T_1^{(j)}) \dots m(T_n^{(j)}) < \infty$.

Pro každé $j \in \mathbb{N}$ položme $U_j := U_1^{(j)} \times \cdots \times U_n^{(j)}$. Potom $U_j \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $U_j \supset T_j$ a platí:

$$\begin{aligned} m^n(U_j) &= \prod_{i=1}^n m\left(U_i^{(j)}\right) \leq \prod_{i=1}^n \left[m\left(T_i^{(j)}\right) + \epsilon 2^{-j}\delta_j\right] \\ &= \prod_{i=1}^n m\left(T_i^{(j)}\right) + \epsilon 2^{-j}\delta_j \sum_{l=0}^{n-1} \underbrace{\left(\epsilon 2^{-j}\delta_j\right)^{n-l-1}}_{\leq 1} \underbrace{\sum_{1\leq i_1 \leq \cdots \leq i_l \leq n} m\left(T_{i_1}^{(j)}\right) \dots m\left(T_{i_l}^{(j)}\right)}_{\leq \binom{n}{l}\left[\max_{i\in\hat{n}} m\left(T_i^{(j)}\right)\right]^l}. \end{aligned}$$

Tedy

$$m^n(U_j) \leq m^n(T_j) + \epsilon 2^{-j}\delta_j \left(1 + \max_{i\in\hat{n}} m\left(T_i^{(j)}\right)\right)^n < m^n(T_j) + \epsilon 2^{-j}$$

pro každé $j \in \mathbb{N}$. Nyní stačí položit $U := \cup_{j=1}^\infty U_j$. Potom je U otevřená, $U \supset E$ a platí:

$$m^n(U) \leq \sum_{j=1}^\infty m^n(U_j) \leq \sum_{j=1}^\infty m^n(T_j) + \epsilon \leq m^n(E) + 2\epsilon,$$

z čehož už vyplývá jedna nerovnost pro vnější regularitu míry m^n. Druhá nerovnost je zřejmá.

Pro důkaz vnitřní regularity m^n již stačí jen mírně modifikovat postup v důkazu Věty 4.47, neboť ten staví na již dokázané vnější regularitě a obecných vlastnostech míry (Cvičení 5.12).

2. S již dokázanou regularitou m^n stačí jen mírně modifikovat postup důkazu Věty 4.48. Modifikace spočívá v tom, že polouzavřené intervaly $(j, j+1]$, $j \in \mathbb{N}$, nahradíme n-intervaly $\times_{i=1}^n (j_i, j_i + 1]$, $j_1, \dots j_n \in \mathbb{N}$. Detaily jsou přenechány čtenáři jako Cvičení 5.12.

3. Podobně jako v předchozím případě stačí mírně modifikovat postup z důkazu Věty 4.49. Uvědomte si, že pro $x \in \mathbb{R}^n$ je systém otevřených n-intervalů $\{\times_{i=1}^n (x_i - r_i, x_i + r_i) \mid r_1, \dots, r_n > 0\}$ lokální bází v x obvyklé topologie $\mathbb{R}^n$, a proto každou otevřenou množinu lze napsat jako sjednocení množin tohoto systému. Zbytek důkazu je analogie a je přenechán čtenáři jako Cvičení 5.12. $\square$

Tvrzení 2. Věty 5.72, které vyjadřuje, že lebesgueovsky měřitelné množiny lze aproximovat „pěknými“ množinami, má následující okamžitý důsledek.

Důsledek 5.73: Množina $E \in \mathcal{L}^n$, právě když

$$(\exists H, V \subset \mathbb{R}^n)(H \text{ je } F_\sigma\text{-množina}, V \text{ je } G_\delta\text{-množina})(H \subset E \subset V \ \wedge \ m(V \setminus H) = 0).$$

Důkaz. Implikace ($\Rightarrow$): Nechť $E \in \mathcal{L}^n$. Potom množiny H a V z 2. tvrzení Věty 5.72 jsou množinami z dokazovaného výroku, neboť $V \setminus H = N \cup \tilde{N}$, a tudíž $m(V \setminus H) = 0$.

Implikace ($\Leftarrow$): Předpokládejme, že platí výrok z tvrzení a položme $\tilde{N} := V \setminus E$. Potom $E = V \setminus \tilde{N}$. Jelikož $\tilde{N} \subset V \setminus H$ a $m(V \setminus H) = 0$ plyne z úplnosti Lebesgueovy míry, že $\tilde{N} \in \mathcal{L}^n$ a $m(\tilde{N}) = 0$. Podle Věty 5.72 je $E \in \mathcal{L}^n$. $\square$

Věta 5.74: Nechť $f \in L(m)$. Potom ke každému $\epsilon > 0$ existuje jednoduchá funkce $\phi = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{R_j}$, kde množiny $R_1, \ldots, R_m$ jsou n-intervaly, tak, že $\int |f - \phi| \mathrm{d}m < \epsilon$.

Důkaz. Postup je zcela analogický důkazu Věty 5.46. Funkci f nejprve aproximujeme jednoduchou funkcí podle Věty 5.15 a tu poté dále aproximujeme jednoduchou funkcí kýženého tvaru $\phi = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{R_j}$, kde množiny $R_1, \ldots, R_m$ jsou n-intervaly, což umožňuje 3. tvrzení Věty 5.72. $\square$

Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^n$ je hledaný „zobecněný objem“, jehož nalezení byla motivace v úvodu kapitoly o teorii míry (i když samozřejmě neměří objem všech podmnožin $\mathbb{R}^n$). Zřejmě m^n přiřazuje n-intervalům jejich objem v původním smyslu, neboť z definice součinové míry máme např.

$$m^n\left([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]\right) = \prod_{i=1}^n m\left([a_i, b_i]\right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)\,.$$

Dále jsme požadovali, aby hledaný objem byl translačně invariantní a také invariantní vůči rotaci a zrcadlení množiny (vzhledem k nějaké nadrovině). V další části si ukážeme, že Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^n$ má i tyto vlastnosti.

Věta 5.75: Lebesgueova míra je translačně invariantní. Přesněji je-li $a \in \mathbb{R}^n$ a $\tau_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ posunutí definované vztahem $\tau_a(x) = x + a$, potom platí:

1. Pokud $E \in \mathcal{L}^n$, pak $\tau_a(E) \in \mathcal{L}^n$ a $m(\tau_a(E)) = m(E)$.

2. Pokud je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ lebesgueovsky měřitelná, je také $f \circ \tau_a$ lebesgueovsky měřitelná a je-li navíc buď $f \geq 0$, nebo $f \in L(m)$, potom

$$\int (f \circ \tau_a) \mathrm{d}m = \int f \mathrm{d}m.$$

Důkaz. 1. Protože je τ_a spojité zobrazení a $\tau_a^{-1} = \tau_{-a}$, vyplývá z Důsledku 5.3, že

$$E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \quad \Leftrightarrow \quad \tau_a(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

Označme $m_a := m(\tau_a(\cdot))$. Jednoduše ověříme, že m_a je σ-konečná míra na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Z translační invariance Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}$, viz Věta 4.50, plyne, že $m_a(E) = m(E)$ pro každý obdélník $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \cdots \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Protože m, jakožto míra na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, je určená jednoznačně svým působením na obdélníky z $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \cdots \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, což plyne z 3. tvrzení Věty 4.38, rozšíříme rovnost

$$m_a(E) = m(E) \tag{63}$$

na všechny množiny z $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

Abychom rozšířili 1. tvrzení na lebesgueovsky měřitelné množiny, stačí ověřit implikaci

$$N \in \mathcal{L}^n,\ m(N) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_a(N) \in \mathcal{L}^n,\ m(\tau_a(N)) = 0. \tag{64}$$

Skutečně je-li $E \in \mathcal{L}^n$, existují podle Věty 5.72 F_σ-množina H a $N \in \mathcal{L}^n$, $m(N) = 0$, tak, že $E = H \cup N$. Potom $\tau_a(H)$ je F_σ-množina a platí-li implikace (64), také $\tau_a(N) \in \mathcal{L}^n$, $m(\tau_a(N)) = 0$. A protože $\tau_a(E) = \tau_a(H) \cup \tau_a(N)$, je $\tau_a(E) \in \mathcal{L}^n$ opět podle Věty 5.72. Navíc

$$m(\tau_a(E)) = m(\tau_a(H)) = m_a(H) = m(H) = m(E),$$

kde jsme použili (63).

Zbývá tedy dokázat implikaci (64). Všimněte si, že je-li $N \in \mathcal{L}^n$ a $m(N) = 0$, potom vnější regularita m zaručuje existenci množiny $F \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ (dokonce G_δ) takové, že $F \supset N$ a $m(F) = 0$. Skutečně podle 1. tvrzení Věty 5.72 existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ otevřená množina $U_n \supset N$ taková, že $m(U_n) < 1/n$. Nyní stačí položit $F := \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Tedy $\tau_a(N) \subset \tau_a(F)$ a $m(\tau_a(F)) = m(F) = 0$ podle (63). Z úplnosti m plyne, že $\tau_a(N) \in \mathcal{L}^n$ a také $m(\tau_a(N)) = 0$, což jsme chtěli dokázat.

2. Je-li f lebesgueovsky měřitelná a $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$, potom $f^{-1}(B) \in \mathcal{L}^n$, a proto podle Věty 5.72 je $f^{-1}(B) = H \cup N$, kde $H \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ a $N \in \mathcal{L}^n$, $m(N) = 0$. Potom podle 1. tvrzení máme $\tau_a^{-1}(H) \in \mathcal{L}^n$ a $\tau_a^{-1}(N) \in \mathcal{L}^n$, a proto

$$(f \circ \tau_a)^{-1}(B) = \tau_a^{-1}\left(f^{-1}(B)\right) = \tau_a^{-1}(H) \cup \tau_a^{-1}(N) \in \mathcal{L}^n.$$

Tedy $f \circ \tau_a$ je lebesgueovsky měřitelná.

Je-li $f = \chi_E$ pro $E \in \mathcal{L}^n$, platí rovnost $\int (f \circ \tau_a) \mathrm{d}m = \int f \mathrm{d}m$, právě když $m(\tau_{-a}(E)) = m(E)$, což platí podle 1. tvrzení. Potom rovnost $\int (f \circ \tau_a) \mathrm{d}m = \int f \mathrm{d}m$ platí také pro každou jednoduchou měřitelnou funkci f z linearity integrálu. Rovnost dále rozšíříme na funkce $f \in \mathscr{L}_+$ aplikací Vět 5.15 a 5.23. Nakonec pro funkce $f \in L(m)$ stačí použít předchozí výsledek na kladnou a zápornou část funkcí $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$. □

Poznámka: Dá se dokonce ukázat, že translačně invariantní míra μ definovaná na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ už musí být Lebesgueova až na multiplikativní konstantu. Přesněji je-li $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ translačně invariantní míra taková, že $\mu(K) < \infty$ pro každou $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní, potom existuje $c \geq 0$ taková, že $\mu(E) = cm(E)$ pro všechna $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Pokud bychom navíc požadovali, aby $\mu([0,1]^n) = 1$, potom už $\mu = m$ na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Důkaz tohoto tvrzení najde čtenář v [23, Věta 2.20].

Abychom dokázali, že je Lebesgueova míra také invariantní vůči rotaci a zrcadlení, podíváme se obecněji na chování Lebesgueova integrálu, je-li argument funkce ztransformován lineárním regulárním zobrazením $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Jako obvykle ztotožníme zobrazení $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

s jeho maticí ${}^{\mathcal{E}}T$ vzhledem ke standardní bázi $\mathcal{E}$ prostoru $\mathbb{R}^n$ a ve značení nebudeme rozlišovat $T \equiv {}^{\mathcal{E}}T$.

Připomeňme si některá fakta z lineární algebry. Elementární kroky Gaussovy eliminační metody jsou následující tři:

1. Prohození i-tého a j-tého řádku matice.
2. Vynásobení i-tého řádku matice konstantou $c \neq 0$.
3. Přičtení j-tého řádku matice k i-tému.

Tyto 3 úpravy lze realizovat vynásobením zleva regulárními maticemi $T_1, T_2, T_3 \in \mathbb{R}^{n,n}$, které odpovídají zobrazením:

1. $T_1(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n), \quad (i \neq j).$
2. $T_2(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, cx_i, \ldots, x_n), \quad (c \neq 0),$
3. $T_3(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_n), \quad (i \neq j).$

Zřejmě $\det T_1 = -1$, $\det T_2 = c$ a $\det T_3 = 1$. Jelikož každou regulární matici lze převést konečně mnoha kroky Gaussovy eliminační metody na jednotkovou matici, je každá regulární matice produkt konečně mnoha matic typu 1, 2 a 3.

Věta 5.76: Nechť $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ je regulární.

1. Je-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ lebesgueovsky měřitelná, potom $f \circ T$ je také lebesgueovsky měřitelná a je-li navíc buď $f \geq 0$, nebo $f \in L(m)$, potom platí:
$$\int f(x)\mathrm{d}x = |\det T| \int f \circ T(x)\mathrm{d}x. \tag{65}$$
2. Je-li $E \in \mathcal{L}^n$, pak $T(E) \in \mathcal{L}^n$ a $m(T(E)) = |\det T| m(E)$.

Důkaz. Důkaz provedeme ve dvou krocích. Nejprve dokážeme 1. tvrzení pro borelovsky měřitelné funkce. Poté provedeme rozšíření získaného výsledku i na lebesgueovsky měřitelné funkce a v rámci této technické pasáže dokážeme také 2. tvrzení.

1) **Tvrzení 1. pro borelovsky měřitelnou funkci f:** Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ je borelovsky měřitelná. Potom je také $f \circ T$ borelovsky měřitelná, protože je T spojité zobrazení.

1a) Ověření rovnosti (65) pro $n = 1$: Je-li speciálně $n = 1$, potom T je operátor násobení konstantou $c \neq 0$ a rovnost (65) má tvar
$$\int f(x)\mathrm{d}x = |c| \int f(cx)\mathrm{d}x. \tag{66}$$

Pro $E \in \mathcal{L}$ a $f = \chi_E$ identita (66) vyplývá z Věty 4.50. Z linearity integrálu dostaneme rovnost (66) také pro libovolnou měřitelnou jednoduchou funkci. Poté rozšíříme (66) na lib. borelovsky měřitelné $f \geq 0$ aplikací Vět 5.15 a 5.23. Nakonec pro funkce $f \in L(m)$ stačí použít předchozí výsledek na $(\operatorname{Re} f)^{\pm}$ a $(\operatorname{Im} f)^{\pm}$ a využít identity $f = (\operatorname{Re} f)^{+} - (\operatorname{Re} f)^{-} + \mathrm{i}(\operatorname{Im} f)^{+} - \mathrm{i}(\operatorname{Im} f)^{-}$. Rovnost (66) tedy speciálně platí pro lib. borelovsky měřitelnou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, která je buď nezáporná, nebo integrabilní.

1b) Ověření rovnosti (65) pro obecné $n \in \mathbb{N}$: Nejprve si všimněte, že platí-li vzorec pro dvě regulární zobrazení T a S, platí i pro složení $T \circ S$, neboť v takovém případě máme

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x &= |\det T| \int f \circ T(x)\mathrm{d}x = |\det T||\det S| \int (f \circ T) \circ S(x)\mathrm{d}x \\ &= |\det(T \circ S)| \int f \circ (T \circ S)(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Proto stačí ověřit rovnost (65) pro speciální zobrazení T_1, T_2 a T_3 realizující elementární kroky Gaussovy eliminační metody (viz definice před větou), neboť každé regulární zobrazení je složením konečně mnoha těchto elementárních zobrazení.

Předpokládejme, že f je borelovsky měřitelná funkce splňující buď $f \geq 0$, nebo $f \in L(m)$. Je-li $T = T_1$, můžeme aplikovat Toneliho–Fubiniho Větu 5.66 a v i-tém a j-tém dílčím (jednorozměrném) integrálu přejmenovat proměnnou x_i na x_j a naopak. Tak dokážeme (65) pro $T = T_1$.

Je-li $T = T_2$, potom opět s vyuitím Toneliho–Fubiniho věty a aplikací rovnosti (66) v i-tém dílčím integrálu dostaneme

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x &= \int \cdots \int \cdots \int f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_i \ldots \mathrm{d}x_n \\ &= |c| \int \cdots \int \cdots \int f(x_1, \ldots, cx_i, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_i \ldots \mathrm{d}x_n \\ &= |\det T_2| \int f \circ T_2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

V případě $T = T_3$ se postupuje analogicky jen místo (66) aplikujeme v i-tém dílčím integrálu již známý (jednorozměrný) vztah

$$\int f(x+a)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Tím je vzorec (65) dokázán pro případ borelovsky měřitelné funkce f.

2) **Rozšíření 1. tvrzení na lebesgueovsky měřitelné funkce a 2. tvrzení:** Nejprve dokážeme 2. tvrzení. Protože jsou T i T^{-1} spojitá zobrazení zachovává T borelovské množiny, tj.

$$E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \quad \Leftrightarrow \quad T(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

Proto můžeme definovat míru $m_T : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ vztahem $m_T(E) = m(T(E))$ pro $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Položíme-li v již dokázané rovnosti (65) $f = \chi_E$ pro $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ (a vezmeme-li T^{-1} místo T), dostaneme

$$m_T(E) = |\det T| m(E)$$

pro všechna $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Nyní stačí analogicky jako v důkazu Věty 5.75 ověřit implikaci

$$N \in \mathcal{L}^n,\ m(N) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(N) \in \mathcal{L}^n,\ m(T(N)) = 0,$$

(proveďte), čímž dokončíme důkaz 2. tvrzení.

Dále můžeme ověřit implikaci:

$$f \text{ lebesgueovsky měřitelná} \quad \Rightarrow \quad f \circ T \text{ lebesgueovsky měřitelná}$$

analogicky jako v důkazu 2. tvrzení Věty 5.75 (proveďte). Tím je dokázána implikace z 1. tvrzení.

Zbývá rozšířit vzorec (65) na lebesgueovsky měřitelné funkce. K tomu stačí postupovat opět analogicky jako v důkazu 2. tvrzení Věty 5.75, neboť pro $f = \chi_E$, kde $E \in \mathcal{L}^n$, plyne rovnost (65) z již dokázaného 2. tvrzení. Dále z linearity rozšíříme (65) na měřitelné jednoduché funkce a pomocí Vět 5.15 a 5.23 na nezáporné měřitelné funkce . Nakonec pro $f \in L(m)$ stačí aplikovat dokázaný výsledek na kladnou a zápornou část funkcí $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$. □

Připomeňme, že jak rotace, tak zrcadlení jsou realizovány ortogonální maticí R, tj. $R^T R = I$, neboť obě transformace jsou lineární zobrazení, která zachovávají délky vektorů z $\mathbb{R}^n$, viz Cvičení 5.13.

Důsledek 5.77: Lebesgueova míra je invariantní vůči ortogonální transformaci. Speciálně Lebesgueova míra je invariantní vůči rotaci a zrcadlení.

Důkaz. Stačí si uvědomit, že z rovnosti $R^T R = I$ plyne $|\det R| = 1$ a aplikovat Větu 5.76. □

Tuto část zakončíme větou o substituci v Lebesgueově integrálu. Pro její důkaz budeme potřebovat jedno pomocné tvrzení. K tomuto účelu si označme množinu speciálních n-intervalů

$$\mathcal{Q}_k := \left\{ \left[\frac{a_1}{2^k}, \frac{a_1}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right] \times \cdots \times \left[\frac{a_n}{2^k}, \frac{a_n}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right] \;\middle|\; a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \right\},$$

kde $k \in \mathbb{N}_0$. Všimněte si, že n-intervaly z $\mathcal{Q}_k$ jsou n-krychle se stranou délky 2^{-k} a vrcholy v bodech mřížky $(2^{-k}\mathbb{Z})^n$. Libovolné dvě různé krychle z $\mathcal{Q}_k$ mají disjunktní vnitřky. Krychle systému $\mathcal{Q}_{k+1}$ vzniknou z krychlí systému $\mathcal{Q}_k$ „půlením stran“. Označme ještě

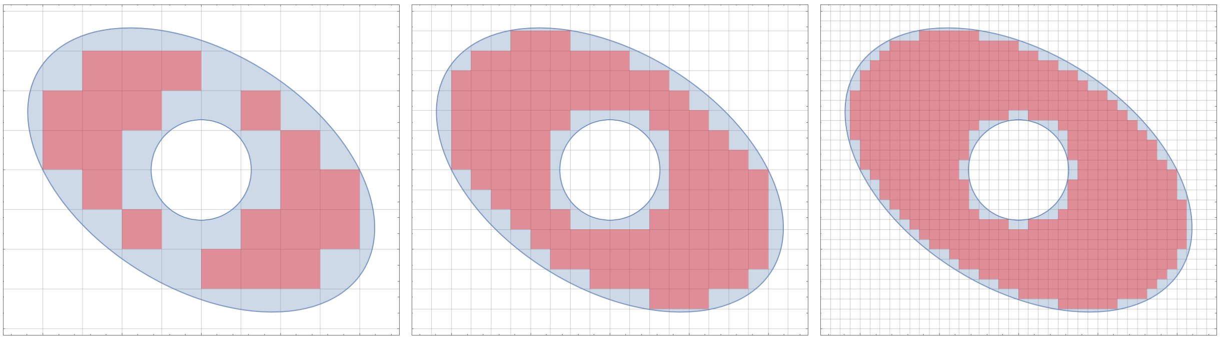
$$A_k(E) := \bigcup \{Q \in \mathcal{Q}_k \mid Q \subset E\}$$

sjednocení krychlí z $\mathcal{Q}_k$, které jsou obsaženy v $E \subset \mathbb{R}^n$, viz Obrázek 15.

Lemma 5.78: Je-li $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, potom

$$U = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k(U).$$

Navíc každá otevřená množina v $\mathbb{R}^n$ je sjednocením spočetně mnoha uzavřených n-intervalů s disjunktními vnitřky.



Obrázek 15: Ilustrace množin $A_2(E)$, $A_3(E)$ a $A_4(E)$ (červeně) pro množinu E (modře).

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat jen inkluzi $U \subset \cup_{k=0}^{\infty} A_k(U)$ pro $U \neq \emptyset$. Buď $x \in U$. Pro lib. $k \in \mathbb{N}$ existuje $Q \in \mathcal{Q}_k$ obsahující x, protože krychle z $\mathcal{Q}_k$ pokrývají $\mathbb{R}^n$. Všimněte si, že je-li také $y \in Q$, potom $|x_i - y_i| \leq 2^{-k}$ pro každé $i \in \hat{n}$, a proto

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{2^k}.$$

Z otevřenosti U plyne, že existuje $\delta > 0$ tak, že $B_x(\delta) \subset U$. Vezmeme-li nyní $k \in \mathbb{N}$ dost velké tak, aby

$$\frac{\sqrt{n}}{2^k} < \delta,$$

najdeme krychli $Q \in \mathcal{Q}_k$ takovou, že $x \in Q \subset B_x(\delta) \subset U$. Tudíž $x \in A_k(U)$.

Pro důkaz druhého tvrzení si stačí uvědomit, že

$$U = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k(U) = A_0(U) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k(U) \setminus A_{k-1}(U).$$

Množina $A_0(U)$ je nejvýše spočetné sjednocení krychlí z $\mathcal{Q}_0$ a pro $k \in \mathbb{N}$ je uzávěr množiny $A_k(U) \setminus A_{k-1}(U)$ také nejvýše spočetné sjednocení krychlí z $\mathcal{Q}_k$, které jsou stále obsaženy v U. Všechny tyto krychle mají disjunktní vnitřky a jejich sjednocení je rovno U. $\square$

Nyní můžeme dokázat Větu o substituci v Lebesgueově integrálu, která má zásadní význam pro aplikace. Připomeňme, že zobrazení $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, nazýváme *difeomorfismus*, je-li $\phi : \Omega \to \phi(\Omega)$ bijekce, $\phi \in C^1(\Omega)$ a $\phi^{-1} \in C^1(\phi(\Omega))$. Připomeňme také, že je-li $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ prosté zobrazení třídy C^1 na Ω takové, že Jacobiho matice $D\phi(x)$ je regulární pro každé $x \in \Omega$, potom je ϕ difeomorfismus, jak plyne z Věty 3.54 o inverzní funkci. Navíc platí $D\phi^{-1}(y) = (D\phi(\phi^{-1}(y)))^{-1}$ pro všechna $y \in \phi(\Omega)$.

Věta 5.79 (O substituci)**:** Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus.

1. Je-li f lebesgueovsky měřitelná na $\phi(\Omega)$, potom je $f \circ \phi$ lebesgueovsky měřitelná na Ω a pokud navíc $f \geq 0$ nebo $f \in L(\phi(\Omega), m)$, potom platí:

$$\int_{\phi(\Omega)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\Omega} f \circ \phi(x) |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x.$$

2. Je-li $E \subset \Omega$ a $E \in \mathcal{L}^n$, potom $\phi(E) \in \mathcal{L}^n$ a $m(\phi(E)) = \int_E |\det D\phi(x)|\mathrm{d}x$.

Důkaz. Dokážeme pouze 1. tvrzení pro borelovské měřitelnou funkci f a $\Omega \neq \emptyset$. Rozšíření tvrzení na lebesgueovsky měřitelné funkce i důkaz 2. tvrzení se provede standardní procedurou jako v důkazech Vět 5.75 a 5.76. Detaily jsou přenechány čtenáři.

Důkaz provedeme v několika krocích. V důkazu budeme na $\mathbb{R}^n$ uvažovat maximovou normu $\|x\|_\infty = \max_{j \in \hat{n}} |x_j|$, protože potom uzavřená n-krychle Q splývá s uzavřenou r-koulí $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_\infty \leq r\}$ pro nějaká $r \geq 0$ a $a \in \mathbb{R}^n$ (střed krychle). Všimněte si, že $m(Q) = (2r)^n$.

a) Uvažujme $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_\infty \leq r\}$ uzavřenou n-krychli obsaženou v Ω. Věta 3.26 o přírůstku platí ve stejném znění, nahradíme-li euklidovskou normu normou $\|\cdot\|_\infty$. K tomu si stačí uvědomit, že Lemma 3.27 platí i pro maximovou normu. Aplikujeme-li tuto Větu o přírůstku na ϕ a konvexní množinu Q, dostaneme

$$\|\phi(x) - \phi(a)\|_\infty \leq \left(\sup_{y \in Q} \|D\phi(y)\|\right) \|x - a\|_\infty \leq \left(\sup_{y \in Q} \|D\phi(y)\|\right) r$$

pro všechna $x \in Q$. Jinými slovy je množina $\phi(Q)$ obsažena v n-krychli, která je produktem intervalů délky $2r \left(\sup_{y \in Q} \|D\phi(y)\|\right)$, a proto

$$m(\phi(Q)) \leq \left[2r \left(\sup_{y \in Q} \|D\phi(y)\|\right)\right]^n = \left(\sup_{y \in Q} \|D\phi(y)\|\right)^n m(Q).$$

Aplikujeme-li tuto nerovnost se zobrazením ϕ nahrazeným $T^{-1} \circ \phi$, kde $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ je regulární, získáme s využitím Věty 5.76 nerovnost

$$m(\phi(Q)) = |\det T|\, m\big(T^{-1} \circ \phi(Q)\big) \leq |\det T| \left(\sup_{y \in Q} \|T^{-1} D\phi(y)\|\right)^n m(Q), \tag{67}$$

která platí pro každou uzavřenou n-krychli $Q \subset \Omega$ a regulární $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

b) Jelikož $\phi \in C^1(\Omega)$, je $D\phi$ spojité na Ω, a proto také na kompaktní množině Q. Podle Cantorovy Věty 2.96 je $D\phi$ spojité na Q stejnoměrně, a proto

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y, z \in Q, \|y - z\|_\infty < \delta) \left(\|D\phi(y) - D\phi(z)\| < \frac{\epsilon}{\sup_{x \in Q} \|(D\phi(x))^{-1}\|}\right).$$

Odtud dále vyvodíme, že

$$\begin{aligned} \left\|(D\phi(z))^{-1} D\phi(y)\right\| &\leq \left\|(D\phi(z))^{-1} (D\phi(y) - D\phi(z))\right\| + \|I\| \\ &\leq \sup_{x \in Q} \|(D\phi(x))^{-1}\| \|D\phi(y) - D\phi(z)\| + 1 < \epsilon + 1 \end{aligned}$$

pro všechna $y, z \in Q$ taková, že $\|y - z\|_\infty < \delta$.

Rozdělme n-krychli Q na podkrychle $Q_1, \dots, Q_N$ s disjunktními vnitřky a stranou menší než δ. Označme si $x_1, \dots, x_N$ středy krychlí $Q_1, \dots, Q_N$. Potom aplikujeme-li nerovnost (67), kde Q nahradíme Q_j a $T = D\phi(x_j)$, dostaneme

$$\begin{aligned} m(\phi(Q)) &\le \sum_{j=1}^N m(\phi(Q_j)) \le \sum_{j=1}^N |\det D\phi(x_j)| \left(\sup_{y \in Q_j} \left\| (D\phi(x_j))^{-1} D\phi(y) \right\| \right)^n m(Q_j) \\ &< (1+\epsilon) \sum_{j=1}^N |\det D\phi(x_j)| m(Q_j) \end{aligned} \tag{68}$$

Poslední výraz lze interpretovat jako integrál

$$\sum_{j=1}^N |\det D\phi(x_j)| m(Q_j) = \int_Q \sum_{j=1}^N |\det D\phi(x_j)| \chi_{Q_j}(x) \mathrm{d}x.$$

Protože je funkce $\det D\phi$ spojitá na Q, platí

$$\lim_{\delta \to 0+} \sum_{j=1}^N |\det D\phi(x_j)| \chi_{Q_j}(x) = |\det D\phi(x)|$$

pro každé $x \in Q$ (rozmyslete). Ze spojitosti $\det D\phi$ na kompaktu Q také plyne, že $\det D\phi$ je integrabilní na Q, a proto podle Lebesgueovy věty je

$$\lim_{\delta \to 0+} \sum_{j=1}^N |\det D\phi(x_j)| m(Q_j) = \int_Q |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x.$$

Tudíž pošleme-li v (68) $\epsilon \to 0+$ a $\delta \to 0+$, získáme nerovnost

$$m(\phi(Q)) \le \int_Q |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x. \tag{69}$$

c) V dalším kroku ukážeme, že nerovnost (69) platí, i když Q nahradíme libovolnou borelovskou podmnožinou Ω. Uvažujme nejprve neprázdnou otevřenou množinu $U \subset \Omega$. Podle Lemma 5.78 je $U = \cup_{j=1}^\infty Q_j$, kde $\{Q_j\}_{j=1}^\infty$ jsou uzavřené n-krychle s disjunktními vnitřky. Společné hranice těchto krychlí jsou kartézským součinem uzavřených intervalů, z nichž jeden je jednobodová množina, a proto mají tyto hranice nulovou (n-dimenzionální) Lebesgueovu míru. Proto máme

$$m(\phi(U)) \le \sum_{j=1}^\infty m(\phi(Q_j)) \le \sum_{j=1}^\infty \int_{Q_j} |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x = \int_U |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x,$$

kde jsme využili nerovnost (69).

Označme $W_K := \{x \in \Omega \mid |x| < K \ \wedge \ |\det D\phi(x)| < K\}$, kde $K > 0$. Zvolme pevně $K > 0$ a předpokládejme, že E je borelovská podmnožina W_K. Z vnější regularity m, viz Věta 5.72, plyne existence otevřených množin $U_j \subset W_{K+1}$ takových, že $U_{j+1} \subset U_j$ pro každé $j \in \mathbb{N}$ a $m(E) = m(\cap_{j=1}^{\infty} U_j)$ (rozmyslete). Potom využijeme-li spojitosti míry m zespodu a Lebesgueovy Věty 5.43 (existenci integrabilní majoranty zajišťuje omezení na podmnožiny W_{K+1}), dostaneme

$$\begin{aligned} m(\phi(E)) \leq m\left(\phi\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j\right)\right) &= \lim_{j\to\infty} m(\phi(U_j)) = \lim_{j\to\infty} \int_{U_j} |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x \\ &= \int_{\cap_{j=1}^{\infty} U_j} |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x = \int_E |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Poslední rovnost platí, protože $m\left(\cap_{j=1}^{\infty} U_j \setminus E\right) = 0$.

Nakonec je-li $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ libovolná, aplikujeme předchozí argument na množinu $E \cap W_K$ a pošleme $K \to \infty$. Potom ze spojitosti míry m zdola a Věty 5.23 o monotónní konvergenci odvodíme, že nerovnost

$$m(\phi(E)) \leq \int_E |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x \tag{70}$$

platí pro každé $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

d) Nechť $f = \sum_{j=1}^{m} a_n \chi_{A_j}$ je nezáporná borelovsky měřitelná jednoduchá funkce na $\phi(\Omega)$. Potom s využitím (70) máme

$$\int_{\phi(\Omega)} f(x) \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{m} a_j m(A_j) \leq \sum_{j=1}^{m} a_j \int_{\phi^{-1}(A_j)} |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x = \int_{\Omega} f(\phi(x)) |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x.$$

Dále aplikací Vět 5.15 a 5.23 dokážeme nerovnost

$$\int_{\phi(\Omega)} f(x) \mathrm{d}x \leq \int_{\Omega} f \circ \phi(x) |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x$$

pro každou nezápornou borelovsky měřitelnou funkci f na $\phi(\Omega)$. Vezmeme-li v poslední nerovnosti funkci $|\det D\phi(\cdot)| f \circ \phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ místo f a zobrazení ϕ^{-1} místo ϕ, dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \circ \phi(x) |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x &\leq \int_{\phi(\Omega)} (f \circ \phi)(\phi^{-1}(x)) |\det (D\phi) (\phi^{-1}(x))| |\det D\phi^{-1}(x)| \mathrm{d}x \\ &= \int_{\phi(\Omega)} f(x) \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

kde jsme použili identitu $D\phi^{-1}(x) = ((D\phi)(\phi^{-1}(x)))^{-1}$, viz Věta 3.54. Celkem jsme tedy dokázali rovnost

$$\int_{\phi(\Omega)} f(x) \mathrm{d}x = \int_{\Omega} f \circ \phi(x) |\det D\phi(x)| \mathrm{d}x$$

pro každou nezápornou borelovsky měřitelnou funkci f na $\phi(\Omega)$. Je-li borelovsky měřitelná $f \in L(\phi(\Omega), m)$, stačí aplikovat získaný výsledek na jednotlivé funkce $(\mathrm{Re}\, f)^{\pm}$, $(\mathrm{Im}\, f)^{\pm}$ a využít rozklad $f = (\mathrm{Re}\, f)^{+} - (\mathrm{Re}\, f)^{-} + \mathrm{i}(\mathrm{Im}\, f)^{+} - \mathrm{i}(\mathrm{Im}\, f)^{-}$. $\square$

Poznámka: Větu o substituci lze dokázat i za mírně slabších předpokladů, viz [23, Věta 7.26].

Příklad 5.80: Pěknou aplikací Věty o substituci a Toneliho–Fubiniho věty je výpočet integrálu

$$I := \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} \mathrm{d}x,$$

kde $a > 0$, který není jednoduché spočítat metodami integrace funkcí jedné proměnné.

Kvadrát I můžeme podle Tonelliho–Fubiniho věty vyjádřit ve tvaru

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} \mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2} \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x^2+y^2)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)} \mathrm{d}m(x,y).$$

V posledním integrálu provedeme substituci pomocí transformace do *polárních souřadnic*:

$$\phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Zobrazení $\phi : (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty,0] \times \{0\}$ je hladká bijekce. Navíc

$$\det D\phi(r,\varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r > 0,$$

a tudíž je ϕ (hladký) difeomorfismus podle Věty o inverzním zobrazení. Předpoklady Věty 5.79 o substituci jsou tedy splněny. Uvážíme-li ještě, že záporná polopřímka, kterou v oboru hodnot ϕ vyjímáme z roviny $\mathbb{R}^2$, je množina nulové (dvourozměrné) Lebesgueovy míry, dostaneme

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus (-\infty,0] \times \{0\}} e^{-a(x^2+y^2)} \mathrm{d}m(x,y) = \int_{(0,\infty)\times(-\pi,\pi)} e^{-ar^2} r \mathrm{d}m(r,\varphi).$$

Dále opět podle Tonelliho–Fubiniho věty máme

$$I^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} r e^{-ar^2} \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-ar^2} \mathrm{d}r = 2\pi \left[-\frac{1}{2a} e^{-ar^2} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{a},$$

a proto

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

5.7 Lebesgueovy prostory L^p

V celé této části budeme opět předpokládat, že je pevně dán obecný prostor s mírou $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Na lineárním prostoru integrabilních funkcí bychom rádi zavedli normu. Přirozeným kandidátem by byla volba

$$\|f\| := \int |f| \mathrm{d}\mu,$$

ovšem toto zobrazení je pouze seminorma, neboť z rovnosti $\|f\| = 0$ obecně neplyne $f = 0$ na X, ale pouze $f = 0$ μ-**s.v.** na X, viz Věta 5.39.

S tímto drobným nedostatkem se vypořádáme tak, že ztotožníme měřitelné funkce f a g, které se rovnají μ-s.v. Technicky se to provede tak, že lineární prostor měřitelných funkcí, označme ho na chvíli $\mathscr{M}$ (či nějaký jeho podprostor, viz níž) faktorizujeme podle relace „rovnost μ-s.v". Tím se nám $\mathscr{M}$ rozpadne na množinu $M := \{[f] \mid f \in \mathscr{M}\}$ tříd ekvivalence $[f] := \{g \mid g = f \ \mu\text{-s.v}\}$. Na M zavedeme lineární strukturu přirozeným způsobem: $[f] + [g] := [f+g]$ a $\alpha[f] := [\alpha f]$. Zobrazení $\|\cdot\|$ zavedené na M vztahem $\|[f]\| := \|f\|$ je dobře definované, neboť hodnota integrálu nezávisí na volbě funkce (reprezentanta) z třídy $[f]$. Podstatné je, že nyní platí implikace: $\|[f]\| = 0 \Rightarrow [f] = [0]$ a třída $[0]$ je nulovým prvkem prostoru M.

Konstrukci klasických Lebesgueových prostorů $L^p \equiv L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, které závisí ještě na jednom indexu $p \in [1, \infty]$, provedeme v následujících pěti krocích:

I) Pro měřitelnou funkci $f : X \to \mathbb{C}$ a $p \in [1, \infty]$ definujeme

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}, \qquad \text{je-li } p \in [1, \infty),$$

a

$$\|f\|_\infty := \inf\{c > 0 \mid |f(x)| \leq c \text{ pro } \mu\text{-s.v. } x \in X\}$$

je tzv. *esenciální supremum* funkce $|f|$.

II) Definujeme

$$\mathscr{L}^p \equiv \mathscr{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ měřitelná a } \|f\|_p < \infty\}\,.$$

III) Faktorizujeme $\mathscr{L}^p$ podle relace „rovnost μ-s.v." a definujeme tak množinu

$$L^p \equiv L^p(X, \mathcal{M}, \mu) := \{[f] \mid f \in \mathscr{L}^p\}\,.$$

IV) Na L^p zavedeme operace sčítání a násobení číslem $\alpha \in \mathbb{C}$ vztahy:

$$[f] + [g] := [f + g] \quad \text{ a } \quad \alpha[f] := [\alpha f].$$

Dále definujeme zobrazení $\|\cdot\|_p : L^p \to [0, \infty)$ vztahem $\|[f]\|_p := \|f\|_p$. Tato definice je korektní, tj. nezávisí na volbě reprezentanta třídy $[f]$, protože $(\forall g \in [f])(\|g\|_p = \|f\|_p)$.

V) **Konvence:** Pokud není rozlišování mezi prvkem $[f]$ množiny L^p a reprezentantem f v principu věci, tak jej neprovádíme. Píšeme např. „funkce f náleží L^p", tj. „$f \in L^p$" a myslíme tím $[f] \in L^p$.

Poznámka: Případ $p = \infty$ je trochu speciální. Všimněte si, že pro $g : X \to [0, \infty)$ měřitelnou platí:

$$(\mu\text{-s.v. } x \in X)(g(x) \leq \|g\|_\infty).$$

Skutečně je-li množina $\{c > 0 \mid (\mu\text{-s.v. } x \in X)(g(x) \leq c)\} = \emptyset$, pak klademe $\|g\|_\infty = \infty$ (z konvence pro infimum). Jinak

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists F_n \in \mathcal{M}, \mu(F_n) = 0)(\forall x \in X \setminus F_n)\left(g(x) \leq \|g\|_\infty + \frac{1}{n}\right).$$

Potom množina $F := \cup_{n=1}^\infty F_n$ je μ-nulová a pro všechna $x \in X \setminus F$ platí $g(x) \leq \|g\|_\infty$.

Měřitelná funkce $f : X \to \mathbb{C}$ taková, že $\|f\|_\infty < \infty$, se nazývá *esenciálně omezená.* Esenciálně omezená funkce nemusí být omezená. K dobrému pochopení definice esenciálního suprema si rozmyslete následující příklad.

Příklad 5.81: Uvažujme $X = \mathbb{R}$, Lebesgueovu míru $\mu = m$ a funkce

$$f(x) = \begin{cases} -3, & x < 0, \\ 5, & x \in \{1, 2, 4\}, \\ 1, & \text{jinak}, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^5, & x \in \mathbb{Q}, \\ \operatorname{arctg} x, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} 1/x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Potom $\|f\|_\infty = 3$, $\|g\|_\infty = \pi/2$ a $\|h\|_\infty = \infty$.

Nejprve ukážeme, že zkonstruované prostory L^p jsou lineární prostory s normou $\|\cdot\|_p$ pro každé $p \in [1, \infty]$. Netriviální je ověřit, že $\|\cdot\|_p$ splňuje trojúhelníkovou nerovnost pro $p \in (1, \infty)$. Trojúhelníkovou nerovnost dokážeme pomocí tzv. *Hölderovy nerovnosti*, která je důležitá sama o sobě. Pro její důkaz budeme potřebovat následující pomocnou nerovnost.

Lemma 5.82 (Youngova nerovnost)**:** Nechť $a, b \geq 0$ a $p, q > 1$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom platí:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz. Důkaz stačí provést za předpokladu $ab > 0$, tj. $a > 0$ a $b > 0$, protože pro $ab = 0$ tvrzení zřejmě platí. Vyjdeme z toho, že funkce $f(x) = \ln x$ je konkávní funkce na $(0, \infty)$, neboť $f''(x) = -1/x^2 < 0$. Tudíž pro každé $x, y \in (0, \infty)$ a $\lambda \in (0, 1)$ platí nerovnost

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Položíme-li $\lambda := 1/p$, $x := a^p$ a $y := b^q$, potom $1 - \lambda = 1/q$ a dostaneme

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q,$$

což po úpravě implikuje Youngovu nerovnost. □

Věta 5.83 (Hölderova nerovnost)**:** Nechť $p, q > 1$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a $f, g : X \to \mathbb{C}$ jsou měřitelné funkce. Potom platí:

$$\int |fg| \mathrm{d}\mu \leq \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \left(\int |g|^q \mathrm{d}\mu\right)^{1/q}.$$

Speciálně jsou-li $f \in L^p$ a $g \in L^q$, potom $fg \in L^1$ a platí:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Poslední tvrzení platí (triviálně) i pro limitní pár $p = 1$ a $q = \infty$.

Důkaz. Označme

$$s := \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \quad \text{a} \quad t := \left(\int |g|^q \mathrm{d}\mu\right)^{1/q}.$$

Je-li $s = 0$, potom je $f = 0$ μ-s.v., z čehož plyne, že $\int |fg| \mathrm{d}\mu = 0$, a tudíž nerovnost platí. Podobně pro $t = 0$. Je-li $s = \infty$ a $t > 0$, potom nerovnost platí triviálně a případ $t = 0$ již byl vyřízen.

Stačí tedy předpokládat, že $0 < s, t < \infty$. Aplikujeme-li Youngovu nerovnost (Lemma 5.82) s

$$a := \frac{|f(x)|}{s} \quad \text{a} \quad b := \frac{|g(x)|}{t},$$

dostaneme pro každé $x \in X$ nerovnost

$$\frac{|f(x)g(x)|}{st} \leq \frac{|f(x)|^p}{ps^p} + \frac{|g(x)|^q}{qt^q}.$$

Odtud máme

$$\frac{1}{st} \int |fg| \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{ps^p} \underbrace{\int |f|^p \mathrm{d}\mu}_{=s^p} + \frac{1}{qt^q} \underbrace{\int |g|^q \mathrm{d}\mu}_{=t^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

neboli

$$\int |fg| \mathrm{d}\mu \leq st,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Nyní již můžeme dokázat i trojúhelníkovou nerovnost pro $\|\cdot\|_p$, která je v tomto případě známá jako *Minkowského nerovnost.*

Věta 5.84 (Minkowského nerovnost)**:** Nechť $p \geq 1$ a $f, g : X \to \mathbb{C}$ jsou měřitelné funkce. Potom platí:

$$\left(\int |f + g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

Důkaz. Případ $p = 1$ plyne okamžitě z vlastností integrálu, neboť

$$\int |f + g| \mathrm{d}\mu \leq \int (|f| + |g|) \mathrm{d}\mu = \int |f| \mathrm{d}\mu + \int |g| \mathrm{d}\mu.$$

Nechť $p > 1$. Protože

$$\int |f + g|^p \mathrm{d}\mu \leq \int (|f| + |g|)^p \, \mathrm{d}\mu,$$

můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $f, g \geq 0$. Dále zřejmě stačí uvažovat jen případy, kdy je pravá strana Minkowského nerovnosti konečná a levá strana kladná, tj.

$$\int f^p \mathrm{d}\mu < \infty, \quad \int g^p \mathrm{d}\mu < \infty \quad \text{a} \quad \int (f + g)^p \mathrm{d}\mu > 0. \tag{71}$$

Aplikujeme-li (dvakrát) Hölderovu nerovnost na pravé straně v rovnosti

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$$

s $q := p/(p-1)$, aby $1/p + 1/q = 1$, odvodíme nerovnost

$$\int (f+g)^p \mathrm{d}\mu \le \left[\left(\int f^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} + \left(\int g^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \right] \left(\int (f+g)^{\overbrace{q(p-1)}^{=p}} \mathrm{d}\mu \right)^{1/q}.$$

Nyní stačí obě strany vydělit členem $\left(\int (f+g)^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/q}$ a uvážíme-li, že $1 - 1/q = 1/p$, dostaneme Minkowského nerovnost. Toto dělení lze ovšem provést pouze tehdy, pokud je

$$0 < \int (f+g)^p \mathrm{d}\mu < \infty.$$

To je zaručeno předpoklady (71) a tím, že

$$\int (f+g)^p \mathrm{d}\mu \le 2^{p-1} \left(\int f^p \mathrm{d}\mu + \int g^p \mathrm{d}\mu \right) < \infty,$$

kde jsme využili nerovnosti

$$\left(\frac{a+b}{2} \right)^p \le \frac{a^p}{2} + \frac{b^p}{2},$$

která platí pro každé $a, b \ge 0$ a vyplývá z konvexnosti funkce $x \mapsto x^p$ na $(0, \infty)$. □

Důsledek 5.85: Pro každé $p \in [1, \infty]$ je $(L^p, \|\cdot\|_p)$ normovaný prostor.

Důkaz. Ověření homogenity $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$ pro každé $f \in L^p$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ je jednoduché přímo z definice $\|\cdot\|_p$. Z konstrukce prostorů L^p je také zaručena platnost implikace: $\|f\|_p = 0 \;\Rightarrow\; f = 0$ jakožto nulový element (třída) prostoru L^p, tj. $f = 0$ μ-s.v.

Trojúhelníková nerovnost

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

je důsledek Věty 5.84 pro každé $f, g \in L^p$ a $p \in [1, \infty)$. Je-li $p = \infty$, splňují funkce $f, g \in L^\infty$ nerovnosti $|f| \le \|f\|_\infty$ a $|g| \le \|g\|_\infty$ μ-s.v. na X, a proto také

$$|f+g| \le |f| + |g| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

μ-s.v. na X. Odtud plyne, že $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Celkem tedy vidíme, že L^p je lineární prostor a $\|\cdot\|_p$ je norma na L^p pro každé $p \in [1, \infty]$. □

Příklad 5.86: Jedna netriviální nerovnost, se kterou už jsme se v tomto kurzu setkali, plyne z Minkowského nerovnosti jako speciální případ. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ a položme $X := \hat{n}$, $\mathcal{M} := 2^X$ a μ počítací míru na $\hat{n}$. Potom má Minkowského nerovnost pro $p \ge 1$ tvar

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |f(j) + g(j)|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^{n} |f(j)|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |g(j)|^p \right)^{1/p}$$

pro každé $f, g : \hat{n} \to \mathbb{C}$, což bychom mohli přepsat do tvaru

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{1/p}$$

pro $x, y \in \mathbb{C}^n$. Dostáváme tedy trojúhelníkovou nerovnost p-norem na $\mathbb{C}^n$.

Podobně vezmeme-li $X := \mathbb{N}$, $\mathcal{M} := 2^{\mathbb{N}}$ a μ počítací míru na $\mathbb{N}$, dostaneme nerovnost

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p\right)^{1/p}$$

pro libovolné komplexní posloupnosti $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ a $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$. Příslušný prostor $L^p(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ má v literatuře standardní značení

$$\ell^p(\mathbb{N}) := \left\{ \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\},$$

je-li $p \in [1, \infty)$ a

$$\ell^{\infty}(\mathbb{N}) := \left\{ \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \;\middle|\; \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < \infty \right\}$$

pro případ $p = \infty$.

Naprosto zásadní vlastností prostorů L^p je, že jsou úplné, což dokážeme v následující větě. Tedy pro každé $p \in [1, \infty]$ je L^p Banachův prostor a speciálně pro $p = 2$ je L^2 dokonce Hilbertův, protože norma $\|\cdot\|_2$ je indukována skalárním součinem

$$(f, g)_2 := \int \overline{f(x)} g(x) \mathrm{d}\mu(x),$$

kde $f, g \in L^2$.

Věta 5.87: Nechť $p \in [1, \infty]$. Potom $(L^p, \|\cdot\|_p)$ je úplný. Navíc je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská posloupnost funkcí z L^p, potom existuje podposloupnost $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $f \in L^p$ tak, že $\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f$ μ-s.v.

Důkaz. 1) Předpokládejme nejprve, že $p \in [1, \infty)$. Důkaz provedeme v několika krocích.

a) Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^p$ je cauchyovská, tzn., že

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0)(\forall m, n \geq n_0)(\|f_n - f_m\|_p < \epsilon).$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ položíme $\epsilon := 2^{-k}$ a najdeme $n_k \in \mathbb{N}$ tak, že

$$(\forall m, n \geq n_k)\left(\|f_n - f_m\|_p < \frac{1}{2^k}\right).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ je rostoucí. Označíme-li si podposloupnost $g_k := f_{n_k}$ pro $k \in \mathbb{N}$, platí

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \left(\|g_k - g_{k+1}\|_p < \frac{1}{2^k} \right). \tag{72}$$

b) Definujme posloupnost funkcí

$$h_k := |g_1| + \sum_{j=2}^{k} |g_j - g_{j-1}|, \quad k \in \mathbb{N},$$

Podle odhadu (72) a trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\|h_k\|_p \leq \|g_1\|_p + \sum_{j=2}^{k} \|g_j - g_{j-1}\|_p < \|g_1\|_p + 1$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$. Jelikož $0 \leq h_k \leq h_{k+1}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, můžeme aplikovat Větu 5.23 o monotónní konvergenci na posloupnost $\{h_k^p\}_{k=1}^{\infty}$, z níž pro limitní funkci $h := \lim_{k\to\infty} h_k$ dostaneme

$$\int h^p \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int h_k^p \mathrm{d}\mu \leq (\|g_1\|_p + 1)^p < \infty,$$

neboli h^p je integrabilní.

c) Protože $\int h^p \mathrm{d}\mu < \infty$, je $h^p < \infty$ μ-s.v., a tudíž také $h < \infty$ μ-s.v., viz Lemma 5.33. Zvolme $x \in X$, pro které je $h(x) < \infty$. Potom

$$|g_1(x)| + \sum_{j=2}^{\infty} |g_j(x) - g_{j-1}(x)| = h(x) < \infty.$$

To znamená, že řada

$$g_1(x) + \sum_{j=2}^{\infty} (g_j(x) - g_{j-1}(x))$$

konverguje absolutně, a tudíž je také konvergentní. Označíme si její součet $f(x)$ (máme kandidáta na limitu posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$). Potom

$$f(x) = g_1(x) + \lim_{k\to\infty} \sum_{j=2}^{k} (g_j(x) - g_{j-1}(x)) = \lim_{k\to\infty} g_k(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x), \tag{73}$$

neboli $f_{n_k} \to f$ μ-s.v., čímž bude dokázáno 2. tvrzení věty, až navíc ověříme, že $f \in L^p$.

d) K dokončení důkazu úplnosti L^p, ukážeme, že $\|f - g_k\|_p \to 0$. Potom totiž podle 4. tvrzení Lemma 2.107 je také $\|f - f_n\|_p \to 0$. Z (73) plyne, že $|f - g_k|^p \to 0$ μ-s.v. Dále pro $k \leq m$ máme

$$|g_k - g_m| \leq \sum_{j=k}^{m-1} |g_j - g_{j+1}|$$

a pošleme-li $m \to \infty$, dostaneme $|g_k - f| \leq h$ μ-s.v. Potom také $|g_k - f|^p \leq h^p$ μ-s.v. a jelikož je h^p integrabilní (majoranta), ospravedlňuje Lebesgueova věta záměnu limity a integrálu v rovnosti

$$\lim_{k\to\infty} \|f - g_k\|_p^p = \lim_{k\to\infty} \int |f - g_k|^p \mathrm{d}\mu = \int 0 \mathrm{d}\mu = 0,$$

což jsme chtěli ukázat. Navíc pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ máme

$$\|f\|_p \leq \|f - g_k\|_p + \|g_k\|_p < \infty,$$

neboť $g_k \in L^p$ a $\|f - g_k\|_p \to 0$. Tedy $f \in L^p$.

2) Důkaz věty pro $p = \infty$ je mnohem jednodušší. Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská posloupnost v $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ označme μ-nulové množiny

$$A_{m,n} := \{x \in X \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

a položme $F := \cup_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n}$. Potom $\mu(F) = 0$. Dále z cauchyovosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyplývá, že ke každému $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\sup_{x\in F^c} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$$

pro všechna $m, n \geq n_0$. To je ovšem Bolzanova–Cauchyho podmínka pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí f_n na F^c, viz Věta 1.12, a proto existuje funkce f definovaná na F^c tak, že

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in F^c} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Dodefinujme $f(x) := 0$ pro $x \in F$. Potom $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ a esenciální omezenost f plyne z nerovnosti $\|f\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty$, která platí pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. $\square$

5.8 Derivace míry a Radon–Nikodymova věta*

„Nepřednáší se ... snad někdy v budoucnu dopíšu.“

5.9 Cvičení

Cvičení 5.1: Nechť $f : X \to Y$. Ověřte následující vlastnosti vzoru množiny:

$$f^{-1}\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f^{-1}(E_\alpha), \quad f^{-1}\left(\bigcap_\alpha E_\alpha\right) = \bigcap_\alpha f^{-1}(E_\alpha), \quad f^{-1}\left(E^c\right) = \left(f^{-1}(E)\right)^c,$$

kde $E \subset X$ a $\{E_\alpha\}_\alpha \subset X$.

Cvičení 5.2: Dokažte rovnosti:

1. $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{E \subset \overline{\mathbb{R}} \mid E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$,
2. $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \mathcal{M}\left(\{(a, \infty] \mid a \in \mathbb{R}\}\right)$ a $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \mathcal{M}\left(\{[-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}\right)$.

Cvičení 5.3: Ověřte, že pro měřitelné funkce $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ platí:

1. Zvolme pevně $a \in \overline{\mathbb{R}}$, potom funkce $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definovaná vztahem

$$h(x) := \begin{cases} a, & \text{je-li } f(x) = -g(x) = \pm\infty, \\ f(x) + g(x), & \text{jinak,} \end{cases}$$

   je měřitelná.

2. Funkce fg je měřitelná (s konvencí $0 \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot 0 = 0$).

Cvičení 5.4: Předpokládejte platnost Fatouova lemma a pomocí něj dokažte Větu o monotónní konvergenci.

Cvičení 5.5: Dokažte následující variantu Věty o monotónní konvergenci pro nerostoucí posloupnost funkcí: Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{L}_+$, pro každé $\in \mathbb{N}$ je $f_n \geq f_{n+1}$, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ $(= \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n)$ a $\int f_1 \mathrm{d}\mu < \infty$. Potom $f \in \mathscr{L}_+$ a platí

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Najděte příklad, který ukazuje, že tvrzení neplatí, vynecháme-li předpoklad $\int f_1 \mathrm{d}\mu < \infty$.

Cvičení 5.6: Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{L}_+$, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ a $\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu < \infty$. Dokažte, že potom pro každé $E \in \mathcal{M}$ platí:

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu.$$

Dále ukažte na konkrétním příkladu, že tvrzení neplatí, pokud $\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \infty$.

Cvičení 5.7: Nechť $f \in \mathscr{L}_+$ a $\int f \mathrm{d}\mu < \infty$. Dokažte, že

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists E \in \mathcal{M}, \mu(E) < \infty)\left(\int_E f \mathrm{d}\mu > \left(\int f \mathrm{d}\mu\right) - \epsilon\right).$$

Cvičení 5.8: Nechť μ je konečná míra, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost omezených měřitelných funkcí a $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$. Dokažte, že $f \in L$ a platí

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Dále na konkrétním příkladu ukažte, že tvrzení neplatí, pokud $\mu(X) = \infty$.

Cvičení 5.9: Modifikujte postup důkazu 3. tvrzení Věty 5.46 a ukažte, že také prostor $C_c^\infty(\mathbb{R})$ hladkých funkcí s kompaktním nosičem je hustý v $L^1(\mu)$, kde μ je Lebesgueova–Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$.

Cvičení 5.10: Dokažte vlastnosti oscilace z důkazu Věty 5.54.

Cvičení* 5.11: Nechť $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, $\mu = m$ je Lebesgueova míra (zúžená na $\mathcal{B}_{[0,1]}$) a ν je počítací míra. Nechť $D = \{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$. Ukažte, že všechny tři integrály

$$\int\int f \mathrm{d}\mu \mathrm{d}\nu, \quad \int\int f \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\mu, \quad \int f \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)$$

mají různou hodnotu.
(Hint: Obtížné je ukázat, že $\int f \mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \infty$. Je třeba použít definici $\mu \otimes \nu$ pomocí vnější míry, viz (37). Uvažujme $\{A_n \times B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}_{[0,1]} \times \mathcal{B}_{[0,1]}$ pokrývající D. Ozn. $M := \{n \in \mathbb{N} \mid \mu(A_n) = 0\}$ a $S := \cup_{n\in M} A_n$. Potom $\mu(S) = 0$, a proto je $[0,1] \setminus S$ nespočetná. Množina $\{(x,x) \mid x \in [0,1] \setminus S\}$ je pokrytá množinami $\{A_n \times B_n\}_{n \in \mathbb{N}\setminus M}$, tj. $(\forall x \in [0,1] \setminus S)(\exists n \in \mathbb{N} \setminus M)((x,x) \in A_n \times B_n)$. Speciálně $[0,1] \setminus S \subset \cup_{n\in\mathbb{N}\setminus M} B_n$, a proto existuje $n_0 \in \mathbb{N} \setminus M$ tak, že B_{n_0} je nekonečná (dokonce nespočetná). Protože navíc $\mu(A_{n_0}) > 0$, je $\mu(A_{n_0})\nu(B_{n_0}) = \infty$.)

Cvičení 5.12: Doplňte detaily v důkazu Věty 5.72.

Cvičení 5.13: Nechť $R \in \mathbb{R}^{n,n}$ je takové, že $\|Rx\| = \|x\|$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$, kde $\|\cdot\|$ je euklidovská norma na $\mathbb{R}^n$. Ukažte, že R je ortogonální matice, tj. $R^T R = I$.

Cvičení 5.14: Prozkoumejte vztah mezi integrály

$$\int_{[0,1]^2} f(x,y) \mathrm{d}m(x,y), \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y, \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x,$$

kde

1. $$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

2. $$f(x,y) = \frac{1}{(1-xy)^a}, \quad a > 0,$$

3. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1/2)^3}, & 0 < y < |x - 1/2|, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Cvičení 5.15: Dokažte, že
$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}\frac{1}{a}$$
pro každé $a > 0$.
(Hint: Integrujte funkci $e^{-axy}\sin(x)$ podle x a y.)

Cvičení 5.16: Dokažte, že
$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{4}{a^2}\right)$$
pro každé $a > 0$.
(Hint: Integrujte funkci $e^{-ax}\sin(2xy)$ podle x a y.)

Cvičení 5.17: Dokažte, že
$$\int_{\mathbb{R}} x^{2n}e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{(2n)!}{4^n n!}\frac{\sqrt{\pi}}{a^{n+1/2}}$$
pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a $a > 0$.
(Hint: Derivujte integrál z Příkladu 5.80 podle a a aplikujte Větu 5.48.)

Cvičení 5.18: Nechť $p \in [1,\infty)$. Ukažte, že z konvergence μ-skoro všude neplyne konvergence v $(L^p, \|\cdot\|_p)$ a ani naopak.
(Hint: Např. pro μ Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}$ zkoumejte posloupnosti $f_n = n^{-1}\chi_{(0,n)}$ a $g_n = \chi_{[j2^{-k},(j+1)2^{-k})}$ pro $n = 2^{k-1}+j$, kde $k \in \mathbb{N}$ a $j \in \{0,1,\ldots,2^{k-1}-1\}$.)

Cvičení 5.19: Dokažte, že z konvergence v prostoru $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ vyplývá konvergence μ-s.v., ale ne naopak.
(Hint: Pro ilustraci neplatné implikace uvažujte např. μ Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}$ a posloupnost $f_n = \chi_{(n,n+1)}$.)

Cvičení 5.20: Dokažte, že pokud $1 \le p < q \le \infty$ a $\mu(X) < \infty$, pak je $L^q \subset L^p$.
(Hint: Hölderova nerovnost.)


YOU'VE CHANGED

6 Křivkové a plošné integrály

V této kapitole zavedeme integrály skalárních a vektorových funkcí přes křivky a plochy, které nachází mnoho aplikací zejména ve fyzice. Matematicky půjde o velmi lehký úvod do tzv. analýzy na varietách, ačkoliv se zde neobjeví ani základní koncepty této teorie jako je diferencovatelná varieta, diferenciální formy na varietách, integrální počet diferenciálních forem, atd. Integrální věty jako věta Greenova, Gaussova a Stokesova představují speciální případ hlubokého výsledku analýzy na varietách známého jako *Obecná Stokesova věta* nebo *Divergenční věta*. Seriozní kurz analýzy na varietách tato kapitola nemůže nahradit. V době psaní tohoto textu existuje na FJFI samostatný předmět věnovaný analýze na varietách, kde se student se zájmem o hlubší studium může dozvědět více.

Také styl výkladu poslední kapitoly bude trochu odlišný. Zatímco záměr předchozích kapitol bylo podat zcela rigorózní výklad obecné teorie, zde je naší prioritou dobrat se co nejrychleji a relativně přímočaře k výsledkům podstatným pro aplikace, a to i za cenu menší obecnosti či zjednodušení.

6.1 Křivka a její délka

Připomeňme, že *křivkou* v $\mathbb{R}^n$ rozumíme jakékoliv spojité zobrazení $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Často se ale také křivkou rozumí obor hodnot zobrazení ϕ, tedy *stopa křivky* $[\phi] := \phi([a, b])$ a zobrazení ϕ se nazývá parametrizací křivky. My se budeme držet zde zavedených definic. Samozřejmě existuje více různých křivek se stejnou stopou (více parametrizací jedné křivky). Z hlediska studia geometrických vlastností by se mohlo zdát přirozené nazývat křivkou množinu $[\phi]$, avšak vlastnosti, které budeme studovat, budou skutečně záviset na zobrazení ϕ a nikoliv jen na jeho oboru hodnot.

Uvažme např. křivky

a) $\phi_1(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), \quad t \in [0, 1]$,

b) $\phi_2(t) = (\cos(2\pi t), -\sin(2\pi t)), \quad t \in [0, 1]$,

c) $\phi_3(t) = (\cos(2\pi t^5), \sin(2\pi t^5)), \quad t \in [0, 1]$,

d) $\phi_4(t) = (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t)), \quad t \in [0, 1]$.

Stopa všech křivek ϕ_i je kružnice $[\phi_i] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $\forall i \in \hat{4}$. V případě ϕ_1, pokud parametr t prochází interval $[0, 2\pi]$ rovnoměrně od 0 do 2π, projde bod $\phi_1(t)$ rovnoměrně celou kružnici od bodu $(1, 0)$ do téhož bodu jednou proti směru hodinových ručiček (v tzv. *kladném směru*). V případě ϕ_2 se děje totéž jen v opačném (tzv. *záporném*) směru. V případě ϕ_3 projde bod $\phi_3(t)$ jednou kružnici „zrychleně“ a v případě ϕ_4 ji projde dvakrát dokola. Ačkoliv je obvod kružnice vždy 2π, budou délky uvedených křivek $\ell(\phi_1) = \ell(\phi_2) = \ell(\phi_3) = 2\pi$ a $\ell(\phi_4) = 4\pi$ podle definice, kterou si vzápětí uvedeme. Tomu lze intuitivně dobře rozumět, pokud $\phi(t)$ chápeme jako částici pohybující se v $\mathbb{R}^2$ v čase $t \in [0, 1]$ a délku křivky jako délku trajektorie, kterou částice projde.

Je zřejmé, jak definovat délku po částech lineární křivky, tj. křivky, jejíž stopa je konečné sjednocení úseček (stručněji lomená čára). Délka obecné křivky se poté zavede jako vhodná „limita“ délek lomených čar, kterými proložíme stopu dané křivky.

Definice 6.1 (Rektifikovatelná křivka, délka křivky)**:** Buď $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ křivka a $\sigma : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ dělení intervalu $[a, b]$. Součet délek úseček spojujících body $\phi(t_i)$ označíme

$$\ell_\sigma(\phi) := \sum_{i=1}^{m} \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\| .$$

Potom je-li množina

$$\{\ell_\sigma(\phi) \mid \sigma \text{ dělení } [a, b]\}$$

omezená, nazýváme ϕ *rektifikovatelná křivka* a *délku* $\ell(\phi)$ křivky ϕ definujeme vztahem

$$\ell(\phi) := \sup\{\ell_\sigma(\phi) \mid \sigma \text{ dělení } [a, b]\}. \tag{74}$$

Poznámka: Aplikací trojúhelníkové nerovnosti dostaneme, že $\ell_\sigma(\phi) \leq \ell_{\sigma'}(\phi)$ pro libovolné σ' zjemnění dělení σ, a tudíž supremum v definici (74) je tou „správnou limitou“ pro definici délky křivky.

Rovnosti délek křivek ϕ_1, ϕ_2 a ϕ_3 z úvodu vyjadřují přirozenou vlastnost, totiž že délka křivky nezávisí na tzv. *reparametrizaci* křivky dané spojitou bijekcí (homeomorfismem) mezi uzavřenými intervaly, jak ukazuje první tvrzení následující věty.

Věta 6.2: Nechť $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je rektifikovatelná křivka.

1. Je-li $\xi : [c, d] \to [a, b]$ spojitá bijekce, pak $\psi := \phi \circ \xi$ je rektifikovatelná křivka a platí:

$$\ell(\psi) = \ell(\phi).$$

2. Délka křivky ϕ je aditivní v následujícím smyslu: Je-li $c \in (a, b)$, potom jsou zúžení $\phi_{[a,c]} := \phi \restriction [a, c]$ a $\phi_{[c,b]} := \phi \restriction [c, b]$ rektifikovatelné křivky a platí:

$$\ell(\phi) = \ell(\phi_{[a,c]}) + \ell(\phi_{[c,b]}).$$

Důkaz. 1. Nechť $\xi : [c, d] \to [a, b]$ je spojitá bijekce. Potom je ξ buď rostoucí, nebo klesající funkce. Je-li $\tau : c = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = d$ dělení $[c, d]$, potom

$$\xi \circ \tau : \begin{cases} a = \xi(s_0) < \xi(s_1) < \cdots < \xi(s_m) = b, & \text{je-li } \xi \text{ rostoucí,} \\ a = \xi(s_m) < \xi(s_{m-1}) < \cdots < \xi(s_0) = b, & \text{je-li } \xi \text{ klesající,} \end{cases}$$

je dělení $[a, b]$ a platí $\ell_\tau(\phi \circ \xi) = \ell_{\xi\circ\tau}(\phi)$. Jelikož je ϕ rektifikovatelná, je

$$\ell_\tau(\psi) = \ell_{\xi\circ\tau}(\phi) \leq \ell(\phi),$$

a tudíž ψ je také rektifikovatelná, neboť τ bylo libovolné dělení $[c, d]$. Navíc vezmeme-li supremum přes τ, dostaneme nerovnost $\ell(\psi) \leq \ell(\phi)$. Podobně z rovnosti $\ell_\sigma(\phi) = \ell_{\xi^{-1}\circ\sigma}(\psi)$, která platí pro každé σ dělení $[a, b]$, odvodíme opačnou nerovnost $\ell(\phi) \leq \ell(\psi)$.

2. Tvrzení o rektifikovatelnosti křivek $\phi_{[a,c]}$ a $\phi_{[c,b]}$ vyplývá z toho, že každé dělení intervalů $[a, c]$ resp. $[c, b]$ lze zjemnit na dělení intervalu $[a, b]$ přidáním bodu b resp. a, a proto $\ell(\phi_{[a,c]}) \leq \ell(\phi)$ a $\ell(\phi_{[c,b]}) \leq \ell(\phi)$.

Z rovnosti
$$\ell_{\sigma\cap[a,c]}(\phi_{[a,c]}) + \ell_{\sigma\cap[c,b]}(\phi_{[c,b]}) = \ell_\sigma(\phi),$$
která platí pro každé σ dělení $[a, b]$ obsahující c, dostaneme nerovnost
$$\ell(\phi_{[a,c]}) + \ell(\phi_{[c,b]}) \geq \sup\{\ell_\sigma(\phi) \mid \sigma \text{ dělení } [a, b] \text{ obsahující } c\} = \ell(\phi).$$
Poslední rovnost platí, neboť $\ell_\sigma(\phi) \leq \ell_{\sigma\cup\{c\}}(\phi)$ pro každé dělení σ intervalu $[a, b]$. Naopak zvolíme-li $\epsilon > 0$, potom
$$(\exists\sigma_1 \text{ dělení } [a, c]) \left(\ell(\phi_{[a,c]}) \leq \ell_{\sigma_1}(\phi_{[a,c]}) + \frac{\epsilon}{2}\right)$$
a podobně
$$(\exists\sigma_2 \text{ dělení } [c, b]) \left(\ell(\phi_{[c,b]}) \leq \ell_{\sigma_2}(\phi_{[c,b]}) + \frac{\epsilon}{2}\right).$$
Odtud
$$\ell(\phi_{[a,c]}) + \ell(\phi_{[c,b]}) \leq \ell_{\sigma_1}(\phi_{[a,c]}) + \ell_{\sigma_2}(\phi_{[c,d]}) + \epsilon = \ell_{\sigma_1\cup\sigma_2}(\phi) + \epsilon \leq \ell(\phi) + \epsilon.$$
Jelikož bylo $\epsilon > 0$ voleno libovolně, dostáváme i opačnou nerovnost
$$\ell(\phi_{[a,c]}) + \ell(\phi_{[c,b]}) \leq \ell(\phi).$$
□

Definice délky křivky (74) pomocí suprema přes dělení není vhodná pro praktické výpočty. Je-li daná křivka navíc třídy C^1 alespoň po částech, máme užitečný integrální vzorec pro délku křivky. Připomeňme, že $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je po částech C^1 na (a, b), právě když existuje dělení $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b$ tak, že $f \in C^1((t_{i-1}, t_i))$ pro každé $i \in \hat{m}$ a existují jednostranné limity $\phi'(t_i\pm)$ pro $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, $\phi'(a+)$ a $\phi'(b-)$ v $\mathbb{R}^n$. Zde i dále používáme běžné značení $\phi'(t) := D\phi(t) = (\phi_1'(t), \ldots, \phi_n'(t))$.

Věta 6.3: Nechť křivka $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je po částech C^1 na (a, b). Potom je ϕ rektifikovatelná a platí:
$$\ell(\phi) = \int_a^b \|\phi'(t)\| \mathrm{d}t.$$

Důkaz. Díky aditivitě integrálu i délky křivky ve smyslu 2. tvrzení Věty 6.2 stačí tvrzení dokázat pro křivku $\phi \in C^1((a, b))$ s jednostrannými limitami $\phi'(a+), \phi'(b-) \in \mathbb{R}^n$

Uvažujme libovolné dělení $\sigma : a = t_0 < t_1 < \ldots t_m = b$. Potom s využitím nerovnosti z Lemma 3.27 dostaneme
$$\ell_\sigma(\phi) = \sum_{i=1}^m \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^m \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi'(t)\mathrm{d}t \right\| \leq \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\phi'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_a^b \|\phi'(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

Poslední integrál je konečný, neboť integrand je spojitá funkce na $[a,b]$, a tudíž je ϕ rektifikovatelná a platí nerovnost

$$\ell(\phi) \leq \int_a^b \|\phi'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Dále budeme používat značení $\phi_{[c,d]}$ pro zúžení křivky ϕ na interval $[c,d] \subset [a,b]$ (stejně jako ve Větě 6.2). Definujme funkci $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ vztahem

$$g(t) := \begin{cases} \ell(\phi_{[a,t]}), & \text{pro } t \in (a,b], \\ 0, & \text{pro } t = a. \end{cases}$$

Nechť $t \in (a,b)$ a $h > 0$ tak, že $t + h \in (a,b)$. Z aditivity délky křivky, viz Věta 6.2, a z analogického odhadu, jaký jsme provedli výše, dostaneme

$$g(t+h) - g(t) = \ell(\phi_{[t,t+h]}) \leq \int_t^{t+h} \|\phi'(s)\| \mathrm{d}s \leq h \max_{s \in [t,t+h]} \|\phi'(s)\|.$$

Uvážíme-li také, že když v definici délky křivky vezmeme dvoubodové dělení $\{t, t+h\}$ intervalu $[t, t+h]$, máme

$$\|\phi(t+h) - \phi(t)\| \leq \ell(\phi_{[t,t+h]}).$$

Spojením obou odhadů získáme nerovnosti

$$\frac{\|\phi(t+h) - \phi(t)\|}{h} \leq \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \leq \max_{s \in [t,t+h]} \|\phi'(s)\|.$$

Ze spojitosti funkce $t \to \|\phi'(t)\|$ na $[a,b]$ plyne, že $\max_{s \in [t,t+h]} \|\phi'(s)\| \to \|\phi'(t)\|$, pokud $h \to 0+$. Také výraz nalevo v poslední nerovnosti konverguje k $\|\phi'(t)\|$, pokud $h \to 0+$, jak plyne z diferencovatelnosti ϕ v bodě t. Odtud vidíme, že

$$\lim_{h \to 0+} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \|\phi'(t)\|.$$

Analogicky se ukáže, vezmeme-li na začátku $h < 0$, že také

$$\lim_{h \to 0-} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \|\phi'(t)\|.$$

Celkem zjišťujeme, že g je diferencovatelná funkce v bodě $t \in (a,b)$ a platí $g'(t) = \|\phi'(t)\|$.

Nyní již jednoduše odvodíme dokazovaný vzorec, neboť

$$\ell(\phi) = g(b) = g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t) \mathrm{d}t = \int_a^b \|\phi'(t)\| \mathrm{d}t.$$

□

Poznámka: Speciálně graf funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, která je po částech C^1 na $[a, b]$, je stopou křivky $\phi(t) := (t, f(t))$, $t \in [a, b]$, v $\mathbb{R}^2$ vyhovující předpokladům Věty 6.3, a proto

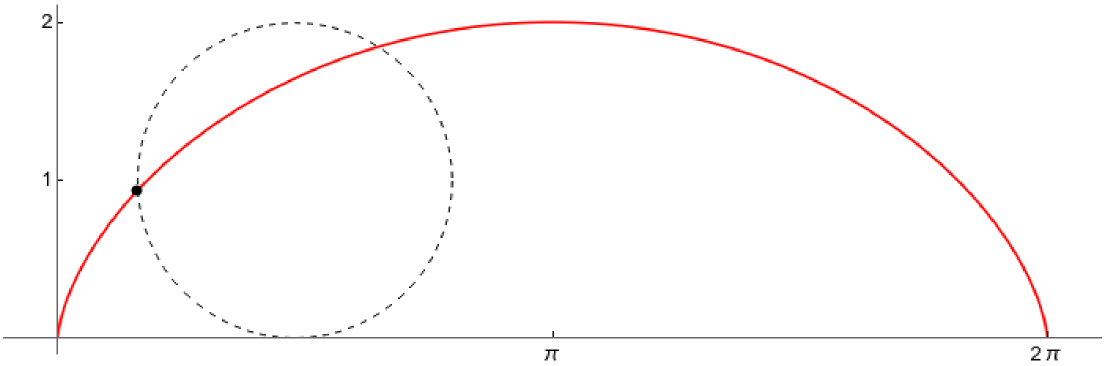
$$\ell(\phi) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

Příklad 6.4 (Délka cykloidy)**:** Křivka v $\mathbb{R}^2$ zadaná parametricky rovnicemi

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t), \quad \text{pro } t \in [0, 2\pi],$$

kde $a > 0$, je oblouk *cykloidy*, viz Obrázek 16. Tuto křivku opíše bod na hranici kruhu o poloměru a, který se valí po ose x. Spočítáme její délku. Na tuto křivku $\phi(t) := ((x(t), y(t))$ lze aplikovat Větu 6.3, a proto je

$$\ell(\phi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, \mathrm{d}t = a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, \mathrm{d}t$$
$$= \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, \mathrm{d}t = 2a \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t = 8a.$$



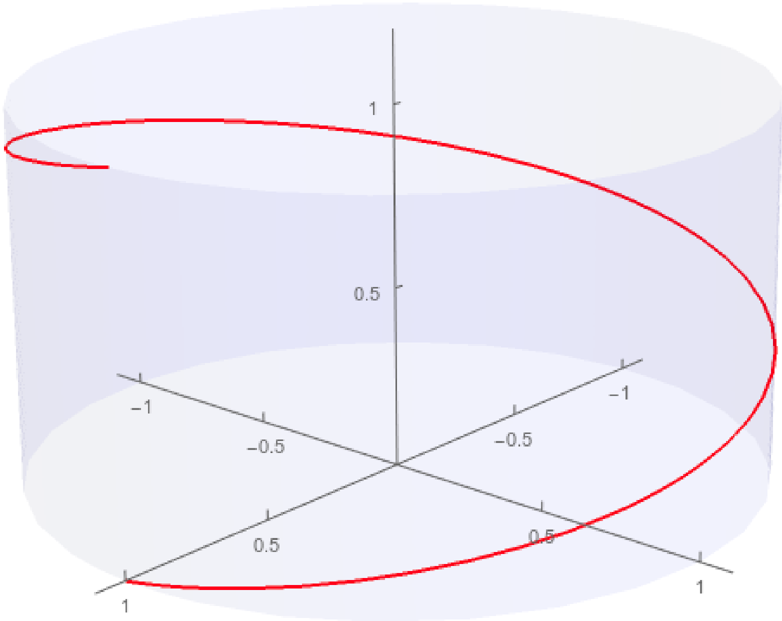
Obrázek 16: Cykloida pro $a = 1$.

Příklad 6.5 (Délka šroubovice)**:** Křivka v $\mathbb{R}^3$ zadaná parametricky rovnicemi

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = a \sin t, \quad z(t) = bt \quad \text{pro } t \in [0, 2\pi],$$

kde $a, b > 0$, je oblouk *šroubovice* (*helix*), viz Obrázek 17. Pro délku této křivky $\phi(t) := ((x(t), y(t), z(t))$ dostaneme podle Věty 6.3 vztah

$$\ell(\phi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\, \mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$



Obrázek 17: Šroubovice pro $a = 1$ a $b = 1/6$.

Příklad 6.6 (Délka Vivianiho křivky)**:** Vivianiho křivka vznikne průnikem sféry a válce v $\mathbb{R}^3$ daných rovnicemi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, \quad (x - a)^2 + y^2 = a^2,$$

kde $a > 0$ je parametr, viz Obrázek 18. Pro nalezení vhodné parametrizace této křivky nejprve zvolíme polární souřadnice v x a y se středem v bodě $(a, 0)$, která „sedí" rovnici pro válec, tj.

$$x = a + a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Parametrizaci souřadnice $z = z(t)$ poté dopočítáme z rovnice pro kouli:

$$z^2 = 4a^2 - x^2 - y^2 = 2a^2 - 2a^2\cos t = 4a^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right).$$

Tedy

$$z = \pm 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Znaménko $+$ resp. $-$ odpovídá parametrizaci části křivky v polorovině $z \geq 0$ resp. $z \leq 0$. Tyto dvě části jsou symetrické podle roviny $z = 0$. Není těžké si rozmyslet, že i ta část křivky nacházející se např. v polorovině $z \geq 0$ se skládá ze dvou symetrických částí stejné délky. Proto stačí počítat délku jedné čtvrtiny Vivianiho křivky z kladného oktantu $\mathbb{R}^3_+$. Tato křivka $\phi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ je tedy parametricky určena rovnicemi:

$$x(t) = a(1 + \cos t), \quad y(t) = a\sin t, \quad z(t) = 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right),$$

kde $t \in [0, \pi]$.

Pro délku křivky ϕ (a tedy 1/4 délky Vivianiho křivky) dostaneme podle Věty 6.3 vzorec

$$\ell(\phi) = a \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} \mathrm{d}t = a \int_0^\pi \sqrt{1 + 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} \mathrm{d}t.$$

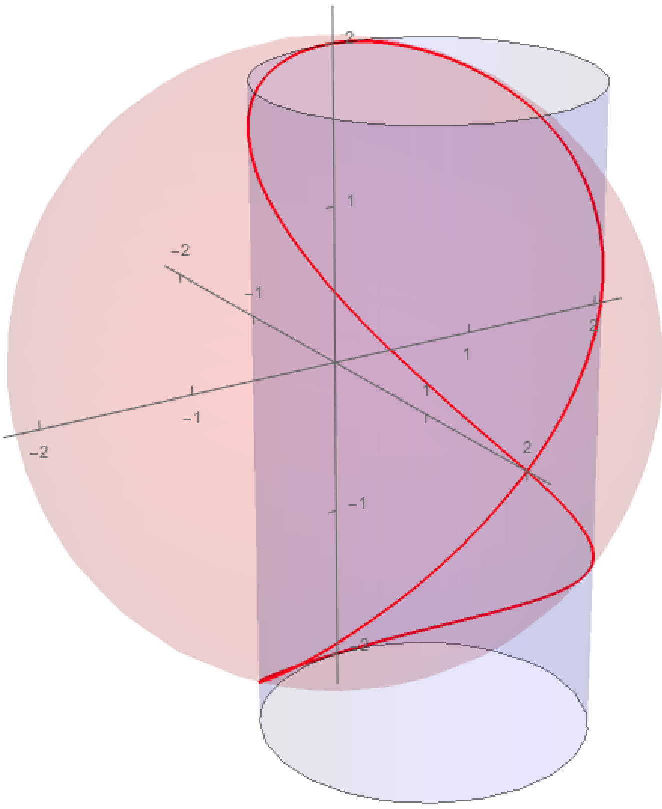
Poslední integrál bohužel nelze spočítat explicitně. Drobnou úpravou jej můžeme jen vyjádřit jakou specifickou hodnotu tzv. *uplného eliptického integrálu druhého druhu*, což je speciální funkce definovaná integrálem

$$E(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \, \mathrm{d}x, \quad k \in [0, 1]. \tag{75}$$

Dostaneme tak vzorec pro délku ϕ ve tvaru

$$\ell(\phi) = 2a\sqrt{2}\, E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Numericky přibližná hodnota je $E(1/\sqrt{2}) \approx 1.35064$.



Obrázek 18: Vivianiho křivka pro $a = 1$.

Vzorec pro výpočet délky křivky z Věty 6.3 je užitečný, ale lze ho aplikovat jen na křivky, které jsou po částech C^1. Nesplňuje-li křivka tento předpoklad, nezbývá než použít obecnou definici délky křivky, neboť ta diferencovatelnost křivky nevyžaduje. Upozorněme také, že vzorec z Věty 6.3 nemusí být délka křivky ani v případě, že má integrál ve vzorci dobrý smysl. Uvažujme např. křivku ϕ danou grafem Cantorovy funkce, tzn. $\phi(x) = (x, f(x))$, $x \in [0,1]$, kde f je Cantorova funkce, viz Příklad 4.52. Funkce f je spojitá a navíc $f'(x) = 0$ pro s.v. $x \in [0,1]$, neboť f je konstantní na „prostředních" intervalech z množin C_n, viz Příklad 4.51. Potom

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\mathrm{d}x = 1,$$

ale délka Cantorovy funkce **není** 1. Křivka, která by spojovala body $(0,0)$ a $(1,1)$ a měla délku 1, ani neexistuje (proč?). Skutečnou délku Cantorovy funkce spočítáme v následujícím příkladě.

Příklad 6.7 (Délka Cantorovy funkce)**:** Spočítáme délku křivky $\phi(x) = (x, f(x))$, $x \in [0,1]$, kde f je Cantorova funkce. Nejprve ukážeme, že délka ϕ je nejvýše 2. Uvažujme libovolné dělení $\sigma : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ intervalu $[0,1]$. Potom

$$\ell_\sigma(\phi) = \sum_{i=1}^{n} \|(x_i, f(x_i)) - (x_{i-1}, f(x_{i-1}))\|$$

je délka lomené čáry spojující postupně body $(0,0) = (x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n)) = (1,1)$. Protože je f **neklesající**, je také lomená čára určená dělením σ neklesající. Nyní si stačí rozmyslet, že žádná neklesající lomená čára spojující body $(0,0)$ a $(1,1)$ nemůže mít délku větší než 2 (extrémní případ je čára spojující po řadě body $(0,0), (0,1), (1,1)$, příp. $(0,0), (1,0), (1,1)$). Proto $\ell_\sigma(\phi) \leq 2$ pro každé dělení σ intervalu $[0,1]$. Odtud plyne, že ϕ je rektifikovatelná a její délka splňuje

$$\ell(\phi) = \sup_\sigma \ell_\sigma(\phi) \leq 2.$$

Dále dokážeme také opačnou nerovnost $\ell(\phi) \geq 2$. Označme si $\ell_1(\phi) := \ell(\phi_{[0,1/3]})$ délku Cantorovy funkce zúžené na interval $[0,1/3]$. Zřejmě $\ell_1(\phi)$ nemůže být delší než úsečka spojující body $(0,0)$ a $(2^{-1}, 3^{-1})$, neboli

$$\ell_1(\phi) \geq \sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}}.$$

Uvědomíme-li si také, že graf Cantorovy funkce v intervalu $[2/3,1]$ je jen posunutý graf Cantorovy funkce v intervalu $[0,1/3]$, tedy stejné délky, dostaneme vztah

$$\ell(\phi) = 2\ell_1(\phi) + \frac{1}{3},$$

kde $1/3$ představuje délku Cantorovy funkce v intervalu $(1/3, 2/3)$, na němž je konstantní.

Postupujme analogicky zúžením analýzy do intervalu $[0,1/3]$. Pro $\ell_2(\phi) := \ell(\phi_{[0,1/9]})$ dostaneme

$$\ell_2(\phi) \geq \sqrt{\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4}} \quad \text{a} \quad \ell_1(\phi) = 2\ell_2(\phi) + \frac{1}{9}.$$

Obecně pro $n \in \mathbb{N}$ a $\ell_n(\phi) := \ell(\phi_{[0,3^{-n}]})$ máme

$$\ell_n(\phi) \geq \sqrt{\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}}} \quad \text{a} \quad \ell_{n-1}(\phi) = 2\ell_n(\phi) + \frac{1}{3^n}.$$

Odtud snadno indukcí odvodíme, že

$$\ell(\phi) = 2^n \ell_n(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \frac{2^{j-1}}{3^j} \geq \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}} + \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^j$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nakonec pošleme-li $n \to \infty$, dostaneme nerovnost

$$\ell(\phi) \geq 1 + \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j = 2.$$

Uzavíráme tedy, že $\ell(\phi) = 2$.

6.2 Křivkový integrál 1. a 2. druhu

V této části zavedeme tzv. křivkový integrál dané skalární funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nebo vektorové funkce $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Vzhledem k fyzikálním aplikacím se zde často místo funkcí mluví o daném *skalárním* resp. *vektorovém poli*, neboť f přiřazuje bodu $x = (x_1, \ldots x_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$ skalár $f(x) \in \mathbb{R}$ a F vektor $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x)) \in \mathbb{R}^n$. Ve fyzice může vektorové pole F představovat např. pole elektrické, magnetické, gravitační, atd. Skalární pole f může být např. jejich potenciál.

Integrál skalárního pole f podél křivky ϕ je tzv. *křivkový integrál 1. druhu.* Funkci $f : [\phi] \to \mathbb{R}^n$ nazýváme *integrabilní* na po částech C^1 křivce $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, pokud $(f \circ \phi)\|\phi'\| \in L([a, b])$.

Definice 6.8 (Křivkový integrál 1. druhu)**:** Nechť $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je po částech C^1 křivka a $f : [\phi] \to \mathbb{R}$ je integrabilní funkce. Integrál

$$\int_\phi f \mathrm{d}s := \int_a^b f(\phi(t))\|\phi'(t)\|\mathrm{d}t$$

nazýváme *křivkový integrál funkce f podél křivky ϕ 1. druhu.*

Poznámka: 1. Všimněte si, že $\ell(\phi) = \int_\phi 1\mathrm{d}s$, viz Věta 6.3.
2. Podobně jako délku křivky bychom mohli definovat i křivkový integrál 1. druhu pro širší třídu křivek pomocí dělení. Nicméně vzhledem k aplikacím a integrálním větám, které chceme v této části dokázat, bude třída po částech C^1 křivek zcela dostačující.

Číslo $\int_\phi f\mathrm{d}s$ představuje celkový příspěvek skalárního pole f podél křivky ϕ. Např. v mechanice, modeluje-li křivka ϕ nějaký drát, jehož rozložení hustoty v prostoru popisuje funkce $\rho : [\phi] \to \mathbb{R}$, bude $m = \int_\phi \rho\,\mathrm{d}s$ hmotnost drátu.

Příklad 6.9: Hmotnost oblouku paraboly $y = 2x^2$, $x \in [-1, 1]$, jejíž hustota v bodě (x, y) je $\rho(x, y) = |x|$, je rovna

$$m = \int_\phi \rho \, \mathrm{d}s,$$

kde $\phi(t) := (t, 2t^2)$ pro $t \in [-1, 1]$. Potom podle definice křivkového integrálu 1. druhu máme

$$m = \int_{-1}^{1} \rho(t, 2t^2) \|\phi'(t)\| \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} |t| \sqrt{1 + 8t^2} \mathrm{d}t = 2 \left[\frac{1}{24} \left(1 + 8t^2\right)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{13}{6}.$$

Křivkový integrál 1. druhu nezávisí na parametrizaci křivky.

Věta 6.10: Nechť $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ po částech C^1 křivka a $\psi = \phi \circ \xi : [c, d] \to \mathbb{R}^n$, kde $\xi : [c, d] \to [a, b]$ je spojitá a difeomorfismus (c, d) na (a, b), potom

$$\int_\phi f \mathrm{d}s = \int_\psi f \mathrm{d}s$$

pro každou integrabilní funkci $f : [\phi] \to \mathbb{R}^n$.

Důkaz. Tvrzení vyplývá z Věty 5.79 o substituci, podle které máme

$$\int_c^d f(\psi(t)) \|\psi'(t)\| \mathrm{d}t = \int_c^d f(\phi \circ \xi(t)) \|\phi'(\xi(t))\| |\xi'(t)| \mathrm{d}t = \int_a^b f(\phi(s)) \|\phi'(s)\| \mathrm{d}s.$$

□

Integraci vektorových polí podél křivky zavádíme tzv. *křivkovým integrálem 2. druhu*. Vektorovou funkci $F = (F_1, \ldots, F_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nazveme *integrabilní* na po částech C^1 křivce $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, pokud $(F_i \circ \phi) \, \phi_i' \in L([a, b])$ pro každé $i \in \hat{n}$.

Definice 6.11 (Křivkový integrál 2. druhu)**:** Nechť $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je po částech C^1 křivka a $F : [\phi] \to \mathbb{R}^n$ je integrabilní vektorová funkce. Integrál

$$\int_\phi F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} := \int_a^b (F(\phi(t)), \phi'(t)) \mathrm{d}t$$

nazýváme *křivkový integrál funkce F podél křivky ϕ 2. druhu.* (Zde $(\cdot, \cdot)$ je euklidovský skalární součin v $\mathbb{R}^n$.)

Poznámka: Pro křivkový integrál 2. druhu se také používá značení

$$\int_\phi F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} =: \int_\phi F_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + F_n \mathrm{d}x_n.$$

Samotnému výrazu $F_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + F_n \mathrm{d}x_n$ lze dát konkrétní význam, je to tzv. diferenciální 1-forma. Integrace obecných diferenciálních forem je předmět studia analýzy na varietách.

Abychom získali alespoň intuitivní porozumění významu křivkového integrálu 2. druhu, ukážeme si nejprve, jak ho lze vyjádřit pomocí křivkového integrálu 1. druhu. Uvažujme pro jednoduchost křivku $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ takovou, že $\phi \in C^1((a,b))$. Nechť ϕ je navíc *regulární*, tzn. $(\forall t \in (a,b))(\phi'(t) \neq 0)$. Potom můžeme tečný vektor $\phi'(t)$ ke křivce ϕ v bodě $t \in (a,b)$ normalizovat a zavést jednotkový tečný vektor

$$T(\phi(t)) := \frac{\phi'(t)}{\|\phi'(t)\|}, \quad t \in (a,b).$$

Potom pro libovolné integrabilní vektorové pole $F : [\phi] \to \mathbb{R}^n$ máme

$$\int_\phi F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_a^b (F(\phi(t)), \phi'(t))\mathrm{d}t = \int_a^b (F(\phi(t)), T(\phi(t)))\|\phi'(t)\|\mathrm{d}t = \int_\phi (F,T)\mathrm{d}s.$$

Výraz (F,T) je až na znaménko velikost projekce pole F do tečného směru T ke křivce ϕ - tzv. *tečná komponenta* pole F podél křivky ϕ. Z tohoto vztahu plyne, že $\int_\phi F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ je celkový příspěvek tečné komponenty pole F podél křivky ϕ. Např. v mechanice může F reprezentovat silové pole a $\int_\phi F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ je potom celková energie, tzv. *práce*, kterou je třeba dodat částici, abychom ji přesunuli po trajektorii určené křivkou ϕ.

Příklad 6.12: Elipsu v $\mathbb{R}^3$, která vznikne průnikem válce a roviny dané rovnicemi

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{a} \quad z = 2y + 1,$$

můžeme parametrizovat tak, že $\phi(t) := (\cos t, \sin t, 2\sin t + 1)$, kde $t \in [0, 2\pi]$. Spočítáme $\int_\phi F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ pro $F(x,y,z) = (y,z,x)$. Tedy

$$\begin{aligned}\int_\phi F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} &= \int_0^{2\pi} ((\sin t, 2\sin t + 1, \cos t), (-\sin t, \cos t, 2\cos t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + 2\sin t\cos t + \cos t + 2\cos^2 t)\mathrm{d}t = \pi.\end{aligned}$$

Křivkový integrál 2. druhu závisí na parametrizaci křivky, ale jen co do znaménka.

Věta 6.13: Nechť $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ po částech C^1 křivka a $\psi = \phi \circ \xi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$, kde $\xi : [c,d] \to [a,b]$ je spojitá a difeomorfismus (c,d) na (a,b), potom pro každé integrabilní $F : [\phi] \to \mathbb{R}^n$ platí:

$$\int_\psi F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \begin{cases} \int_\phi F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, & \text{je-li } \xi \text{ rostoucí,} \\ -\int_\phi F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, & \text{je-li } \xi \text{ klesající.} \end{cases}$$

Důkaz. Z předpokladu plyne, že pro všechna $t \in (c,d)$ je buď $\xi'(t) > 0$, nebo $\xi'(t) < 0$, nebo-li ξ je buď rostoucí, nebo klesající na $[c,d]$. Označme

$$\omega := \begin{cases} 1, & \text{je-li } \xi \text{ rostoucí,} \\ -1, & \text{je-li } \xi \text{ klesající.} \end{cases}$$

Potom aplikací Věty 5.79 o substituci dostaneme

$$\int_\psi F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_c^d (F(\psi(t)), \psi'(t))\,\mathrm{d}t = \int_c^d (F(\phi \circ \xi(t)), \phi'(t))\,\xi'(t)\mathrm{d}t$$
$$= \omega \int_c^d (F(\phi \circ \xi(t)), \phi'(t))\,|\xi'(t)|\mathrm{d}t = \omega \int_a^b (F(\phi(t)), \phi'(t))\,\mathrm{d}t = \omega \int_\phi F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

pro libovolné integrabilní $F : [\phi] \to \mathbb{R}^n$, což je tvrzení věty. □

Poznámka: Křivky ϕ a $\psi = \phi \circ \xi$ jsou tzv. *stejně orientované* v případě, že ξ je rostoucí a *opačně orientované* v případě, že ξ je klesající. Křivkový integrál 2. druhu tedy nemění svou hodnotu při reparametrizaci křivky zachovávající orientaci a mění pouze své znaménko při reparametrizaci obracející orientaci.

6.3 Greenova věta

Greenova věta je první z řady užitečných integrálních vět, které dávají do rovnosti integrál „z něčeho" přes hranici jisté množiny a integrál „z něčeho jiného" přes samotnou množinu. Všechny tyto integrální věty představují speciální případy obecné Stokesovy věty z analýzy na varietách (za jistých dodatečných předpokladů hladkosti) .

Úplně nejjednodušší situaci, kdy na jedné straně rovnosti integrujeme přes množinu a na druhé přes její hranici, představuje fundamentální věta integrálního počtu:

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

pro f po částech C^1 na (a, b). Nalevo integrujeme funkci přes interval $[a, b]$ a také pravou stranu lze interpretovat jako jistý integrál přes hranici $\partial[a, b] = \{a, b\}$. Znaménko mínus u $f(a)$ souvisí s tzv. orientací - zde pozitivní volbou průchodu intervalu $[a, b]$ od a do b.

Abychom mohli vyslovit Greenovu větu, budeme potřebovat definovat několik pojmů.

Definice 6.14 (Jednoduchá, uzavřená, Jordanova křivka)**:**

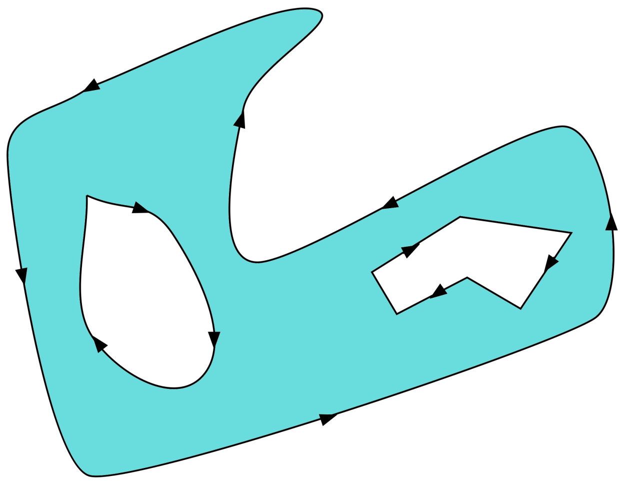
1. Křivka $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ se nazývá *jednoduchá*, právě když je ϕ prosté.
2. Křivka $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ se nazývá *uzavřená*, právě když $\phi(a) = \phi(b)$.
3. Křivka $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ se nazývá *Jordanova*, právě když ϕ je prosté na $[a, b)$ a $\phi(a) = \phi(b)$.

Stopa jednoduché křivky neprotíná sama sebe. Stopa uzavřené křivky má stejný počáteční bod $\phi(a)$ a koncový bod $\phi(b)$. Stopa Jordanovy křivky je uzavřená a neprotíná sama sebe vyjma bodů $\phi(a)$ a $\phi(b)$.

Je-li $n = 2$, řekneme, že kompaktní množina $S \subset \mathbb{R}^2$ má *po částech C^1 hranici*, pokud existuje $m \in \mathbb{N}$ a po částech C^1 Jordanovy křivky $\phi_1, \ldots, \phi_m$, jejichž stopy jsou po dvou disjunktní a platí:

$$\partial S = \bigcup_{j=1}^m [\phi_j].$$

Tedy hranice S nemusí být souvislá (S může mít „díry“). Dále hranici ∂S nazveme *kladně orientovanou*, pokud každá z křivek $\phi_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}^2$ má tu vlastnost, že prochází-li parametr t interval $[a_j, b_j]$ od bodu a_j k bodu b_j, je množina S vždy **vlevo** od bodu $\phi_j(t)$. Přesněji předpokládáme, že v každém bodě $t \in [a_j, b_j]$, kde je ϕ_j diferencovatelná, je $\phi_j'(t) \neq 0$ a jednotkový normálový vektor $n := (-T_2, T_1)$ v bodě $\phi_j(t)$, kde $T = (T_1, T_2) = \phi_j'(t)/\|\phi_j'(t)\|$ je jednotkový tečný vektor v bodě $\phi_j(t)$, **míří do množiny** S, tzn. $\phi_j(t) + \epsilon n \in S$ pro všechna $\epsilon > 0$ dostatečně malá, viz Obrázek 19.



Obrázek 19: Kompaktní množina s po částech C^1 kladně orientovanou hranicí.

Nyní můžeme zformulovat *Greenovu větu*, v níž použijeme značení

$$\int_{\partial S} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} := \sum_{j=1}^{m} \int_{\phi_j} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

kde množina S a křivky $\phi_1, \ldots, \phi_m$ mají výše popsaný význam. Navíc budeme psát $\mathrm{d}m^2(x, y) = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ pro Lebesgueovu míru v $\mathbb{R}^2$, jak je zde obvyklé.

Věta 6.15 (Green)**:** Nechť $S \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktní množina s po částech C^1 kladně orientovanou hranicí. Předpokládejme dále, že $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, $S \subset \Omega$ a $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je třídy C^1 na Ω. Potom platí:

$$\int_{\partial S} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Důkaz. 1) Nejprve budeme uvažovat velmi omezenou třídu tzv. *jednoduchých množin* S, pro které bude snadné ověřit tvrzení Greenovy věty. Množina S se nazývá *jednoduchá*, právě když

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b],\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d],\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}, \end{aligned}$$

kde ϕ_1, ϕ_2 resp. ψ_1, ψ_2 jsou po částech C^1 funkce na $[a, b]$ resp. $[c, d]$. Tedy jednoduchá množina S je ohraničená grafy dvou po částech C^1 funkcí jak od x, tak od y.

Předpokládejme tedy, že S je jednoduchá množina s pozitivně orientovanou hranicí. Potom podle prvního vyjádření S je hranice ∂S sjednocením stopy křivky dané rovnicí $y = \phi_1(x)$ orientované zleva doprava, stopy křivky dané rovnicí $y = \phi_2(x)$ orientované zprava doleva a dvou vertikálních úseček s $x = a$ a $x = b$, které mohou degenerovat v jeden bod. Ukážeme, že pro vektorové pole F s nulovou druhou komponentou, tj. $F = (F_1, 0)$, platí vzorec z Greenovy věty. Levá strana vzorce je rovna

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} (F_1, 0) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} &= \int_a^b (F_1(x, \phi_1(x)), 0)(1, \phi_1'(x))^T \mathrm{d}x + \int_{\phi_1(b)}^{\phi_2(b)} (F_1(b, y), 0)(0, 1)^T \mathrm{d}y \\ &\quad + \int_b^a (F_1(x, \phi_2(x)), 0)(1, \phi_2'(x))^T \mathrm{d}x + \int_{\phi_2(a)}^{\phi_1(a)} (F_1(a, y), 0)(0, 1)^T \mathrm{d}y \\ &= \int_a^b (F_1(x, \phi_1(x)) - F_1(x, \phi_2(x)))\, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tento výraz dostaneme i na pravé straně, protože

$$-\int_S \frac{\partial F_1}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b (F_1(x, \phi_1(x)) - F_1(x, \phi_2(x)))\, \mathrm{d}x.$$

Tedy

$$\int_{\partial S} (F_1, 0) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_S \frac{\partial F_1}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Zcela analogicky ověříme, vyjádříme-li hranici ∂S druhým způsobem pomocí ψ_1 a ψ_2, že pro vektorová pole tvaru $F = (0, F_2)$ platí:

$$\int_{\partial S} (0, F_2) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S \frac{\partial F_2}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Nyní stačí oba výsledky zkombinovat a dostaneme pro obecné C^1 vektorové pole $F = (F_1, F_2)$, že

$$\int_{\partial S} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\partial S} (F_1, 0) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_{\partial S} (0, F_2) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

což jsme chtěli dokázat.

2) Když už víme, že Greenova věta platí pro jednoduché množiny, můžeme její platnost snadno rozšířit na mnohem obecnější třídu množin S, které lze rozložit na konečné sjednocení množin $S_1, \ldots, S_m$ takových, že platí:

i. Množiny $S_1, \ldots, S_m$ mají po dvou disjunktní vnitřky.

ii. Pro každé $i \in \hat{m}$ je S_i jednoduchá množina s kladně orientovanou po částech C^1 hranicí.

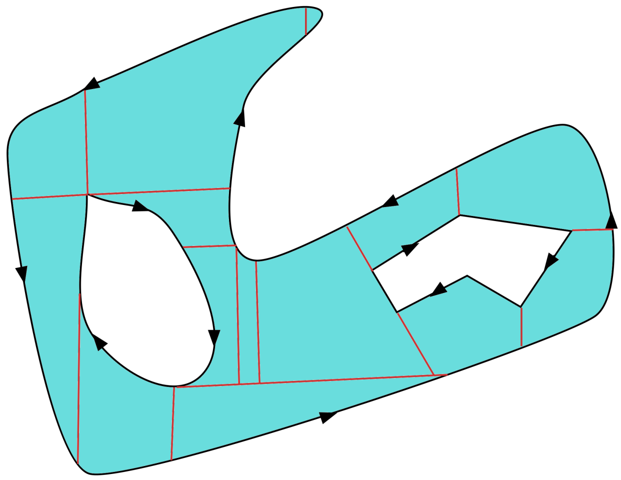
Viz Obrázek 20. Jelikož společné hranice množin $S_1, \ldots, S_m$ je množina Lebesgueovy míry nula, máme

$$\int_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^m \int_{S_i} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Také ale platí rovnost

$$\int_{\partial S} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum_{i=1}^{m} \int_{\partial S_i} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s},$$

protože všechny křivkové integrály přes ty části hranic množin S_i, které nejsou části hranice S, se vynulují. Všimněte si, že je-li C společná hranice množin S_i a S_j, $i \neq j$, potom je stopou dvou křivek, které jsou opačně orientované. Tudíž ty části integrálů $\int_{\partial S_i}$ a $\int_{\partial S_j}$ přes společnou hranici C se odečtou, viz poznámku za Větou 6.13. Nyní již stačí aplikovat Greenovu větu na jednotlivé integrály přes jednoduché množiny $S_1, \dots, S_m$.



Obrázek 20: Příklad rozkladu množiny z Obrázku 19 na jednoduché množiny.

3) Třída množin S, pro které jsme Greenovu větu dokázali, je dostačující pro mnoho aplikací. Nicméně ne každou kompaktní množinu s po částech C^1 hranicí lze zapsat jako sjednocení konečného počtu jednoduchých množin. Kompletní důkaz obecné Greenovy věty zde neuvedeme, protože vyžaduje jistou dodatečnou technickou mašinerii, tzv. rozklad jedničky. Zaujatý čtenář najde více detailů v dodatcích. $\square$

Poznámka: Je zajímavé a někdy i užitečné, že plochu množiny $S \subset \mathbb{R}^2$ lze počítat pomocí křivkového integrálu 2. druhu podél hranice S. Je to možné udělat dokonce více různými způsoby, např.

$$m(S) = \int_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial S} (x, 0) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_{\partial S} (0, y) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{1}{2} \int_{\partial S} (-y, x) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s},$$

jak vyplývá z Greenovy věty.

Příklad 6.16: Bylo by obtížné počítat přímo křivkový integrál 2. druhu vektorového pole

$$F(x, y) = \left(\sqrt{1 + x^2} - ye^{xy} + 3y, x^2 - xe^{xy} + \ln(1 + y^8)\right)$$

přes kladně orientovanou kružnici ϕ určenou hranicí kruhu $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Aplikací Greenovy věty ale dostaneme výsledek téměř okamžitě, neboť

$$\begin{aligned}\int_\phi F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} &= \int_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[x^2 - xe^{xy} + \ln(1+y^8) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\sqrt{1+x^2} - ye^{xy} + 3y \right] \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_D (2x-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -3m(D) = -3\pi,\end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že integrál $\int_D 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$ ze symetrie.

Příklad 6.17 (Plocha Descartova listu)**:** Spočítáme plochu *Descartova listu*, což je omezená množina S v $\mathbb{R}^2_+$ s hranicí určenou rovnicí $x^3 + y^3 = 3axy$, kde $a > 0$, viz Obrázek 21. Parametrizujeme-li hranici S pomocí polárních souřadnic $\phi(\theta) := (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$, zjistíme, že

$$r(\theta) = \frac{3a \sin\theta \cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Potom podle Greenovy věty můžeme plochu S počítat následovně:

$$\begin{aligned}m(S) &= \frac{1}{2}\int_\phi (-y,x) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (-r(\theta)\sin\theta, r(\theta)\cos\theta) \begin{pmatrix} r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta \\ r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta \end{pmatrix} \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{3a \operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}^3\theta} \right)^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} = \frac{9}{2}a^2 \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{2}a^2 \left[-\frac{1}{1+t^3} \right]_0^\infty = \frac{3}{2}a^2,\end{aligned}$$

kde jsme provedli substituci $t = \operatorname{tg}\theta$.

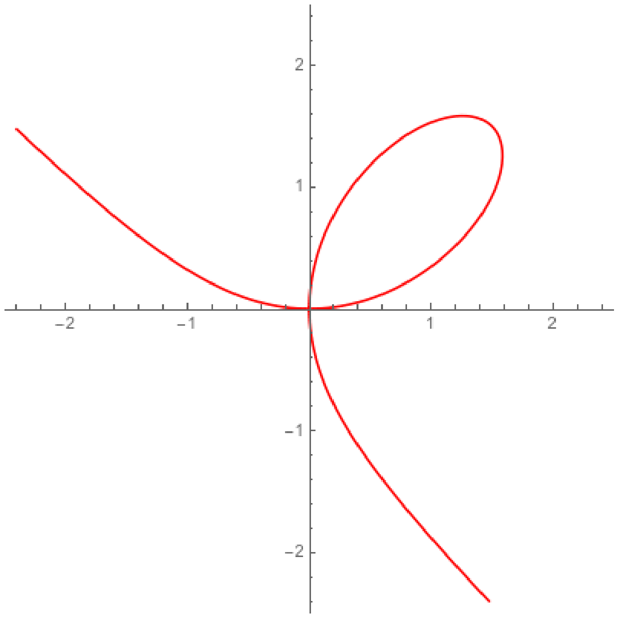
6.4 Plocha a plošné integrály 1. a 2. druhu

V této části si zavedeme integrály skalárních a vektorových polí přes plochy v $\mathbb{R}^3$. Nejprve si musíme vyjasnit, co budeme rozumět *plochou* v $\mathbb{R}^3$ a také co znamená, že je plocha *po částech třídy* C^1. Hned od začátku budeme pracovat se speciální třídou podmnožin $\mathbb{R}^3$, které budeme nazývat *parametrizované po částech* C^1 *plochy*. To sice není nejobecnější definice pojmu po částech C^1 plocha, ale její technická složitost je přijatelná a přitom zahrnuje dostatečně bohatou třídu množin. Navíc nám umožní poměrně rychle odvodit výsledky zásadní pro aplikace.

Definice 6.18 (Parametrizovaná po částech C^1 plocha v $\mathbb{R}^3$)**:** Množinu $S = S_1 \cup \cdots \cup S_k$, kde $S_i \subset \mathbb{R}^3$ pro každé $i \in \hat{k}$, splňující:

1. $(\forall i \in \hat{k})(\exists \Omega_i \subset \mathbb{R}^2$ neprázdná oblast $)(\exists \Phi_i : \Omega_i \to \mathbb{R}^3$ prosté třídy $C^1)(\Phi_i(\Omega_i) = S_i^{\circ S})$,
2. pro každé $i, j \in \hat{k}$, $i \neq j$, je průnik $S_i \cap S_j$ buď prázdný, nebo konečné sjednocení stop po částech C^1 křivek,

nazýváme *parametrizovanou po částech* C^1 *plochou v* $\mathbb{R}^3$. Množina $S_i^{\circ S}$ označuje vnitřek množiny S_i v topologii S.



Obrázek 21: Descartův list.

Poznámka: Parametrizovaná po částech C^1 plocha se tedy skládá z konečného počtu množin, které jsou obrazy spojitě diferencovatelných zobrazení Φ_i z otevřené a souvislé podmnožiny $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ (parametrizace) a navíc ze „společných částí nižší dimenze", viz konkrétní příklady níže. Všimněte si, že na rozdíl od křivek je parametrizovaná plocha množina a nikoliv zobrazení. To zdůrazňuje slovo *parametrizovaná*. V této logice je parametrizovaná plocha vícedimenzionální analogie stopy křivky.

Příklad 6.19: Sféra $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = a^2\}$ o poloměru $a > 0$ je parametrizovaná po částech C^1 plocha v $\mathbb{R}^3$, neboť ji lze např. složit z dolní a horní hemisféry $S = S_1 \cup S_2$, kde $S_i^{\circ S} = \Phi_i(\Omega_i)$, parametrizace $\Omega_i : \Omega_i \to \mathbb{R}^3$ lze volit jako hladká zobrazení

$$\Phi_1(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \Phi_2(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}$$

na množině

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < a^2\}.$$

Průnik $S_1 \cap S_2 = \{(x, y, z) \in S \mid z = 0\}$ je kružnice („rovník"), a tedy stopa křivky třídy C^1.

Jinou volbou je např. rozklad $S = \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2$ na levou a pravou hemisféru, které parametrizujeme zobrazeními $\tilde{\Phi}_i : \tilde{\Omega}_i \to \mathbb{R}^3$ určenými sférickými souřadnicemi:

$$\tilde{\Phi}_1(u, v) = \tilde{\Phi}_2(u, v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v),$$

kde

$$\tilde{\Omega}_1 = (-\pi, 0) \times (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{a} \quad \tilde{\Omega}_2 = (0, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2).$$

Průnik $\tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_2 = \{(x, y, z) \in S \mid y = 0\}$ je opět kružnice („poledník").

Příklad 6.20: Hranice (plného) válce $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le a^2 \ \wedge \ 0 \le z \le b\}$ o poloměru $a > 0$ a výšce $b > 0$ je parametrizovaná po částech C^1 plocha v $\mathbb{R}^3$. Množinu $S := \partial V$ můžeme např. rozložit na dvě poloviny pláště válce

$$S_1 := \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = a^2 \ \wedge \ 0 \le z \le b \ \wedge \ x \le 0\},$$

$$S_2 := \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = a^2 \ \wedge \ 0 \le z \le b \ \wedge \ x \ge 0\}$$

a dvě podstavy

$$S_3 := \{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \le a^2\}, \qquad S_4 := \{(x,y,b) \mid x^2+y^2 \le a^2\}.$$

Možnou volbou parametrizací $\Phi_i : \Omega_i \to S_i^{\circ S}$ je např.

$$\begin{aligned} \Phi_1(u,v) &:= (a\cos u, a\sin u, v), \quad & \Omega_1 &:= (-\pi, 0) \times (0,b),\\ \Phi_2(u,v) &:= (a\cos u, a\sin u, v), \quad & \Omega_2 &:= (0,\pi) \times (0,b) \end{aligned}$$

a

$$\Phi_3(u,v) := (u,v,0), \quad \Phi_4(u,v) := (u,v,b), \qquad \Omega_3 = \Omega_4 := \{(u,v) \mid u^2+v^2 < a^2\}.$$

Ověření, že průniky $S_i \cap S_j$, $i \neq j$, jsou buď prázdné, nebo stopy C^1 křivek, je jednoduché a je přenecháno čtenáři.

Příklad 6.21: Hranice (plného) kvádru $K = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ je parametrizovaná po částech C^1 plocha v $\mathbb{R}^3$. Množiny S_i, $i \in \hat{6}$, lze volit jako jednotlivé stěny kvádru K. Detailní ověření definice je přenecháno čtenáři jako cvičení.

Předpokládejme na chvíli, že S je plocha parametrizovaná jedinou funkcí Φ, tj. $k = 1$ v Definici 6.18. Tedy $\Phi : \Omega \to S$ je třídy C^1, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast. Navíc nechť $h(D\Phi) = 2$ na Ω. Zvolme pevně $(u_0, v_0) \in \Omega$. Parametrizace Ω určuje na ploše S dvě důležité křivky procházející bodem $\Phi(u_0, v_0)$, které jsou dány zobrazeními

$$\Phi_{v_0}(u) := \Phi(u, v_0) \quad \text{ a } \quad \Phi_{u_0}(v) := \Phi(u_0, v)$$

pro $u, v \in \Omega$. Tečné vektory ke křivkám Φ_{v_0} a Φ_{u_0} v bodě (u_0, v_0) jsou

$$T_{u_0} := \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\right)$$

a

$$T_{v_0} := \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\right),$$

kde jsme použili značení jako např. ve Větě o implicitní funkci a označili si komponenty parametrizace Φ:

$$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in \Omega.$$

Vektory T_{u_0} a T_{v_0} jsou lineárně nezávislé, neboť jsou to sloupce matice $D\Phi(u_0, v_0)$, která má dle předpokladu hodnost 2. Tedy T_{u_0} a T_{v_0} určují tečnou rovinu k ploše S v bodě $\Phi(u_0, v_0)$.

Normálový vektor této roviny, tj. vektor kolmý na oba vektory T_{u_0} a T_{v_0}, lze volit jako vektorový součin

$$T_{u_0} \times T_{v_0} = \left(\left| \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \right| (u_0,v_0), \left| \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right| (u_0,v_0), \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| (u_0,v_0) \right).$$

Z lineární nezávislosti vektorů T_{u_0} a T_{v_0} vyplývá, že $T_{u_0} \times T_{v_0} \neq 0$. V takovém případě můžeme zavést *jednotkový normálový vektor k ploše S v bodě $\Phi(u_0,v_0)$* vztahem

$$n = n(u_0,v_0) := \frac{T_{u_0} \times T_{v_0}}{\|T_{u_0} \times T_{v_0}\|}. \tag{76}$$

Všimněte si, že jsme provedli jednu volbu jednotkového normálového vektoru ze dvou možností lišících se znaménkem.

Nyní můžeme zavést integrál skalárního pole $f : S \to \mathbb{R}$ přes plochu S. O funkci $f : S \to \mathbb{R}$ řekneme, že je *integrabilní* na parametrizované C^1 ploše $S = S_1 \cup \cdots \cup S_k$, pokud $(f \circ \Phi_i) \|\partial_u \Phi_i \times \partial_v \Phi_i\| \in L(\Omega_i)$ pro každé $i \in \hat{k}$.

Definice 6.22: Buď $S = S_1 \cup \cdots \cup S_k$ parametrizovaná po částech C^1 plocha, kde množiny $S_1, \ldots S_k$ jsou jako v Definici 6.18. Nechť $f : S \to \mathbb{R}$ je integrabilní funkce na S. Potom definujeme *plošný integrál funkce f přes plochu S 1. druhu* vztahy:

$$\int_S f \, \mathrm{d}S := \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} f \, \mathrm{d}S, \tag{77}$$

kde

$$\int_{S_i} f \, \mathrm{d}S := \int_{\Omega_i} f\left(\Phi_i(u,v)\right) \left\| \frac{\partial \Phi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

pro každé $i \in \hat{k}$. Speciálně *obsah plochy* definujeme vztahem

$$A(S) := \int_S 1 \, \mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} 1 \, \mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega_i} \left\| \frac{\partial \Phi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u \mathrm{d}v. \tag{78}$$

Poznámka: Druhý bod z Definice 6.18 zaručuje, že části S, které se integrují v integrálech napravo v (77) vícekrát, tj. průniky $S_i \cap S_j$, do integrálů nepřispívají.

Poznámka: Připomeňme, že pro vektory $a, b \in \mathbb{R}^3$, platí vzorec:

$$\|a \times b\| = \sqrt{\|a\|^2 \|b\|^2 - (a,b)^2}.$$

Ten bývá užitečný při výpočtu konkrétních plošných integrálů 1. druhu, viz příklady níže.

Příklad 6.23: Spočítáme plošný integrál 1. druhu funkce $f(x,y,z) = x^2 z$ přes plášť válce $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \ \wedge \ 0 < z < 1\}$. Zvolíme parametrizaci S pomocí cylindrických souřadnic:

$$\Phi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$$

kde $(u,v) \in \Omega := (-\pi,\pi) \times (0,1)$. Jelikož

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \|(\cos u, \sin u, 0)\| = 1,$$

dostáváme

$$\int_S f \mathrm{d}S = \int_\Omega f(\cos u, \sin u, v) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} v \cos^2 u \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2}.$$

Ze vzorce (78) není zřejmé, proč právě tento vztah je smysluplná definice pro obsah plochy S. Motivaci pro tuto definici si jen naznačíme. Zřejmě stačí uvažovat plochu $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizovanou jednou parametrizací $\Phi \in C^1(\Omega)$. Jelikož je Ω otevřená, můžeme ji pro pevně zvolené $k \in \mathbb{N}$ aproximovat zevnitř čtverci o straně např. 2^{-k} tak, jako v Lemma 5.78. Na každém čtverci $Q = [u, u+2^{-k}] \times [v, v+2^{-k}]$ z množiny $A_k(\Omega) \subset \Omega$ aproximujeme odpovídající část plochy S, tj. $\Phi(Q)$, rovnoběžníkem se stranami danými vektory $\Phi\left(u+2^{-k}, v\right) - \Phi\left(u,v\right)$ a $\Phi\left(u, v+2^{-k}\right) - \Phi\left(u,v\right)$. Připomeňme, že norma vektorového součinu vektorů $a, b \in \mathbb{R}^3$ je rovna právě obsahu rovnoběžníku, jehož strany jsou dány vektory a a b. Obsah našeho rovnoběžníku je tedy roven

$$\left\| \left[\Phi\left(u+2^{-k}, v\right) - \Phi\left(u,v\right)\right] \times \left[\Phi\left(u, v+2^{-k}\right) - \Phi\left(u,v\right)\right] \right\|,$$

což je pro k velké podle Věty o přírůstku přibližně rovno

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| 2^{-2k} = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| m^2(Q).$$

Obsah celé plochy S lze pak odhadnout výrazem

$$\sum_{Q \subset A_k(\Omega)} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| m^2(Q).$$

Poslední výraz lze chápat jako integrál funkce

$$\phi_k := \sum_{Q \subset A_k(\Omega)} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \chi_Q.$$

Díky předpokladu $\Phi \in C^1(\Omega)$ lze ukázat, že $\phi_k \to \|\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi\|$ pro $k \to \infty$ bodově na Ω a s pomocí Lebesgueovy věty dále argumentovat, že $\int_\Omega \phi_k$ konverguje pro $k \to \infty$ k integrálu

$$\int_\Omega \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Jinými slovy pokud aproximujeme obsah plochy S součtem obsahů malých rovnoběžníků určených tečnými rovinami k ploše S v bodech dělení množiny Ω a dělení zjemňujeme, dostaneme v limitě integrál (78).

Podobně jako křivkový integrál 1. druhu také hodnota plošného integrálu 1. druhu nezávisí na reparametrizaci parametrizované plochy S. *Reparametrizací* zde rozumíme to, že parametrizace $\Phi_i : \Omega_i \to S_i$ jednotlivých částí S_i, viz Definice 6.18, nahradíme novými parametrizacemi $\Psi_i = \Phi_i \circ \xi_i : \Lambda_i \to S_i$, kde $\xi_i : \Lambda_i \to \Omega_i$ je difeomorfismus oblastí $\Lambda_i, \Omega_i \subset \mathbb{R}^2$. Zřejmě díky aditivní definici (77) stačí tuto nezávislost ověřit pro C^1 plochu parametrizovanou jedinou funkcí ($k = 1$ v Definici 6.18).

Věta 6.24: Nechť S je parametrizovaná C^1 plocha v $\mathbb{R}^3$, pro níž existuje oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ třídy C^1 tak, že $\Phi(\Omega) = S$. Nechť je dále $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ oblast a $\xi : \Lambda \to \Omega$ difeomorfismus. Potom pro $\Psi := \Phi \circ \xi$ a libovolné integrabilní $f : S \to \mathbb{R}$ platí:

$$\int_\Omega f\left(\Phi(u,v)\right) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_\Lambda f\left(\Psi(s,t)\right) \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\| \mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

Důkaz. Píšeme-li $\xi(s,t) = (u,v)$, dostaneme aplikací řetězového pravidla rovnosti

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} \quad \text{a} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Potom

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial s}\right) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) \det D\xi,$$

kde jsme využili toho, že vektorový součin lineárně závislých vektorů je nula. Tudíž podle Věty 5.79 o substituci je

$$\begin{aligned}\int_\Lambda f(\Psi(s,t)) \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\| \mathrm{d}s\mathrm{d}t &= \int_\Lambda (f \circ \Phi)(\xi(s,t)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(\xi(s,t)) \right\| \left|\det D\xi(s,t)\right| \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ &= \int_\Omega f\left(\Phi(u,v)\right) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

□

Příklad 6.25 (Obsah plochy grafu funkce)**:** Uvažujme plochu S, která je grafem funkce $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ třídy C^1 na oblasti Ω, tedy $S = \{(x,y,g(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \Omega\}$. Potom se nabízí volit parametrizaci $\Phi(x,y) := (x,y,g(x,y))$ pro $(x,y) \in \Omega$. Zřejmě je

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial x}\right) \quad \text{a} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

a odtud

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\|^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2.$$

Tudíž podle (78) dostáváme vzorec pro obsah plochy S ve tvaru

$$A(S) = \int_\Omega \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{79}$$

Příklad 6.26 (Povrch koule)**:** Odvodíme známý vzorec pro povrch koule o poloměru $a > 0$ dvěma způsoby.

Položme $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$. Zřejmě stačí spočítat obsah např. horní hemisféry $S_+ := S \cap \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$. Ta je grafem funkce

$$g(x, y) := \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

pro $(x, y) \in \Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < a^2\}$. Krátkým výpočtem zjistíme, že

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Tudíž podle (79) máme

$$A(S) = 2A(S_+) = \int_\Omega \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Po substituci do polárních souřadnic nám vyjde

$$A(S) = 2 \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = 4\pi a \left[-\sqrt{a^2 - r^2}\right]_0^a = 4\pi a^2.$$

Druhý postup využívá parametrizace pomocí sférických souřadnic

$$\Phi(u, v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$$

pro $(u, v) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$. Obor hodnot Φ sice není celá sféra S, nýbrž S bez jedné půlkružnice („poledníku“), to ale nemá na obsah S vliv. Jelikož

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (-a \sin u \cos v, a \cos u \cos v, 0) \quad \text{a} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (-a \cos u \sin v, -a \sin u \sin v, a \cos v),$$

vyjde nám

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)^2 = a^4 \cos^2 v$$

a odtud opět dostaneme

$$A(S) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos v \,\mathrm{d}v \mathrm{d}u = 4\pi a^2.$$

Příklad 6.27 (Obsah rotačního tělesa)**:** Uvažujme jednoduchou po částech C^1 křivku v $\mathbb{R}^3$ s parametrizací ve tvaru

$$\phi(t) = (0, y(t), z(t)), \quad t \in [a, b].$$

Najdeme parametrizaci plochy S, která vznikne rotací stopy křivky ϕ kolem osy z. Zafixujeme-li $t \in [a,b]$, vznikne rotací $[\phi]$ v rovině $z = z(t)$ kružnice o poloměru $y(t)$ se středem v bodě $(0,0,z(t))$. Odtud vyvodíme, že parametrizace rotační plochy S je tvaru

$$\Phi(t,\theta) = (y(t)\cos\theta, y(t)\sin\theta, z(t))\,,$$

kde $t \in [a,b]$ a $\theta \in (-\pi,\pi]$. Snadno spočítáme, že

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = (y'(t)\cos\theta, y'(t)\sin\theta, z'(t))\,, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = (-y(t)\sin\theta, y(t)\cos\theta, 0)\,,$$

a

$$\left\| \frac{\partial\Phi}{\partial t} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right\| = |y(t)| \sqrt{(y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

pro všechna $t \in (a,b)$ a $\theta \in (-\pi,\pi)$. Tudíž obsah S je dán integrálem

$$A(S) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_a^b |y(t)|\sqrt{(y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_a^b |y(t)|\,\|\phi'(t)\|\,\mathrm{d}t. \tag{80}$$

Uveďme si několik konkrétních příkladů těles, které vzniknou rotací jednoduché křivky:

a) *Sféra* o poloměru $a > 0$ vznikne rotací půlkružnice

$$\phi(t) = (0, a\cos t, a\sin t), \quad t \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Pro její obsah proto podle (80) platí:

$$A(S) = 2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2\cos t\,\mathrm{d}t = 4\pi a^2.$$

b) Plášť *válce* o poloměru $a > 0$ a výšce $b > 0$ vznikne rotací úsečky

$$\phi(t) = (0, a, bt), \quad t \in [0,1],$$

a proto

$$A(S) = 2\pi\int_0^1 ab\,\mathrm{d}t = 2\pi ab.$$

c) Plášť *kuželu* o poloměru $a > 0$ a výšce $b > 0$ vznikne rotací úsečky

$$\phi(t) = (0, at, bt), \quad t \in [0,1],$$

a proto

$$A(S) = 2\pi\int_0^1 at\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t = \pi a\sqrt{a^2+b^2}.$$

d) *Torus* vznikne rotací kružnice (v rovině $x = 0$) o poloměru $a > 0$ se středem v bodě $(0, b, 0)$, kde $b > a$, kolem osy z. Jeho plášť můžeme rozdělit na dvě části, které vzniknou rotací půlkružnic

$$\phi_{\pm}(t) = (0, b \pm a\cos t, a\sin t)\,, \quad t \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Proto podle (80) pro obsah toru dostaneme

$$A(S) = A(S_-) + A(S_+) = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (b - a\cos t)\, a \,\mathrm{d}t + 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (b + a\cos t)\, a \,\mathrm{d}t$$
$$= 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ab \,\mathrm{d}t = 4\pi^2 ab.$$

Příklad 6.28 (Povrch Vivianiho tělesa)**:** Spočítáme povrch Vivianiho tělesa, tj. obsah hranice S tělesa, které vznikne průnikem válce a koule dané nerovnostmi:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2 \quad \text{a} \quad (x-a)^2 + y^2 \leq a^2,$$

kde $a > 0$, viz Obrázek 18. Tuto plochu můžeme rozdělit na dvě části, válcový plášť

$$S_v := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2 \;\wedge\; (x-a)^2 + y^2 = a^2\right\}$$

a sférickou část

$$S_s := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 \;\wedge\; (x-a)^2 + y^2 \leq a^2\right\}.$$

Vzhledem k symetrii tělesa stačí počítat obsah např. části z kladného oktantu $\mathbb{R}^3_+$.

Válcový plášť S_v parametrizujeme pomocí cylindrických souřadnic:

$$\Phi_c(u, v) := (a + a\cos u, a\sin u, av)\,,$$

kde $u \in (0, \pi)$ a $v > 0$, omezíme-li se jen na část válce v $\mathbb{R}^3_+$. Abychom parametrizovali jen tu část válce, která se nachází v kouli, dosadíme souřadnice do nerovnice pro kouli a dostaneme

$$(a + a\cos u)^2 + a^2\sin^2 u + a^2v^2 \leq 4a^2,$$

což je po zjednodušení nerovnost

$$2\cos u + v^2 \leq 2.$$

Tím dostaneme parametrizaci plochy S_v v $\mathbb{R}^3_+$ ve tvaru

$$S_v \cap \mathbb{R}^3_+ = \left\{(a + a\cos u, a\sin u, av) \;\middle|\; 0 < v < \sqrt{2 - 2\cos u} \;\wedge\; u \in (0, \pi)\right\}.$$

Jelikož

$$\frac{\partial \Phi_c}{\partial u} = (-a\sin u, a\cos u, 0) \quad \text{a} \quad \frac{\partial \Phi_c}{\partial v} = (0, 0, a)\,,$$

dostaneme
$$\left\|\frac{\partial\Phi_c}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi_c}{\partial v}\right\| = \sqrt{\left\|\frac{\partial\Phi_c}{\partial u}\right\|^2\left\|\frac{\partial\Phi_c}{\partial v}\right\|^2 - \left(\frac{\partial\Phi_c}{\partial u},\frac{\partial\Phi_c}{\partial v}\right)^2} = a^2,$$
a proto pro plochu máme
$$A\left(S_v\cap\mathbb{R}^3_+\right) = \int_0^\pi\int_0^{\sqrt{2-2\cos u}} a^2\mathrm{d}v\mathrm{d}u = a^2\int_0^\pi\sqrt{2-2\cos u}\,\mathrm{d}u = 2a^2\int_0^\pi \sin\left(\frac{u}{2}\right)\mathrm{d}u = 4a^2.$$

Sférickou část S_s omezenou na $\mathbb{R}^3_+$ parametrizujeme sférickými souřadnicemi
$$\Phi_s(\varphi,\theta) := (2a\cos\varphi\cos\theta, 2a\sin\varphi\cos\theta, 2a\sin\theta)$$
kde $\varphi\in(0,\pi/2)$ a $\theta\in(0,\pi/2)$. Z omezení na válec dostaneme nerovnost
$$(a-2a\cos\varphi\cos\theta)^2 + 4a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta \le a^2,$$
což je po zjednodušení
$$(\cos\theta-\cos\varphi)\cos\theta\le 0.$$
Jelikož pro $\theta\in(0,\pi/2)$ je $\cos\theta>0$ a kosinus je klesající funkce na $(0,\pi/2)$, dostaneme z poslední nerovnosti jednoduché omezení $\varphi\le\theta$. Tudíž
$$S_s\cap\mathbb{R}^3_+ = \left\{(2a\cos\varphi\cos\theta, 2a\sin\varphi\cos\theta, 2a\sin\theta)\;\middle|\; 0<\varphi<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}.$$
Jednoduše spočítáme, že
$$\frac{\partial\Phi_s}{\partial\varphi} = (-2a\sin\varphi\cos\theta, 2a\cos\varphi\cos\theta, 0)$$
a
$$\frac{\partial\Phi_s}{\partial\theta} = (-2a\cos\varphi\sin\theta, -2a\sin\varphi\sin\theta, 2a\cos\theta)\,.$$
Odtud
$$\left\|\frac{\partial\Phi_s}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi_s}{\partial\theta}\right\| = 4a^2\cos\theta,$$
a tudíž
$$A\left(S_s\cap\mathbb{R}^3_+\right) = \int_0^{\pi/2}\int_0^\theta 4a^2\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = 4a^2\int_0^{\pi/2}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2a^2(\pi-2).$$

Celkem tedy pro povrch Vivianiho tělesa dostáváme
$$A(S) = 4A\left(S_v\cap\mathbb{R}^3_+\right) + 4A\left(S_s\cap\mathbb{R}^3_+\right) = 8\pi a^2.$$

Plošný integrál 2. druhu je integrál vektorového pole přes plochu, který se zavádí jako integrál normálové komponenty pole přes plochu S, tj. vztahem

$$\int_S F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} := \int_S (F, n)\mathrm{d}S, \tag{81}$$

kde $n = n(x, y, z)$ je jednotkový normálový vektor k ploše S v bodě $(x, y, z) \in S$. Připomeneme-li si vztah (76), dojdeme k následující definici *plošného integrálu 2. druhu*. O funkci $F : S \to \mathbb{R}^3$, kde $S = S_1 \cup \cdots \cup S_k$ je parametrizovaná po částech C^1 plocha z Definice 6.18, řekneme, že je *integrabilní* na S, pokud skalární součin $(F \circ \Phi_i, \partial_u \Phi_i \times \partial_v \Phi_i) \in L(\Omega_i)$ pro každé $i \in \hat{k}$.

Definice 6.29: Buď $S = S_1 \cup \cdots \cup S_k$ parametrizovaná po částech C^1 plocha, kde množiny $S_1, \ldots S_k$ jsou jako v Definici 6.18. Nechť $F : S \to \mathbb{R}^3$ je integrabilní vektorová funkce na S. Potom definujeme *plošný integrál funkce F přes plochu S 2. druhu* vztahy:

$$\int_S F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} := \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

kde

$$\int_{S_i} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} := \int_{\Omega_i} \left(F \circ \Phi_i, \frac{\partial \Phi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{82}$$

pro každé $i \in \hat{k}$.

Integrály v (82) závisí na parametrizacích Φ_i z definice parametrizované plochy S. Jednoduchou modifikací důkazu Věty 6.24 dokážeme následující tvrzení.

Věta 6.30: Nechť S je parametrizovaná C^1 plocha v $\mathbb{R}^3$, pro níž existuje oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ třídy C^1 tak, že $\Phi(\Omega) = S$. Nechť je dále $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ oblast a $\xi : \Lambda \to \Omega$ difeomorfismus. Potom pro $\Psi := \Phi \circ \xi$ a libovolné integrabilní vektorové pole $F : S \to \mathbb{R}$ platí:

$$\int_\Omega \left(F \circ \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \omega \int_\Lambda \left(F \circ \Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

kde $\omega := \operatorname{sgn} \det D\xi$ (z předpokladů plyne, že buď $\det D\xi > 0$, nebo $\det D\xi < 0$ na celém Λ).

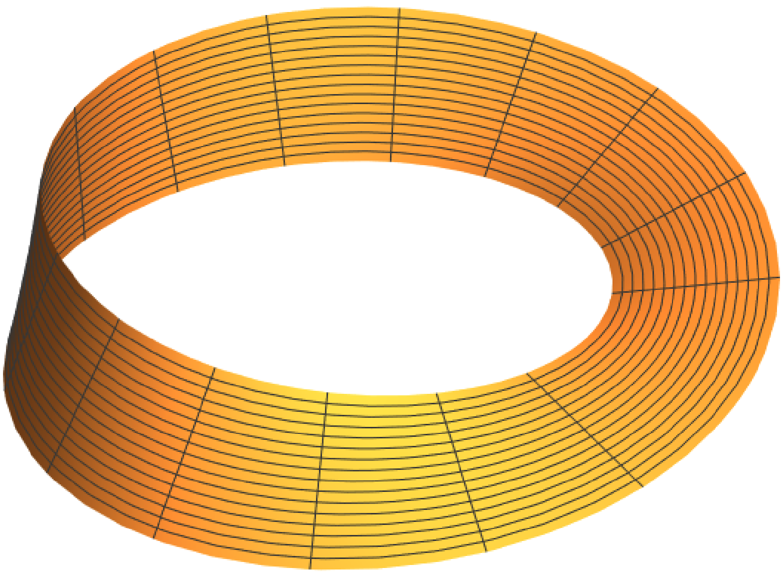
Důkaz. Postupuje se podobně jako v důkazu Věty 6.24. Detaily jsou přenechány čtenáři. □

V předchozí větě bychom mohli říct, že plošný integrál 2. druhu nezávisí na reparametrizaci realizované difeomorfismem ξ *zachovávajícím orientaci* plochy S, tj. takové, že $\det D\xi > 0$ na Λ. Naopak plošný integrál 2. druhu změní znaménko, pokud ξ *mění orientaci* S, tj. $\det D\xi < 0$ na Λ (např. prohození parametrů u a v).

Samotný pojem *orientace* plochy jsme dosud nezavedli. V případě křivky je volba orientace volbou „kladného“ směru na křivce. V případě plochy je volba orientace označení „kladné“ strany plochy. V $\mathbb{R}^3$ se orientace na ploše S zadává volbou spojitého normálového pole, tj. zadáním spojitého zobrazení $n : S \to \mathbb{R}^3$, které každému bodu plochy S přiřadí jednotkový normálový vektor k ploše S v tomto bodě (ze dvou možných). „Kladná“ strana S potom označuje stranu, ze které normálový vektor vychází. Spojitost zobrazení n je zde zásadní požadavek.

Zaručuje, že se normálový vektor $n(x, y, z)$ mění spojitě s bodem (x, y, z) pohybujícím se spojitě po ploše S (náhle se nepřeklopí). Speciálně pohybuje-li se bod po uzavřené křivce na S, musí normálový vektor v počátečním bodě křivky přejít spojitě v normálový vektor v koncovém bodě.

Je důležité poznamenat, že spojité normálové (jednotkové) pole nemusí na S vůbec existovat. O takové ploše říkáme, že není *orientovatelná*. Klasickým příkladem takové neorientovatelné plochy je *Möbiův list*, který lze zkonstruovat tak, že ustřihneme delší proužek papíru, jeden konec otočíme o 180 stupňů a konce slepíme, viz Obr. 22. Zvolíme-li na středové kružnici v jednom bodě jednotkový normálový vektor a projdeme kružnicí jednou dokola do téhož bodu, normálový vektor se změní na opačný, mění-li se při procházení křivkou spojitě. Tedy na Möbiově listu nelze zadat spojité normálové pole. Intuitivně chápeme, že nelze rozlišit strany Möbiova listu (jako kladnou a zápornou), protože Möbiův list má jen jednu stranu.



Obrázek 22: Möbiův list.

Všimněte si, že v integrálu (81), který byl motivací pro definici (82), jsme provedli konkrétní volbu normálového vektoru n určeného parametrizací plochy, ačkoliv jsme měli v každém bodě dvě možnosti. Jinými slovy v definici (82) jsme specifikovali orientaci na každé části $S_i^{\circ S}$ plochy S volbou parametrizace Φ_i. Není-li plocha S zadána konkrétní parametrizací, je třeba pro výpočet plošného integrálu 2. druhu orientaci na S zadat specifikací normálového pole na S, viz následující příklad.

Příklad 6.31: Spočítáme plošný integrál 2. druhu funkce $F(x, y, z) := (x^2, yz, y)$ přes plášť kužele

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 \ \wedge \ 0 < z < 1\}$$

s orientací určenou normálovým vektorem, jehož směr míří *dovnitř* kužele.

Plochu S můžeme např. parametrizovat zobrazením

$$\Phi(r,\theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta, r),$$

kde $r \in (0,1)$ a $\theta \in (-\pi,\pi]$. Jeden normálový vektor v bodě $\Phi(r,\theta)$ plochy S je

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = (\cos\theta, \sin\theta, 1) \times (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0) = (-r\cos\theta, -r\sin\theta, r).$$

Tento vektor míří dovnitř kuželu pro každé $r \in (0,1)$ a $\theta \in (-\pi,\pi]$, což je vidět např. z toho, že jeho 3. složka ($z = r$) je kladná. Zvolená parametrizace Φ tedy zadává na S orientaci ze zadání úlohy. Dostáváme proto

$$\begin{aligned}
\int_S F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \left(F\left(\Phi(r,\theta)\right), \frac{\partial\Phi}{\partial r} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \big((r^2\cos^2\theta, r^2\sin\theta, r\sin\theta), (-r\cos\theta, -r\sin\theta, r)\big)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \left(-r^3\cos^3\theta - r^3\sin^2\theta + r^2\sin\theta\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

kde hodnotu $-\pi/4$ posledního integrálu najdeme snadno po krátkém výpočtu.

Rozhodnout, zda je daná plocha orientovatelná je obecně obtížný problém. My se touto otázkou více nebudeme zabývat. Poznamenejme, že častý způsob zadání orientace na orientovatelné ploše, která je hranicí kompaktní množiny $R \subset \mathbb{R}^3$, je volbou tzv. *vnější normály* k R, tedy spojitým polem normálových vektorů mířících *mimo* množinu R, viz popis před Větou 6.33.

Poznámka: Představuje-li vektorové pole F nějakou substanci v prostoru, např. F je rychlostní pole molekul tekutiny, je fyzikální význam integrálu $\int_S (F,n)\mathrm{d}S$ celkový *tok* substance plochou S z její negativní strany do pozitivní strany. Je proto přirozené, že tato veličina není závislá na parametrizaci S zachovávající orientaci a mění pouze znaménko při změně orientace. V tomto kontextu nemá definice plošného integrálu 2. druhu pro neorientovatelné plochy dobrý smysl, a proto ji někteří autoři ani nedefinují.

6.5 Gaussova věta

Naším cílem je dokázat větu, která je 3-dimenzionální analogií Greenovy věty. Před tím si ale ještě stručně shrneme tři používané derivace vektorové analýzy.

Připomeňme, že *gradient* diferencovatelné funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kde Ω je otevřená množina, je vektorová funkce

$$\operatorname{grad} f \equiv \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Označíme-li si formálně uspořádanou n-tici

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

můžeme ∇ kombinovat se skalárním a vektorovým součinem (pro $n = 3$) a definovat další dvě derivace vektorových polí $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ třídy C^1. *Divergence* vektorové funkce $F \in C^1(\Omega)$ je skalární funkce na Ω definována vztahem

$$\operatorname{div} F \equiv \nabla \cdot F := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n},$$

jejíž geometrický význam (nezávisející na souřadnicích) vyplyne později z Gaussovy věty. Nakonec ještě v případě, že $n = 3$, definujeme *rotaci* vektorové funkce $F \in C^1(\Omega)$ jako vektorovou funkci

$$\operatorname{rot} F \equiv \nabla \times F := \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right),$$

jejíž geometrický význam vyjasní až Stokesova věta.

Shrneme několik užitečných identit pro gradient, divergenci a rotaci. Budeme používat značení div a rot pro divergenci a rotaci, protože identity jsou v této formě lépe čitelné, a grad pro gradient, abychom zůstali konzistentní.

Věta 6.32: Nechť $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ a $F, G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ jsou třídy C^1 na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Potom platí:

$$\begin{aligned}
&1) \quad \operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f, \\
&2) \quad \operatorname{grad}(F, G) = (F \cdot \nabla) G + F \times \operatorname{rot} G + (G \cdot \nabla) F + G \times \operatorname{rot} F, && (n = 3), \\
&3) \quad \operatorname{rot}(fF) = f \operatorname{rot} F + (\operatorname{grad} f) \times F, && (n = 3), \\
&4) \quad \operatorname{rot}(F \times G) = (G \cdot \nabla) F + (\operatorname{div} G) F - (F \cdot \nabla) G - (\operatorname{div} F) G, && (n = 3), \\
&5) \quad \operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + (\operatorname{grad} f, F), \\
&6) \quad \operatorname{div}(F \times G) = (G, \operatorname{rot} F) - (F, \operatorname{rot} G), && (n = 3),
\end{aligned}$$

kde

$$(F \cdot \nabla) G = \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial G_i}{\partial x_i}.$$

Důkaz. Ověření identit je přenecháno čtenáři jako Cvičení 6.7. □

Dvojici z operací grad, div a rot lze nakombinovat pěti různými způsoby:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} F, \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} f, \quad \operatorname{grad} \operatorname{div} F, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} F,$$

kde f a F jsou třídy C^2. První dvě kombinace jsou identicky nulové, tj.

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 \quad \text{a} \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$$

pro každé $f \in C^2(\Omega)$ a $F \in C^2(\Omega)$, viz Cvičení 6.8. Třetí výraz, který má smysl pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, je tzv. *Laplacián* funkce f:

$$\Delta f \equiv \nabla^2 f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Laplacián hraje podstatnou úlohu v teorii harmonických funkcí a v matematické fyzice. Poslední dvě kombinace nejsou tak významné, ale dohromady dávají tzv. *vektorový Laplacián* funkce F:

$$\nabla^2 F := \operatorname{grad}\operatorname{div} F - \operatorname{rot}\operatorname{rot} F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3),$$

kde $F \in C^2(\Omega)$. Ověření poslední rovnosti je přenecháno čtenáři jako Cvičení 6.9.

Připomeňme, že Greenova věta 6.15 dávala do rovnosti integrál přes kompaktní množinu v $\mathbb{R}^2$ na jedné straně a křivkový integrál 2. druhu přes hranici množiny na straně druhé. Podobně Gaussova věta srovnává (objemový) integrál přes kompaktní množinu $R \subset \mathbb{R}^3$ s plošným integrálem 2. druhu přes její hranici. Budeme předpokládat, že ∂R je parametrizovaná po částech C^1 plocha z Definice 6.18. O ∂R pak řekneme, že je orientovaná normálovým polem n daným *vnější* jednotkovou normálou k R, pokud existuje normálové pole n na $\partial R = S_1 \cup \dots \cup S_k$ spojité na $S_i^{\circ \partial R}$ pro každé $i \in \hat{k}$ a takové, že pro každé $i \in \hat{k}$ a každé $x \in S_i^{\circ \partial R}$ je $n(x)$ jednotkový normálový vektor k S_i, který míří *vně* R, tj. pro všechna $\epsilon > 0$ dostatečně malá je $x + \epsilon n(x) \notin R$.

Gaussova věta je též známá jako *Gaussova–Ostrogradského věta* nebo *Divergenční věta.* Z tradičních důvodů označíme Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}^3$ písmenem V (Volume = objem), tj. v Gaussově větě píšeme $\mathrm{d}V$ místo $\mathrm{d}m^3$.

Věta 6.33 (Gauss)**:** Nechť $R \subset \mathbb{R}^3$ je kompaktní množina, jejíž hranice ∂R je parametrizovaná po částech C^1 plocha orientovaná normálovým polem daným *vnější* jednotkovou normálou n. Dále nechť $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je třídy C^1 na otevřené nadmnožině $\Omega \supset R$. Potom platí:

$$\int_{\partial R} (F, n)\,\mathrm{d}S = \int_R \operatorname{div} F\,\mathrm{d}V.$$

Důkaz. Podobně jako v případě Greenovy věty dokážeme Gaussovu větu jen pro speciální případ množin R, které jsou sjednocením konečně mnoha jednoduchých množin. I tento speciální případ je v mnoha aplikacích zcela dostačující. Důkaz obecného tvrzení, který využívá technický prostředek, tzv. rozklad jedničky, najde čtenář v dodatcích.

1) Předpokládejme nejprve, že R je *jednoduchá*, tj.

$$\begin{aligned} R &= \{(x,y,z) \mid (x,y) \in W_1 \ \wedge\ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\} \\ &= \{(x,y,z) \mid (x,z) \in W_2 \ \wedge\ \varphi_3(x,z) \le y \le \varphi_4(x,z)\} \\ &= \{(x,y,z) \mid (y,z) \in W_3 \ \wedge\ \varphi_5(y,z) \le x \le \varphi_6(y,z)\}, \end{aligned} \tag{83}$$

kde $W_1, W_2, W_3 \subset \mathbb{R}^2$ jsou kompaktní množiny a funkce φ_i, $i \in \hat{6}$, jsou třídy C^1 na vnitřku odpovídající množiny W_1, W_2, nebo W_3. Zapíšeme-li vektorové pole $F = F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3$, kde $\{e_1, e_2, e_3\}$ je standardní báze $\mathbb{R}^3$, je jasné, že Gaussovu větu stačí dokázat pro jednotlivé komponenty:

$$\int_{\partial R} F_1 n_1\,\mathrm{d}S = \int_R \frac{\partial F_1}{\partial x}\mathrm{d}V, \quad \int_{\partial R} F_2 n_2\,\mathrm{d}S = \int_R \frac{\partial F_2}{\partial y}\mathrm{d}V \quad \text{a} \quad \int_{\partial R} F_3 n_3\,\mathrm{d}S = \int_R \frac{\partial F_3}{\partial z}\mathrm{d}V.$$

Dokážeme pouze poslední rovnost a k tomu použijeme vyjádření (83), podle kterého je R množina mezi plochami, které jsou grafy funkcí φ_1 a φ_2. Zbylé dvě rovnosti se dokáží analogicky za použití zbylých dvou vyjádření jednoduché množiny R.

Z vyjádření (83) vyplývá, že hranice ∂R je plocha složená ze tří částí:

$$S_1 := \{(x, y, \varphi_1(x, y)) \mid (x, y) \in W_1\}, \qquad (\text{„dno“})$$
$$S_2 := \{(x, y, \varphi_2(x, y)) \mid (x, y) \in W_1\}, \qquad (\text{„vršek“})$$

a

$$S_3 := \{\lambda(x, y, \varphi_1(x, y)) + (1-\lambda)(x, y, \varphi_2(x, y)) \mid \lambda \in [0, 1] \ \wedge \ (x, y) \in \partial W_1\}, \quad (\text{„plášť“}).$$

Plocha S_3 je sjednocení vertikálních úseček spojujících body $(x, y, \varphi_1(x, y))$ a $(x, y, \varphi_2(x, y))$, kde (x, y) prochází hranici W_1. Normálový vektor n k ploše S_3 je vodorovný, tj. $n_3 = 0$, a proto plocha S_3 do plošného integrálu $\int_{\partial R} F_3 n_3 \,\mathrm{d}S$ nepřispívá. Tedy

$$\int_{\partial R} F_3 n_3 \mathrm{d}S = \int_{S_1} F_3 n_3 \mathrm{d}S + \int_{S_2} F_3 n_3 \mathrm{d}S.$$

Normálový vektor k ploše S_2, který ještě nemusí být normalizovaný (označeno vlnkou), je

$$\tilde{n} = \left(1, 0, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, 1\right)$$

a míří **ven** z R. Jeho orientace tedy souhlasí se zadanou orientací na ∂R. Proto

$$\int_{S_2} F_3 n_3 \mathrm{d}S = \int_{W_1} F_3\left(x, y, \varphi_2(x, y)\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Podobně zjistíme, že

$$\int_{S_1} F_3 n_3 \mathrm{d}S = -\int_{W_1} F_3\left(x, y, \varphi_1(x, y)\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Znaménko $-$ je důsledkem toho, že normálový vektor $\tilde{n} = (-\partial_x \varphi_1, -\partial_y \varphi_1, 1)$ míří z S_1 **dovnitř** množiny R, a proto je vnější normálou k S_1 vektor opačný, tj. $-\tilde{n}$.

Celkem tedy máme

$$\begin{aligned}\int_{\partial R} F_3 n_3 \mathrm{d}S &= \int_{W_1} F_3\left(x, y, \varphi_2(x, y)\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y - \int_{W_1} F_3\left(x, y, \varphi_1(x, y)\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &= \int_{W_1} \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_R \frac{\partial F_3}{\partial z} \mathrm{d}V,\end{aligned}$$

kde jsme v poslední rovnosti použili Fubiniho větu.

2) Platnost Gaussovy věty můžeme nyní rozšířit na množiny R, které lze rozložit na sjednocení konečného počtu jednoduchých množin $R_1, \dots R_k$, které jsou buď disjunktní, nebo mají společnou část hranice. Zřejmě

$$\int_R \operatorname{div} F \mathrm{d}V = \sum_{i=1}^{k} \int_{R_i} \operatorname{div} F \mathrm{d}V.$$

Také

$$\int_{\partial R} (F, n)\, \mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial R_i} (F, n)\, \mathrm{d}S,$$

neboť integrály přes ty části hranic ∂R_i, které nejsou částí ∂R, jsou v sumě vždy dva s opačnou vnější normálou n, a proto se vzájemně odečtou. Argument je analogický jako v důkazu Greenovy věty 6.15. □

S pomocí Gaussovy věty můžeme interpretovat geometrický význam divergence vektorového pole třídy C^1. Nejprve si všimněte, že je-li u spojitá funkce na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$, potom průměrná hodnota funkce u na kouli $B_a(r)$ konverguje k $u(a)$ pro $r \to 0+$, tj.

$$u(a) = \lim_{r \to 0+} \frac{1}{m(B_a(r))} \int_{B_a(r)} u(x) \mathrm{d}x,$$

neboť

$$\left| u(a) - \frac{1}{m(B_a(r))} \int_{B_a(r)} u(x) \mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{m(B_a(r))} \int_{B_a(r)} |u(a) - u(x)| \mathrm{d}x \leq \sup_{x \in B_r(a)} |u(a) - u(x)|,$$

kde pravá strana jde k nule s $r \to 0+$ díky spojitosti funkce u v a. Aplikujeme-li toto pozorování na funkci $\operatorname{div} F$, kde F je vektorové pole třídy C^1 na nějaké kouli $B_a(r)$, dostaneme

$$\operatorname{div} F(a) = \lim_{r \to 0+} \frac{3}{4\pi r^3} \int_{B_a(r)} \operatorname{div} F\, \mathrm{d}V,$$

protože $m(B_a(r)) = 4\pi r^3/3$ v $\mathbb{R}^3$. Potom z Gaussovy věty vyplývá vztah

$$\operatorname{div} F(a) = \lim_{r \to 0+} \frac{3}{4\pi r^3} \int_{S_a(r)} (F, n)\, \mathrm{d}S, \tag{84}$$

kde $S_a(r) := \partial B_a(r)$ a n jednotkový vnější normálový vektor ke sféře $S_a(r)$.

Integrál napravo v (84) představuje tok pole F sférou $S_a(r)$ zevnitř (z $B_a(r)$) směrem ven (do doplňku $B_a(r)$). Reprezentuje-li F tok nějaké tekutiny v prostoru, integrál napravo v (84) představuje množství tekutiny, které vyteče z $B_a(r)$, mínus množství tekutiny, která do $B_a(r)$ vtéká (za jednotku času). Tedy pokud $\operatorname{div} F(a) > 0$, znamená to, že pole z okolí a odtéká (např. v bodě a je nějaký zdroj, přítok, atp.), kdežto pokud $\operatorname{div} F(a) < 0$ pole do okolí a vtéká (např. v bodě a je výpusť). Tento jev je ovšem jemný, neboť integrál v (84) je třeba vydělit r^3, aby byl v limitě $r \to 0+$ nenulový. Každopádně vztah (84) ukazuje, že divergence je geometrická veličina nezávislá na volbě souřadnic.

Z mnoha užitečných důsledků Gaussovy uveďme alespoň tzv. *Greenovy identity.*

Důsledek 6.34 (Greenovy identity)**:** Nechť $R \subset \mathbb{R}^3$ splňuje předpoklady Gaussovy věty 6.33 a $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jsou třídy C^2 na otevřené množině $\Omega \supset R$, potom platí:

$$\int_{\partial R} f\, (\nabla g, n)\, \mathrm{d}S = \int_R [f \Delta g + (\nabla f, \nabla g)]\, \mathrm{d}V$$

a

$$\int_{\partial R} (f \nabla g - g \nabla f, n)\, \mathrm{d}S = \int_R (f \Delta g - g \Delta f)\, \mathrm{d}V.$$

Důkaz. Z identity 5) z Věty 6.32 plyne, že

$$\operatorname{div}(f\nabla g) = f\operatorname{div}\nabla g + (\nabla f, \nabla g) = f\Delta g + (\nabla f, \nabla g)\,,$$

a proto první Greenovu identitu dostaneme aplikací Gaussovy věty na $F := f\nabla g$. Tato identita platí také, prohodíme-li f a g. Odečtením obou variant první identity dostaneme druhou Greenovu identitu. □

Poznámka: Všimněte si, že $(\nabla f, n)$ je směrová derivace f v normálovém směru n, viz Věta 3.10, a proto se nazývá *vnější normálová derivace* f.

6.6 Stokesova věta

Dokážeme si ještě jednu integrální větu, která je zobecněním Greenovy věty 6.15 v tom smyslu, že rovinnou oblast v $\mathbb{R}^2$ nahrazuje zakřivenou plochou v $\mathbb{R}^3$. Nejprve si vymezíme plochy, pro které Stokesovu větu zformulujeme. Třída uvažovaných ploch není nejobecnější možná, ale pro potřeby většiny aplikací je dostačující. Obvyklý důkaz Stokesovy věty, která platí i pro obecnější třídu ploch než vymezuje Definice 6.18, využívá adaptace metody založené na rozkladu jedničky popsané v dodatcích.

Předpokládejme, že $S = S_1 \cup \cdots \cup S_k$ je parametrizovaná po částech C^1 plocha taková, že hranice každé části S_i v topologii S, ozn. ∂S_i, je po částech C^1 ve stejném smyslu jako v Greenově větě 6.15 (tj. je konečné sjednocení stop po částech C^1 Jordanových křivek). Budeme stručně psát ∂S_i a $\partial S := \partial S_1 \cup \cdots \cup \partial S_k$, kde nezdůrazňuje, že hranice jsou uvažovány v topologii S, což musíme mít na paměti (uvědomte si, že plocha S má prázdný vnitřek v topologii $\mathbb{R}^3$, tudíž v topologii $\mathbb{R}^3$ je $S \subset \partial S$).

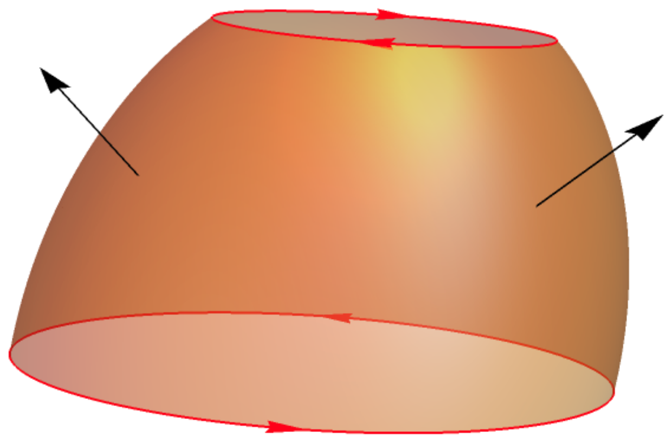
Dále předpokládejme, že každá část S_i je orientovatelná s orientací určenou daným spojitým polem n jednotkových normálových vektorů. Tato orientace na S_i indukuje tzv. *kompatibilní* orientaci na ∂S_i ve smyslu analogickém jako u Greenovy věty. Řečeno neformálně to znamená, že pokud kráčíte podél ∂S_i v pozitivním směru, máte kladnou stranu plochy S_i, tj. stranu S_i, z níž vektor n vychází, stále po *levé* ruce. Přesněji to lze vyjádřit tak, že tečný vektor T k ∂S_i v bodě $x \in S_i$ je v souladu s orientací na ∂S_i („míří kladným směrem“), pokud vektor $n \times T$ v bodě x *míří do* S_i, což znamená, že polokoule $B_x(\epsilon) \cap \{y \in \mathbb{R}^3 \mid (n \times T, y) > 0\}$ má neprázdný průnik s S_i pro každé $\epsilon > 0$, viz Obr. 23.

Věta 6.35 (Stokes)**:** Nechť S a ∂S splňují předpoklady popsané výše a $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je třídy C^1 na otevřené množině $\Omega \supset S$. Potom platí:

$$\int_{\partial S} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S (\operatorname{rot} F, n)\, \mathrm{d}S.$$

Důkaz. Podobně jako důkazy Vět 6.15 a 6.33 i důkaz Stokesovy věty provedeme za jistých dodatečných předpokladů, a tedy si ukážeme odvození jen jistého speciálnějšího tvrzení. Tento výsledek můžeme totiž poměrně jednoduše odvodit z Greenovy věty 6.15, musíme ovšem zajistit splnění jejích předpokladů.

Nechť $S^{\circ S} = \Phi(\Omega)$, kde parametrizace Φ je C^1 funkce na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a $\overline{\Omega}$ je kompaktní množina. Navíc předpokládejme, že Φ lze dodefinovat na nějakou otevřenou nadmnožinu $\overline{\Omega}$



Obrázek 23: Orientovaná plocha (černé šipky) a kompatibilní orientace na hraničních křivkách (červené šipky).

jako zobrazení třídy C^1 a $\Phi(\partial\Omega) = \partial S$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že parametrizace Φ určuje na S zadanou orientaci. V opačném případě bychom prohodily parametry, tzn. reparametrizovali plochu S tak, že bychom Φ nahradili $\Phi \circ \xi$, kde $\xi(u, v) = (v, u)$. Idea důkazu je nyní použít parametrizaci Φ k převedení integrace přes S a ∂S na integrace přes Ω a $\partial\Omega$ a aplikovat Greenovu větu.

Všimněte si, že napíšeme-li $F = F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3$, kde (e_1, e_2, e_3) je standardní báze $\mathbb{R}^3$, stačí Stokesovu větu dokázat zvlášť pro každé pole $F_i e_i$, kde $i \in \hat{3}$, a sečtením jednotlivých rovností dostaneme výslednou identitu pro F. Odvození je analogické pro všechny tři případy, a proto budeme dále uvažovat jen případ $F = F_1 e_1 = (F_1, 0, 0)$, pro který má Stokesova věta tvar

$$\int_{\partial S} F_1 e_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} e_2 - \frac{\partial F_1}{\partial y} e_3, n \right) \mathrm{d}S.$$

Použijeme-li parametrizaci $(x, y, z) = \Phi(u, v)$ plochy S, dostaneme pro pravou stranu

$$\begin{aligned} \int_S \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} e_2 - \frac{\partial F_1}{\partial y} e_3, n \right) \mathrm{d}S &= \int_\Omega \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \left(\Phi(u, v)\right) e_2 - \frac{\partial F_1}{\partial y} \left(\Phi(u, v)\right) e_3, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_\Omega \left[\frac{\partial F_1}{\partial z} \left(\Phi(u, v)\right) \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right| - \frac{\partial F_1}{\partial y} \left(\Phi(u, v)\right) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \right] \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{85}$$

Označíme-li $\phi : I \to \partial\Omega$ parametrizaci křivky $\partial\Omega$, najdeme pro levou stranu

$$\int_{\partial S} F_1 e_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_I F_1(\Phi(\phi(t))) \left[\frac{\partial x}{\partial u} \phi_1'(t) + \frac{\partial x}{\partial v} \phi_2'(t) \right] \mathrm{d}t = \int_{\partial\Omega} F_1(\Phi(u, v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

V posledním integrálu aplikujeme Greenovu větu a dostaneme

$$\int_{\partial\Omega} F_1 \circ \Phi(u,v) \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(F_1 \circ \Phi \frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(F_1 \circ \Phi \frac{\partial x}{\partial u}\right)\right] \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \quad (86)$$

Derivujeme-li výrazy v integrandu posledního integrálu jako součin, dva sčítance obsahující smíšené derivace $\partial^2 x/\partial u \partial v = \partial^2 x/\partial v \partial u$ se odečtou, a proto

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(F_1 \circ \Phi \frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(F_1 \circ \Phi \frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{\partial\,(F_1 \circ \Phi)}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial\,(F_1 \circ \Phi)}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

Dále aplikací řetězového pravidla zjistíme, že se pravá strana rovná

$$\left[\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right]\frac{\partial x}{\partial v} - \left[\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right]\frac{\partial x}{\partial u}$$
$$= \frac{\partial F_1}{\partial z}\left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right| - \frac{\partial F_1}{\partial y}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|.$$

(Všechny parciální derivace F_1 jsou vyhodnoceny v bodě $\Phi(u,v)$, nepíšeme to pro úsporu místa.) Zjišťujeme tedy, že se integrály (85) a (86) rovnají, což jsme chtěli dokázat.

Dále opět analogicky jako v důkazech Greenovy a Gaussovy věty, můžeme rozšířit platnost Stokesovy věty na plochy S, které lze rozložit na konečně mnoho částí parametrizovatelných výše popsaným způsobem. Důkaz Stokesovy věty pro obecnější třídu ploch využívá techniku rozkladu jedničky. □

Je užitečné si uvědomit, že jedna uzavřená křivka v $\mathbb{R}^3$ je hranicí nekonečně mnoha ploch v $\mathbb{R}^3$. Např. jednotková kružnice $C = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1 \wedge z = 0\}$ je hranicí např. jednotkového kruhu $S_1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 1 \wedge z = 0\}$, hemisféry $S_2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \wedge z \geq 0\}$, části paraboloidu $S_3 = \{(x,y,z) \mid z = 1-x^2-y^2 \leq 1 \wedge z \geq 0\}$, atd. Podle Stokesovy věty 6.35 platí rovnost

$$\int_C F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S \operatorname{rot} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

pro **jakoukoliv** orientovatelnou plochu S ohraničenou křivkou C a pole F třídy C^1 za předpokladu, že orientace na S a C jsou kompatibilní. To lze v některých případech vyžívat ke zjednodušení výpočtů, jak ilustruje následující příklad.

Příklad 6.36: Uvažujme část paraboloidu $S = \{(x,y,z) \mid z = 1-x^2-y^2 \leq 1 \wedge z \geq 0\}$ orientovaného normálou n mířící vně S (tj. $n_3 > 0$) a vektorové pole

$$F(x,y,z) = \left(e^{xz} + e^{x+2y}, \ln(2+y+z) + 2e^{x+2y}, 3xyz\right).$$

Spočítáme integrál $\int_S (\operatorname{rot} F, n)\,\mathrm{d}S$.

Přímý výpočet integrálu by byl komplikovaný. Podle Stokesovu věty je

$$\int_S (\operatorname{rot} F, n)\,\mathrm{d}S = \int_C F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s},$$

kde C je jednotková kružnice v rovině xy, což problém příliš nezjednoduší. Všimneme-li si ale, že 3. složka $\operatorname{rot} F$ je nulová, můžeme uvažovat jednotkový kruh $D = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 < 1\}$, jehož hranicí je také C a navíc jednotkový normálový vektor k D je $n = (0, 0, 1)$ v každém bodě D. Potom totiž $(\operatorname{rot} F, n) = 0$ a aplikujeme-li Stokesovu větu ještě jednou, zjistíme okamžitě, že

$$\int_S (\operatorname{rot} F, n)\,\mathrm{d}S = \int_C F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_D (\operatorname{rot} F, n)\,\mathrm{d}S = 0.$$

Podobně jako Gaussova věta umožňuje porozumět významu divergence, Stokesova věta nabízí interpretaci rotace a navíc její geometrickou charakterizaci nezávislou na volbě souřadnic. Buď F vektorové pole třídy C^1 na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^3$. Komponentu pole $\operatorname{rot} F$ určeného zvoleným jednotkovým vektorem n v $\mathbb{R}^3$, tj. $(\operatorname{rot} F, n)$, můžeme vyjádřit následovně. Buď $D_a(r)$ kruh se středem v a o poloměru $r > 0$ v prostoru $\mathbb{R}^3$ orientován tak, že n je jeho normálový vektor, tj. kruh $D_a(r)$ je kolmý na n. Snadno se ověří, že

$$(\operatorname{rot} F(a), n) = \lim_{r \to 0+} \frac{1}{\pi r^2} \int_{D_a(r)} (\operatorname{rot} F, n)\,\mathrm{d}S,$$

tedy průměr $(\operatorname{rot} F, n)$ na kruhu $D_a(r)$ konverguje k hodnotě $(\operatorname{rot} F, n)$ v bodě a pro $r \to 0+$. Aplikací Stokesovy věty zjistíme, že

$$(\operatorname{rot} F(a), n) = \lim_{r \to 0+} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_a(r)} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{87}$$

kde $C_a(r)$ je kružnice se středem v a a poloměrem r v rovině s normálou n orientovaná proti směru hodinových ručiček viděno z poloprostoru, do něhož vektor n míří (nakreslete si obrázek).

Vztah (87) určuje vektor $\operatorname{rot} F(a)$ nezávisle na souřadnicích. Budeme-li F interpretovat jako silové pole, představuje křivkový integrál v limitě (87) celkovou práci, kterou pole F vykoná, aby částice oběhla po kružnici $C_a(r)$. Tedy číslo $(\operatorname{rot} F(a), n)$ vyjadřuje tendenci silového pole F působit na částici, tak že rotuje kolem a v rovině s normálovým vektorem n proti směru hodinových ručiček, pokud $(\operatorname{rot} F(a), n) > 0$, a po směru hodinových ručiček, pokud $(\operatorname{rot} F(a), n) < 0$ (viděno opět z poloprostoru, do něhož z a míří vektor n). Je-li $\operatorname{rot} F(a) = 0$, nenutí pole částici v okolí bodu a rotovat. Proto se pole F nazývá ***nevírové*** (*irrotational*) v Ω, je-li $\operatorname{rot} F = 0$ na Ω.

6.7 Konzervativní pole a Poincarého lemma*

„Nepřednáší se … snad někdy v budoucnu dopíšu.“

6.8 Cvičení

Cvičení 6.1: Dokažte, že délku elipsy ϕ určené rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

s poloosami $a > b > 0$ lze pomocí úplného eliptického integrálu 2. druhu (75), vyjádřit ve tvaru

$$\ell(\phi) = 4aE(k),$$

kde

$$k = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

je tzv. *excentricita* elipsy.

Cvičení 6.2: Spočítejte

$$\int_{\partial S} (-x^2 y, xy^2) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s},$$

kde S je mezikruží $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, dvěma způsoby: z definice a pomocí Greenovy věty.

Cvičení 6.3: Najděte pozitivně orientovanou Jordanovu křivku ϕ tak, aby hodnota integrálu

$$\int_{\phi} (3x - x^3, y^3) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

byla maximální.

Cvičení 6.4: Pomocí Greenovy věty spočítejte plochu pod jedním obloukem cykloidy, viz Příklad 6.4.

Cvičení 6.5 (Pappova věta)**:** Dokažte, že obsah plochy S, která vznikne rotací jednoduché po částech C^1 rovinné křivky kolem nějaké osy v $\mathbb{R}^3$, splňuje vztah

$$A(S) = 2\pi \ell d,$$

kde ℓ je délka rotované křivky a d vzdálenost jejího těžiště od osy rotace.

Cvičení 6.6: Určete obsah:

a) úseku elipsoidu

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ \wedge \ 0 \leq h_1 \leq z \leq h_2 \leq c \right\},$$

b) úseku jednodílného hyperboloidu

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \ \wedge \ 0 \leq h_1 \leq z \leq h_2 \right\},$$

c) úseku dvoudílného hyperboloidu

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \ \wedge \ c \le h_1 \le z \le h_2 \right\}.$$

Cvičení 6.7: Dokažte identity z Věty 6.32.

Cvičení 6.8: Ověřte, že pro libovolné $f : \Omega \to \mathbb{R}$ a $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ třídy C^2 na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ platí:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 \quad \text{a} \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0.$$

Cvičení 6.9: Dokažte, že pro vektorovou funkci $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ třídy C^2 na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ platí:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} F - \operatorname{rot} \operatorname{rot} F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3).$$

Cvičení 6.10: Nechť $R \subset \mathbb{R}^3$ je kompaktní množina, jejíž hranice ∂R je parametrizovaná po částech C^1 plocha orientovaná vnější jednotkovou normálou n. Dokažte, že pro objem R platí:

$$m(R) = \frac{1}{3} \int_{\partial R} (F, n) \, \mathrm{d}S,$$

kde $F(x,y,z) = (x,y,z)$. Existuje i jiné pole F, pro které to platí?

Cvičení 6.11: Nechť $R \subset \mathbb{R}^3$ je jako v předešlém cvičení a f a g funkce třídy C^1. Ukažte, že platí následující varianta integrace *per partes* v $\mathbb{R}^3$:

$$\int_R f \frac{\partial g}{\partial x} \, \mathrm{d}V = \int_{\partial R} f g \, n_1 \, \mathrm{d}S - \int_R g \frac{\partial f}{\partial x} \, \mathrm{d}V,$$

kde n_1 je první komponenta normálového vektoru $n = (n_1, n_2, n_3)$. Samozřejmě platí i analogické varianty vzorce s parciálními derivacemi podle y a z.


I'll never be able to finish this!
MÖBIUS STRIP STEAK

7 Dodatky

7.1 Gama a Beta funkce

Walter Rudin začíná svou knihu [23] tvrzením, že funkce $z \mapsto \exp(z)$ je nejdůležitější funkce v matematice. Podobně by se dalo tvrdit, že Gama funkce $z \mapsto \Gamma(z)$ je nejdůležitější funkce z tzv. vyšších transcendentních funkcí [9]. Jak funkce Gama, tak i s ní úzce související funkce Beta, jsou funkce definované jako parametrické integrály - tzv. *Eulerovy integrály*.

Definice 7.1 (Gama a Beta funkce)**:** Funkci definovanou vztahem

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t \tag{88}$$

pro $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$ nazýváme *Gama funkce*. Dále funkci

$$B(u,v) := \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} \mathrm{d}t \tag{89}$$

definovanou pro $u, v \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} u > 0$ a $\operatorname{Re} v > 0$ nazýváme *Beta funkce*.

Požadavek, aby argumenty z, u, v z definice Gama a Beta funkce měly pozitivní reálné části, zaručuje integrabilitu funkcí v integrálech (88) a (89) na příslušných intervalech. Např. v případě Gama funkce máme

$$\left|t^{z-1} e^{-t}\right| = t^{\operatorname{Re} z - 1} e^{-t}$$

a funkce vpravo má konečný integrál na $(0, \infty)$, právě když $\operatorname{Re} z > 0$. Přesněji tuto podmínku vyžaduje integrabilita funkce na pravé okolí nuly. Na okolí bodu ∞ je funkce integrabilní pro každé $z \in \mathbb{C}$ díky členu e^{-t} (promyslete). Podobně dostaneme omezení pro argumenty u a v funkce Beta (ověřte).

Pro naše účely bude stačit v dalším výkladu uvažovat jen reálné (tedy pozitivní) argumenty funkcí Gama a Beta. Všimněte si, že přímo z definic (88) a (89) plyne, že $\Gamma(x) > 0$ a $B(x,y) > 0$ pro každé $x, y > 0$. Nejprve shrneme základní identity.

Věta 7.2:

1. Pro každé $x > 0$ platí:
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$
2. Pro každé $x, y > 0$ platí:
$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$
3. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí:
$$\Gamma(n+1) = n!.$$
4. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí:
$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}.$$
Speciálně $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Důkaz. 1. Pro $x > 0$ dostaneme integrací per partes:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} \mathrm{d}t = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^\infty + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

2. Buďte $x, y > 0$. V integrálu

$$\Gamma(x+y) = \int_0^\infty t^{x+y-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

provedeme substituci $t = (1+r)s$, kde $r > 0$ je fixní parametr, a dostaneme

$$\Gamma(x+y) = (1+r)^{x+y} \int_0^\infty s^{x+y-1} e^{-(1+r)s} \mathrm{d}s.$$

Obě strany poslední rovnosti vynásobíme $r^{x-1}/(1+r)^{x+y}$ a integrujeme podle r od 0 do ∞. Tak dojdeme k rovnosti:

$$\Gamma(x+y) \int_0^\infty \frac{r^{x-1}}{(1+r)^{x+y}} \mathrm{d}r = \int_0^\infty r^{x-1} \int_0^\infty s^{x+y-1} e^{-s-rs} \mathrm{d}s \, \mathrm{d}r.$$

Integrand vpravo je kladná měřitelná funkce, a proto můžeme podle Tonelliho věty zaměnit pořadí integrace. Potom

$$\Gamma(x+y) \int_0^\infty \frac{r^{x-1}}{(1+r)^{x+y}} \mathrm{d}r = \int_0^\infty s^{x+y-1} e^{-s} \int_0^\infty r^{x-1} e^{-rs} \mathrm{d}r \, \mathrm{d}s.$$

Jelikož je vnitřní integrál

$$\int_0^\infty r^{x-1} e^{-rs} \mathrm{d}r = s^{-x} \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t = s^{-x} \Gamma(x),$$

máme

$$\Gamma(x+y) \int_0^\infty \frac{r^{x-1}}{(1+r)^{x+y}} \mathrm{d}r = \Gamma(x) \int_0^\infty s^{y-1} e^{-s} \mathrm{d}s = \Gamma(x)\Gamma(y).$$

Nakonec všimneme-li si, že

$$\int_0^\infty \frac{r^{x-1}}{(1+r)^{x+y}} \mathrm{d}r = \int_0^\infty \left(\frac{r}{1+r}\right)^{x-1} \left(1 - \frac{r}{1+r}\right)^{y-1} \frac{\mathrm{d}r}{(1+r)^2},$$

dostaneme po substituci $t = r/(1+r)$ rovnost

$$\int_0^\infty \frac{r^{x-1}}{(1+r)^{x+y}} \mathrm{d}r = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \mathrm{d}t = B(x,y).$$

Celkem tedy máme

$$\Gamma(x+y) B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y),$$

odkud plyne dokazovaná identita.

3. Přímým výpočtem z definice spočítáme, že $\Gamma(1) = 1$. Potom rovnost $\Gamma(n+1) = n!$ pro $n \in \mathbb{N}$ dostaneme matematickou indukcí s využitím již dokázaného 1. tvrzení.

4. Podobně jako v bodu 3. stačí ukázat, že $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Zbytek je potom opět přímý důsledek identity z 1. tvrzení (ověřte). Položíme-li v identitě z 2. tvrzení $x = y = 1/2$, dostaneme

$$\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

Provedeme-li v posledním integrálu substituci $t = \sin^2\theta$, zjistíme, že

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \int_0^{\pi/2} 2\mathrm{d}\theta = \pi,$$

a tudíž $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. □

Poznámka: 1. Z 2. tvrzení Věty 7.2 plyne symetrie $B(x,y) = B(y,x)$ pro $x, y > 0$.
2. Díky vztahu $\Gamma(n+1) = n!$ pro $n \in \mathbb{N}_0$ lze použít Gama funkci k definování faktoriálu čísla, které není přirozené. Někteří autoři skutečně píšou $x!$ pro $x > -1$ ve smyslu $x! := \Gamma(x+1)$. Podle této logiky je potom například $(-1/2)! = \sqrt{\pi}$. My zde ale značení $x!$ nebudeme používat.
3. Vztah $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ lze použít k dodefinování funkce Gama pro $x < 0$. Např. je-li $x \in (-1, 0)$, položíme

$$\Gamma(x) := \frac{\Gamma(x+1)}{x},$$

neboť pravá strana má dobrý smysl. Podobně můžeme postupovat pro libovolné neceločíselné $x < 0$ a dostaneme funkci Γ definovanou na množině $\mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}_0)$. Graf této funkce je na Obrázku 24.
4. Identity z 1. a 2. tvrzení Věty 7.2 platí i pro komplexní argumenty x a y s kladnou reálnou částí. Dále se v komplexní analýze speciálních funkcí ukazuje, že funkci Γ lze rozšířit jako analytickou funkci až na množinu $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$. Body množiny $-\mathbb{N}_0$ jsou tzv. jednoduché póly Γ. Podobně je funkce B analytickou funkcí obou svých argumentů na $(\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0))^2$.

Příklad 7.3: Identity z Věty 7.2 lze s výhodou použít při výpočtu integrálů tvaru

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m(\theta)\cos^n(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Provedeme-li totiž v integrálu (89) z definice funkce Beta substituci $t = \sin^2\theta$, dostaneme

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2y-1}(\theta)\mathrm{d}\theta$$

pro libovolné $x, y > 0$. Odtud plyne, že

$$\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha(\theta)\cos^\beta(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right)$$

pro každé $\alpha, \beta > -1$. Pokud je tedy např. $\alpha = 2m + 1$ a $\beta = 2n$ pro $m, n \in \mathbb{N}_0$, máme

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1}(\theta)\cos^{2n}(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}B\left(m+1, n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1/2)}{2\Gamma(m+n+3/2)}$$
$$= 2^{2m+1}\frac{m!(2n)!(m+n+1)!}{n!(2m+2n+2)!}$$

a podobně pro další varianty parity exponentů α a β (jsou-li celočíselné).

Dále dokážeme identitu známou jako *Eulerův vzorec* pro funkci Γ (*Euler reflection formula*). Klasické důkazy této rovnosti nejsou elementární, využívají např. Reziduovou větu z teorie komplexních funkcí nebo vyjádření Gama funkce ve tvaru nekonečného součinu (Weierstrassova věta z teorie celých funkcí). Jeden důkaz prostředky reálné analýzy našel R. Dedekind, žák C. F. Gausse, ve své dizertační práci, viz [7]. My si ukážeme důkaz, který využívá tzv. Mittag-Lefflerova rozvoje funkce $z \mapsto \sin^{-1}(\pi z)$ a který lze odvodit z Fourierovy řady funkce $f(x) = \cos(\alpha x)$ na $(-\pi, \pi)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Obvyklým postupem a s využitím Věty 1.64 dokážeme, že

$$\cos(\alpha x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)}\cos(nx)$$

pro každé $x \in [-\pi, \pi]$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Položíme-li $x = 0$ a $z := \alpha$, dostaneme

$$1 = \frac{\sin(z\pi)}{z\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z\sin(z\pi)}{\pi(z^2 - n^2)},$$

z čehož plyne

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right), \tag{90}$$

kde $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Dá se ukázat, že rovnost (90) platí dokonce pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Věta 7.4 (Euler)**:** Pro každé $x \in (0, 1)$ platí:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Důkaz. Ukážeme, že

$$B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

pro všechna $x \in (0, 1)$. Tvrzení pak plyne ihned z Věty 7.2.

Nejprve si upravíme integrální vyjádření funkce Beta. Pro $x, y > 0$ máme

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}\mathrm{d}s,$$

kde jsme provedli substituci $t = s/(1+s)$. Poslední integrál napíšeme jako součet integrálu od 0 do 1 a od 1 do ∞ a ve druhém integrálu provedeme substituci $s = 1/\tilde{s}$ (vlnku vzápětí nebudeme psát). Tak dostaneme rovnost

$$B(x,y) = \int_0^1 \frac{s^{x-1} + s^{y-1}}{(1+s)^{x+y}} \mathrm{d}s$$

pro $x, y > 0$.

Odtud pro $x \in (0,1)$ máme

$$B(x, 1-x) = \int_0^1 \frac{s^{x-1}}{1+s} \mathrm{d}s + \int_0^1 \frac{s^{-x}}{1+s} \mathrm{d}s = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^{n+x-1} \mathrm{d}s + \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^{n-x} \mathrm{d}s.$$

Dále prohodíme pořadí integrálů a sum, což je krok, který ospravedlníme na konci důkazu, a po integraci dostane

$$B(x, 1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right).$$

Nyní stačí aplikovat vzorec (90).

K dokončení důkazu zbývá ospravedlnit záměnu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n s^{\alpha+n} \mathrm{d}s = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^{\alpha+n} \mathrm{d}s$$

pro libovolné $\alpha \in (-1, 0)$. K tomu stačí ospravedlnit záměnu integrálu a limity v poslední rovnosti úpravy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n s^{\alpha+n} \mathrm{d}s = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k s^{\alpha+k} \mathrm{d}s = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 s^{\alpha} \frac{1+s^{n+1}}{1+s} \mathrm{d}s = \int_0^1 \frac{s^{\alpha}}{1+s} \mathrm{d}s,$$

což umožňuje Lebesgueova Věta 5.43, neboť pro každé $s \in (0,1)$ a $n \in \mathbb{N}$ je

$$\left| s^{\alpha} \frac{1+s^{n+1}}{1+s} \right| \leq \frac{2s^{\alpha}}{1+s} \leq 2s^{\alpha}$$

a majoranta vpravo je integrabilní funkce na $(0,1)$ pro každé $\alpha > -1$. $\square$

Na závěr prozkoumáme vybrané analytické vlastnosti funkce Γ na $(0, \infty)$, viz též graf na Obrázku 24.

Věta 7.5: Funkce Γ je hladká a ryze konvexní na $(0, \infty)$. Dále platí:

$$\lim_{x \to 0+} \Gamma(x) = \lim_{x \to \infty} \Gamma(x) = \infty.$$

Důkaz. Nejprve ověříme, že $\Gamma \in C^\infty((0,\infty))$. Důkaz jen naznačíme, detaily jsou přenechány čtenáři. Matematickou indukcí ověříme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\Gamma \in C^{(n)}((0,\infty))$ a pro n-tou derivaci Γ platí:

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

pro každé $x > 0$. Pro indukční krok je třeba ospravedlnit záměnu derivace podle x a integrálu, kterou zajistí Věta 5.48. Pro její aplikaci je nezbytné najít pro libovolnou volbu intervalu $(a,b) \subset (0,\infty)$ integrabilní majorantu $g \in L((0,\infty), m)$ nezávislou na x a takovou, že $|(\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}| \le g(t)$ pro všechna $t \in (0,\infty)$ a $x \in (a,b)$. K tomu si stačí uvědomit, že

$$\left|(\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}\right| \le \begin{cases} |\ln t|^n \, t^{a-1} e^{-t} \in L((0,1), m), & \text{je-li } t \in (0,1), \\ |\ln t|^n \, t^{b-1} e^{-t} \in L((1,\infty), m), & \text{je-li } t \in [1,\infty). \end{cases}$$

V iniciačním kroku $n = 0$ stačí ověřit spojitost Γ na $(0,\infty)$, která plyne z Věty 5.47.

Funkce Γ je ryze konvexní na $(0,\infty)$, protože pro každé $x > 0$ je

$$\Gamma''(x) = \int_0^\infty (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t > 0,$$

neboť integrand je pozitivní funkce na $(0,\infty)$.

Dále ze spojitosti Γ a Věty 7.2 plyne, že

$$\lim_{x\to 0+} x\Gamma(x) = \lim_{x\to 0+} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1.$$

Tedy funkce Γ se na pravém okolí nuly chová stejně jako $1/x$, speciálně $\lim_{x\to 0+} \Gamma(x) = \infty$.

Všimněte si, že pro každé $x > 0$ máme

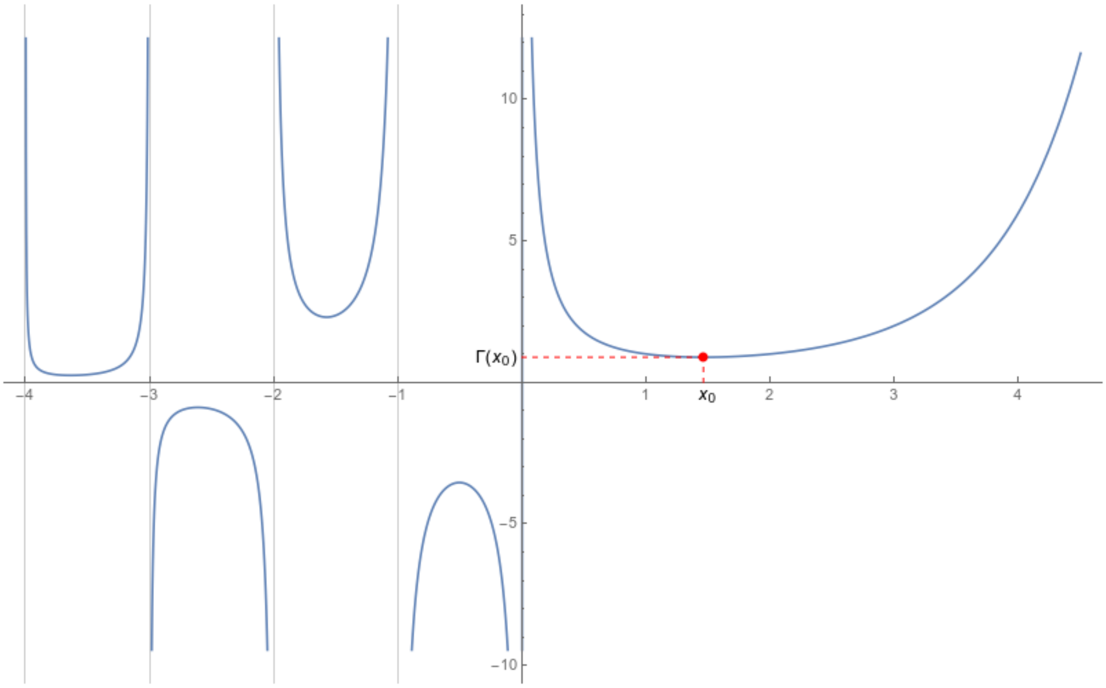
$$\Gamma(x) \ge \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t. \tag{91}$$

Pro libovolnou posloupnost bodů $1 \le x_n \le x_{n+1}$ takovou, že $x_n \to \infty$ je $\{t^{x_n - 1} e^{-t}\}_{n=1}^\infty$ rostoucí posloupnost nezáporných integrabilních funkcí na $(1,\infty)$, a proto podle Věty 5.23 o monotónní konvergenci je

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty t^{x_n - 1} e^{-t} \mathrm{d}t = \int_1^\infty \infty \, \mathrm{d}x = \infty.$$

Tudíž z nerovnosti (91) vyplývá, že také $\Gamma(x_n) \to \infty$ a podle Heineho věty nakonec $\Gamma(x) \to \infty$ pro $x \to \infty$. $\square$

Z Věty 7.5 vyplývá, že Γ má na $(0,\infty)$ jedno globální minimum. Tento bod minima $x_0 > 0$ je jediné řešení rovnice $\Gamma'(x) = 0$ na $(0,\infty)$, kterou není možné vyřešit explicitně. Z Věty o přírůstku plyne, že $x_0 \in (1,2)$, protože $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Numericky lze minimum přibližně lokalizovat: $x_0 \approx 1,46163$ a $\Gamma(x_0) \approx 0,8856$, viz Obrázek 24.



Obrázek 24: Graf funkce Γ na $\mathbb{R}$.

Poznámka: Mnohem přesnější informaci o chování funkce Γ pro $x \to \infty$ dává tzv. *Stirlingův vzorec*:

$$\Gamma(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left(\frac{x}{e}\right)^x [1 + \varepsilon(x)] ,$$

kde $\varepsilon(x) \to 0$ pro $x \to \infty$ (dokonce $\lim_{x\to\infty} x\varepsilon(x) = 1/12$). Protože $\Gamma(n + 1) = n!$, dostáváme speciálně asymptotický rozvoj pro faktoriál:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n [1 + \varepsilon(n)] ,$$

kde $\varepsilon(n) \to 0$ pro $n \to \infty$. Důkaz Stirlingova vzorce je nad rámec tohoto kurzu. Jeden možný způsob odvození Stirlingova vzorce používá tzv. Laplaceovu metodu, viz [20].

Cvičení 7.1: Dokažte, že

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

(Hint: Nejprve ověřte konvergence integrálu s pomocí rovnosti $\lim_{x\to 0+} x\Gamma(x) = 1$. Potom ukažte, že $\int_0^1 \ln\left(\Gamma(x)\Gamma(1-x)\right) \mathrm{d}x = 2\int_0^1 \ln \Gamma(x) \mathrm{d}x$ a použijte Větu 7.4.)

Cvičení 7.2: Pro $x > 0$ dokažte vzorec pro dvojnásobný argument:

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

(Hint: Nejprve dokažte, že $B(x, x) = 2^{1-2x} B(x, 1/2)$, a potom aplikujte Větu 7.2.)

Cvičení 7.3: Dokažte, že

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{G} \quad \text{a} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos x}} = \pi G,$$

kde

$$G = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2.$$

Číslo $G = 0.8346268\ldots$ je známé jako *Gaussova konstanta* a je to transcendentní iracionální číslo.

7.2 Integrace ve sférických souřadnicích

XXX

7.3 Greenova a Gaussova věta

Cílem tohoto dodatku je důkaz Greenovy a Gaussovy věty pro obecnější třídu množin než ty, na jaké jsme se pro jednoduchost omezili v důkazech Vět 6.15 a 6.33. K tomuto účelu zkonstruujeme tzv. *rozklad jedničky*, což je užitečný koncept, který se objevuje na mnoha místech pokročilé analýzy.

Lemma 7.6: Nechť $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ je n-interval v $\mathbb{R}^n$. Potom existuje $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ taková, že

$$(\forall x \in I^\circ)(f(x) > 0) \quad \text{a} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus I^\circ)(f(x) = 0).$$

Důkaz. Hladkou funkci f s popsanou vlastností explicitně definujeme. Je-li $n = 1$, tj. $I = [a, b]$, můžeme f zvolit jako

$$f_a^b(x) := \begin{cases} e^{1/(x-a)(x-b)}, & \text{pro } a < x < b, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Ověření hladkosti f_a^b se provede analogicky jako v Příkladu 1.50. Nyní pro obecné $n \in \mathbb{N}$ stačí položit

$$f(x) := \prod_{i=1}^{n} f_{a_i}^{b_i}(x_i)$$

pro každé $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. □

Definice 7.7 (Nosič funkce)**:** *Nosič funkce* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je množina

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Tedy $\operatorname{supp} f$ je nejmenší uzavřená množina, na jejímž doplňku je f nulová.

Věta 7.8: Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina a $\{U_j\}_{j=1}^J \subset \mathbb{R}^n$ otevřené neprázdné množiny takové, že $K \subset \cup_{j=1}^J U_j$. Potom existují funkce $\{\psi_m\}_{m=1}^M \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tak, že platí:

1. $(\forall m \in \hat{M})\big(\exists j \in \hat{J}\big)$ $(\operatorname{supp}\psi_m \subset U_j$ a $\operatorname{supp}\psi_m$ je kompaktní$)$,
2. $(\forall x \in K)\big(\sum_{m=1}^M \psi_m(x) = 1\big)$.

Poznámka: Kolekce funkcí $\{\psi_m\}_{m=1}^M$ z Věty 7.8 se nazývá *rozklad jedničky na K podřízený pokrytí* $\{U_j\}_{j=1}^J$.

Důkaz Věty 7.8. Kompaktní množina K je omezená, a proto existuje n-interval $I_0 := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ tak, že $K \subset I_0$. Půlením jednotlivých intervalů můžeme I_0 rozložit na 2^n n-intervalů, označme si množinu těchto intervalů $\mathcal{I}_1$. Opakováním téhož postupu na každém n-intervalu z $\mathcal{I}_1$ vytvoříme systém 2^{2n} n-intervalů, který označíme $\mathcal{I}_2$, atd. Tímto postupem můžeme rozložit I_0 na 2^{kn} n-intervalů, které vytvoří systém $\mathcal{I}_k$. Strany n-intervalu z $\mathcal{I}_k$ mají délku rovnu 2^{-k}-násobku délky příslušné strany I_0.

Jako první použijeme následující pomocný výsledek.

Lemma 7.9: Existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že každý n-interval z $\mathcal{I}_k$, který má neprázdný průnik s K, je obsažen v nějaké z množin $\{U_j\}_{j=1}^J$, neboli platí:

$$(\exists k \in \mathbb{N})(\forall I \in \mathcal{I}_k)\Big(I \cap K \neq \emptyset \;\Rightarrow\; (\exists j \in \hat{J})(I \subset U_j)\Big).$$

Důkaz Lemma 7.9. Pro spor předpokládejme, že

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists I_k \in \mathcal{I}_k)\Big(I_k \cap K \neq \emptyset \;\wedge\; (\forall j \in \hat{J})(I_k \not\subset U_j)\Big).$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ zvolme $x_k \in I_k \cap K$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ konvergentní, jinak bychom přešli k podposloupnosti. Konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ existuje díky kompaktnosti K. Označme si $x := \lim_{k\to\infty} x_k$. Prvek $x \in K$, a proto $(\exists j_0 \in \hat{J})(x \in U_{j_0})$. Protože je U_{j_0} otevřená, $(\exists \epsilon > 0)(B_x(\epsilon) \subset U_{j_0})$. Zvolme $k \in \mathbb{N}$ dostatečně velké tak, aby platilo

$$\|x_k - x\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{a} \quad \frac{1}{2^k}\sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Druhá podmínka implikuje, že vzdálenost libovolných dvou bodů z I_k je menší než $\epsilon/2$. Potom pro libovolné $y \in I_k$ platí:

$$\|y - x\| \leq \|y - x_k\| + \|x_k - x\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

neboli $I_k \subset B_x(\epsilon) \subset U_{j_0}$, což je spor. $\square$

Dál budeme pokračovat v důkazu Věty 7.8. Označme $\mathcal{I} := \mathcal{I}_k$ systém n-intervalů, kde $k \in \mathbb{N}$ je dostatečně velké tak, aby platilo tvrzení Lemma 7.9. Dále označme $I_1, \ldots, I_M$ ty n-intervaly z $\mathcal{I}$, které mají neprázdný průnik s K a $I_{M+1}, \ldots, I_N$ ty n-intervaly z $\mathcal{I}$, které mají neprázdný průnik s některým z $I_1, \ldots, I_M$. Tedy $\cup_{m=1}^M I_m$ je kompaktní množina obsahující K a $\cup_{m=1}^N I_m$ vznikne přidáním další vrstvy n-intervalů podél hranice množiny $\cup_{m=1}^M I_m$.

Podle Lemma 7.9 je

$$(\forall m \in \hat{M})(\exists j(m) \in \hat{J})(I_m \subset U_{j(m)}).$$

Označme si vzdálenost $c_m := d(I_m, U_{j(m)}^c)$ pro každé $m \in \hat{M}$. Pro $m \in \{M+1, \ldots, N\}$ ozn. $c_m := d(I_m, K)$. Jelikož jsou v definici c_m vždy dvě uzavřené disjunktní množiny, je $c_m > 0$ pro každé $m \in \hat{N}$, viz Lemma 2.54. Označme si ještě $\eta > 0$ je délku nejkratší strany ze všech intervalů z $\mathcal{I}$ a položme

$$\delta := \frac{1}{2\sqrt{n}} \min\left(c_1, \ldots, c_N, \eta\right).$$

Nakonec ještě definujeme n-intervaly $\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{I}_N$, které vzniknou z $I_1, \ldots, I_N$ zvětšením každé strany o δ (v obou směrech). Tedy je-li $I_m = [c_1, d_1] \times \cdots \times [c_n, d_n]$, potom je $\tilde{I}_m = [c_1 - \delta, d_1 + \delta] \times \cdots \times [c_n - \delta, d_n + \delta]$. Tyto „přifouknuté“ n-intervaly $\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{I}_N$ mají následující vlastnosti:

i) Jelikož $\delta < \eta/2$, je pro $m \in \hat{M}$ každý bod z $\tilde{I}_m$ vnitřním bodem právě jedné množiny $\tilde{I}_\ell$. (Zde jde zejména o body z hranice množiny $\tilde{I}_m$; může se stát, že $\ell > M$.)

ii) Je-li $x \in \tilde{I}_m$, potom existuje $y \in I_m$ tak, že pro každé $j \in \hat{n}$ je $|x_j - y_j| \leq \delta$, a proto $\|x - y\| \leq \delta\sqrt{n}$. Protože $\delta\sqrt{n} < c_m$, platí:

$$(\forall m \in \hat{M})(\tilde{I}_m \subset U_{j(m)}) \quad \text{a} \quad (\forall m \in \{M+1, \ldots, N\})(\tilde{I}_m \cap K = \emptyset).$$

Nyní pro každé $m \in \hat{N}$ zvolme $f_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ takové, že $f_m > 0$ na $\tilde{I}_m^\circ$ a $f_m = 0$ na $(\tilde{I}_m^\circ)^c$, jejichž existenci zaručuje Lemma 7.6. Pro $m \in \hat{M}$ definujme

$$\psi_m := \begin{cases} \frac{f_m}{\sum_{\ell=1}^N f_\ell}, & \text{na } \tilde{I}_m, \\ 0, & \text{na } \tilde{I}_m^c. \end{cases}$$

Díky vlastnosti (i) je jmenovatel $\sum_{\ell=1}^N f_\ell$ pozitivní na $\tilde{I}_m$. Tudíž $\psi_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dále $\operatorname{supp} \psi_m = \operatorname{supp} f_m = \tilde{I}_m \subset U_{j(m)}$, kde jsme využili vlastnost (ii).

Zbývá dokázat 2. tvrzení věty. Z vlastnosti (ii) plyne, že pro každé $m \in \{M+1, \ldots, N\}$ je $f_m = 0$ na K. Tudíž pro libovolné $x \in K$ platí:

$$\sum_{m=1}^M \psi_m(x) = \frac{\sum_{m=1}^M f_m(x)}{\sum_{\ell=1}^N f_\ell(x)} = \frac{\sum_{m=1}^M f_m(x)}{\sum_{\ell=1}^M f_\ell(x)} = 1.$$

□

Nyní si již můžeme dokázat Greenovu větu pro kompaktní podmnožiny $\mathbb{R}^2$, jejichž hranici tvoří stopy Jordanových C^1 křivek. Věta platí i pro obecnější případ, kdy hranici tvoří stopy *po částech* C^1 křivek, což znamená v konečně mnoha bodech hranice mohou být „rohy“ nebo „špičky“. Toto zobecnění již ale v tomto textu dokazovat nebudeme.

Věta 7.10 (Green)**:** Nechť $S \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktní množina, jejíž hranice je konečným sjednocením stop kladně orientovaných Jordanových křivek třídy C^1. Dále nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, $S \subset \Omega$ a $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ třídy C^1 na Ω. Potom platí:

$$\int_{\partial S} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Výchozím bodem důkazu je Greenova věta pro jednoduchou množinu S, kterou jsme dokázali ve Větě 6.15 (ve skutečnosti nám stačí speciální případ množin S, které jsou obdélníky, t.j. 2-intervaly). Na rozdíl od metody důkazu Věty 6.15, kde jsme *rozkládali množinu* S na jednodušší části, je hlavní myšlenkou tohoto důkazu *rozložit integrovanou funkci* na jednodušší části pomocí rozkladu jednotky a aplikovat Větu o substituci.

Zvolme libovolné $x \in \partial S$. Bod x leží na stopě nějaké C^1 křivky ϕ, která má všude nenulovou derivaci, což plyne z předpokladu orientovatelnosti hranice. Z Věty 3.59 o implicitní funkci, viz také Cvičení 3.19, vyplývá, že existuje otevřený kruh $B_x \subset \mathbb{R}^2$ tak, že množina $\partial S \cap B_x$ je grafem C^1 funkce, a to buď $y = f(x)$ nebo $x = g(y)$. Jelikož je ∂S kompaktní, neboť je omezená a uzavřená, existuje konečně mnoho těchto otevřených kruhů, ozn. $B_1, \ldots, B_J$, které pokrývají ∂S. Tudíž množiny $B_1, \ldots B_J$ a S° tvoří otevřené pokrytí S.

Podle Věty 7.8 můžeme zvolit rozklad jednotky $\{\psi_m\}_{m=1}^M$ na S podřízený otevřenému pokrytí $B_1, \ldots, B_J, S^\circ$. Potom na S platí:

$$F_i = \sum_{m=1}^{M} \psi_m F_i, \quad i \in \{1, 2\},$$

a funkce $\psi_m F_1$ a $\psi_m F_2$ jsou stále třídy C^1 pro každé $m \in \hat{M}$. Větu tedy stačí dokázat pro funkce $\psi_m F_1$ a $\psi_m F_2$ namísto původních F_1 a F_2. To znamená, že větu stačí dokázat pro C^1 funkce F_1 a F_2 takové, že

$$\begin{aligned} \text{buď} \quad & \text{a)} \ \operatorname{supp} F_1, \operatorname{supp} F_2 \subset S^\circ, \\ \text{nebo} \quad & \text{b)} \ (\exists j \in \hat{J})(\operatorname{supp} F_1, \operatorname{supp} F_2 \subset B_j). \end{aligned}$$

Případ (a) vyřídíme jednoduše, neboť $F_1 = F_2 = 0$ na ∂S, a proto je také $\int_{\partial S} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$. Funkce F_1 a F_2 zůstanou třídy C^1 dodefinujeme-li je nulou na libovolný 2-interval $R \supset S$. Potom aplikací Greenovy věty na obdélník R dostaneme

$$\int_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial R} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0.$$

Tedy Greenova věta je dokázána pro případ (a).

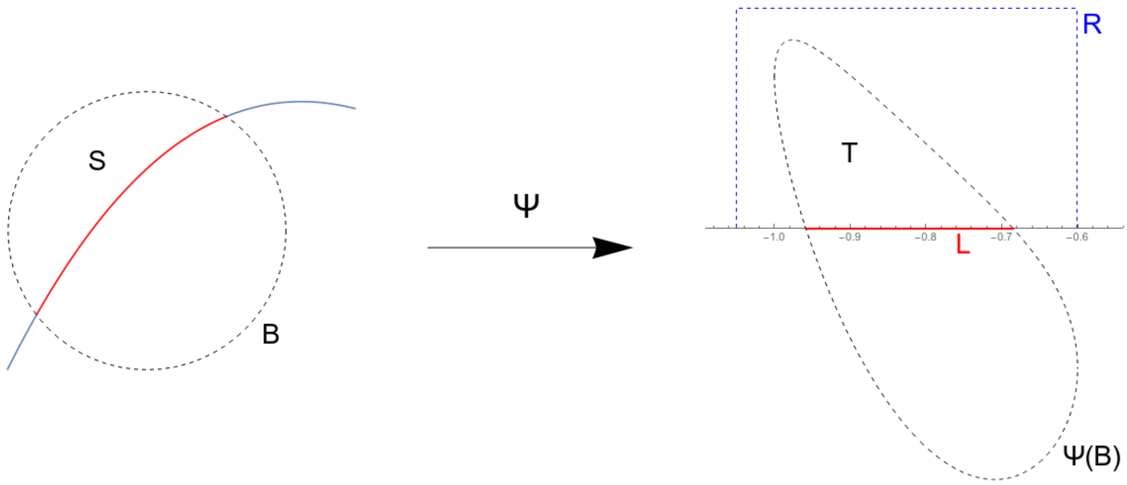
Případ (b) je zajímavější. Předpokládejme, že jsou dány C^1 funkce F_1 a F_2 s nosičem v otevřeném kruhu B a množina $\partial S \cap B$ je grafem C^1 funkce $y = f(x)$, přesněji $\partial S \cap B = \{(x, f(x)) \mid x \in (a, b)\}$ pro nějaká $a < b$. Druhý případ $x = g(y)$ se diskutuje analogicky. Definujme zobrazení $\Psi : (a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (u, v)$ předpisem

$$\Psi : \quad \begin{aligned} u &= x, \\ v &= y - f(x). \end{aligned}$$

Zobrazení Ψ je invertibilní a pro jeho inverzi $\Phi := \Psi^{-1}$ najdeme

$$\Phi : \quad \begin{aligned} x &= u, \\ y &= v + f(u). \end{aligned}$$

Transformace Ψ zobrazuje množinu B prostě na omezenou oblast v uv-rovině, množinu $\partial S \cap B$ na úsečku L na ose u a $S \cap (\operatorname{supp} F_1 \cup \operatorname{supp} F_2)$ na omezenou oblast T ležící buďto nad, nebo pod úsečkou L podle toho, jestli S leží nad, nebo pod grafem $y = f(x)$. Tedy vzájemná orientace L a T je stejná jako vzájemná orientace ∂S a S, viz Obrázek 25.



Obrázek 25: Ilustrace k důkazu Věty 7.10

Zvolme R 2-interval s jednou stranou obsahující L a takový, že $T \subset R$. Funkce $\tilde{F}_1 := F_1 \circ \Phi$ a $\tilde{F}_2 := F_2 \circ \Phi$ jsou třídy C^1 a jsou nulové na všech třech stranách obdélníku R kromě strany L. Potom máme

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} &= \int_a^b \left[F_1(u, f(u)) + F_2(u, f(u))\, f'(u)\right] \mathrm{d}u = \int_a^b \left[\tilde{F}_1(u, 0) + \tilde{F}_2(u, 0)\, f'(u)\right] \mathrm{d}u \\ &= \int_L \left(\tilde{F}_1 + f'\tilde{F}_2, \tilde{F}_2\right) \cdot \mathrm{d}s = \int_{\partial R} \left(\tilde{F}_1 + f'\tilde{F}_2, \tilde{F}_2\right) \cdot \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

kde poslední rovnost platí protože $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2 = 0$ na $\partial R \setminus L$. Aplikujeme-li Greenovu větu na obdélník R, dostaneme

$$\int_{\partial S} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_R \left(\frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial v}(u,v) - f'(u)\frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial v}(u,v) \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Podle Věty o derivaci složené funkce je

$$\frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial u}(u,v) - f'(u)\frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial F_2}{\partial x}\left(\Phi(u,v)\right) \quad \text{a} \quad \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial F_1}{\partial y}\left(\Phi(u,v)\right).$$

Všimneme-li si také, že

$$\det D\Phi(u,v) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(u) & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

dostane pomocí Věty o substituci, že

$$\int_{\partial S} F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_T \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\left(\Phi(u,v)\right) - \frac{\partial F_1}{\partial y}\left(\Phi(u,v)\right) \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Podobně můžeme dokázat Gaussovu větu pro množiny, jejichž hranici tvoří parametrizovaná C^1 plocha, čímž zde rozumíme parametrizovanou plochu takovou, že pro každý její bod existuje okolí, které je obrazem spojitě diferencovatelného zobrazení dvou proměnných. Na tomto místě již necháme definici takto vágní, neboť Gaussovu větu lze dokázat i pro případ parametrizovaných po částech C^1 ploch (Definice 6.18).

Věta 7.11 (Gauss)**:** Nechť $R \subset \mathbb{R}^3$ je kompaktní množina, jejíž hranice je orientovatelná parametrizovaná C^1 plocha s orientací určenou vnější jednotkovou normálou n. Dále nechť $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je třídy C^1 na otevřené nadmnožině $\Omega \supset R$. Potom platí:

$$\int_{\partial R} (F,n)\,\mathrm{d}S = \int_R \operatorname{div} F \,\mathrm{d}V.$$

Důkaz. Důkaz je velmi podobný důkazu Věty 7.10, a proto už budeme velmi struční. Budeme potřebovat platnost Gaussovy věty pro případ, že je množina R 3-interval, což lze provést jako v důkazu Věty 6.33. Nejprve pomocí rozkladu jednotky ukážeme, že větu stačí dokázat pro pole $F = (F_1, F_2, F_3)$ taková, že buď pro každé $i \in \hat{3}$ je $\operatorname{supp} F_i \subset R^\circ$, nebo $\operatorname{supp} F_i \subset B$, kde B je otevřená koule taková, že $\partial R \cap B$ je graf C^1 funkce, např. $z = f(x,y)$ (ostatní případy analogicky). V prvním ukážeme, že

$$\int_{\partial R} (F,n)\,\mathrm{d}S = \int_R \operatorname{div} F \,\mathrm{d}V = 0$$

stejně jako v důkazu Věty 7.10.

V druhém případě zavedeme na B zobrazení

$$\Psi: \quad \begin{aligned} u &= x, \\ v &= y, \\ w &= z - f(x,y), \end{aligned}$$

které je zřejmě invertibilní a pro jeho inverzi $\Phi := \Psi^{-1}$ máme

$$\Phi: \quad \begin{aligned} x &= u, \\ y &= v, \\ z &= w + f(u,v). \end{aligned}$$

Zobrazení Ψ transformuje B na omezenou oblast v uvw-prostoru a množinu $\partial R \cap B$ na jistou podmnožinu uv-roviny, kterou označíme S (analogie množiny L z důkazu Věty 7.10). Zvolme 3-interval Q v uvw-prostoru takový, že $\Psi(R \cap (\operatorname{supp} F_1 \cup \operatorname{supp} F_2 \cup \operatorname{supp} F_3)) \subset Q$ a jehož jedna strana obsahuje S (analogie množiny R z důkazu Věty 7.10). Definujme $\tilde{F} := F \circ \Phi$.

Jelikož $\partial R \cap B = \{(u, v, f(u,v)) \mid (u,v) \in S\}$, dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} (F, n)\, \mathrm{d}S &= \pm \int_S \left(-\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \tilde{F}_1(u,v,0) - \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \tilde{F}_2(u,v,0) + \tilde{F}_3(u,v,0) \right) \mathrm{d}u \mathrm{d}v \\ &= \int_{\partial Q} (H, \pm e_3)\, \mathrm{d}S, \end{aligned}$$

kde

$$H(u,v,w) := \left(0, 0, -\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \tilde{F}_1(u,v,w) - \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \tilde{F}_2(u,v,w) + \tilde{F}_3(u,v,w) \right).$$

Zde je $\pm$ znaménko $+$, nebo $-$ v závislosti na tom, zda je plocha $\partial R \cap B$ pod, nebo nad R, nebo-li je-li vnější normálou Q na S vektor e_3, nebo $-e_3$. Aplikujeme-li Gaussovu větu na 3-interval Q, dostaneme

$$\int_{\partial S} (F, n)\, \mathrm{d}S = \int_Q \operatorname{div} H \, \mathrm{d}V = \int_Q \left(-\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial w} + \frac{\partial \tilde{F}_3}{\partial w} \right) \mathrm{d}V.$$

Podle řetězového pravidla máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial u}(u,v,w) &= \frac{\partial F_1}{\partial x}\left(\Phi(u,v,w)\right) + \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \frac{\partial F_1}{\partial z}\left(\Phi(u,v,w)\right), \\ \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial v}(u,v,w) &= \frac{\partial F_2}{\partial y}\left(\Phi(u,v,w)\right) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \frac{\partial F_2}{\partial z}\left(\Phi(u,v,w)\right), \\ \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial w}(u,v,w) &= \frac{\partial F_i}{\partial z}\left(\Phi(u,v,w)\right), \quad \forall i \in \hat{3}, \end{aligned}$$

a tak dostáváme rovnost

$$\int_{\partial S} (F, n) \, \mathrm{d}S = \int_Q \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \circ \Phi - \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \circ \Phi - \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \circ \Phi \right) \mathrm{d}V.$$

Jelikož jsou funkce $\tilde{F}_1$ a $\tilde{F}_2$ nulové na vertikálních stěnách Q, zjistíme integrací v proměnné u, resp. v, že

$$\int_Q \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial u} \, \mathrm{d}V = \int_Q \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial v} \, \mathrm{d}V = 0.$$

Nakonec jelikož je $\det D\Phi = 1$, máme podle Věty o substituci

$$\int_{\partial S} (F, n) \, \mathrm{d}S = \int_Q \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \circ \Phi + \frac{\partial F_2}{\partial y} \circ \Phi + \frac{\partial F_2}{\partial z} \circ \Phi \right) \mathrm{d}V = \int_Q \operatorname{div} F \circ \Phi \, \mathrm{d}V = \int_R \operatorname{div} F \, \mathrm{d}V.$$

□

Poznámka: Na závěr poznamenejme, že zde použité myšlenky jsou elegantní a méně technické, jsou-li převedené do přirozeného jazyka diferenciálních forem [25].

Reference

[1] Agarwal R. P., Meehan M., O'Regan D.: *Fixed point theory and applications*, Cambridge Tracts in Mathematics, 141, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[2] Balcar B., Štěpánek P.:*Teorie množin*, Academia, Praha, 2000.

[3] Boas R. P.: *A primer of real functions* Carus Mathematical Monographs, 13. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1996.

[4] Boas R. P.: *When is a C^∞ function analytic?*, Math. Intelligencer 11 (1989), no. 4, 34-37.

[5] Cartan H.: *Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives*, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 867. Hermann & Cie, Paris, 1940. 36 pp.

[6] Conway J. B.: *Functions of one complex variable I and II*, Graduate Texts in Mathematics 11 and 159, Springer-Verlag, New York, 1978 and 1995.

[7] Dedekind R.: *Über die Elementeein Eulerschen Integral*, Journal für reine und angewandte Mathematik 45 (1852), 370-374.

[8] Dovgosheya O., Martiob O., Ryazanova V., Vuorinenc M.: *The Cantor function*, Expo. Math. 24 (2006), 1–37.

[9] Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.: *Higher Transcendental Functions I*, McGraw-Hill, New York, 1953.

[10] Folland G. B.: *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2nd edition, A Willey-Interscience Publication, 1999.

[11] Hrbacek K., Jech T.: *Introduction to set theory* Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[12] Hardy G. H.: *Weierstrass's non-differentiable function*, Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1916), no. 3, 301–325.

[13] Hardy G. H., Riesz M.:*The general theory of Dirichlet's series*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 18 Stechert-Hafner, Inc., New York, 1964.

[14] Jarník V.: *Integrální počet II*, Academia, Praha, 1984.

[15] Kopáček J.: *Matematická analýza pro fyziky*, Matfyzpress, Praha, 2003.

[16] Kulpa W.: *Poincaré and domain invariance theorem*, Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 39 (1998), no. 1-2, 127–136.

[17] McHugh J. A. M.: *A proof of Bernstein's theorem on regularly monotonic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 47 (1975), 358-360.

[18] Morgenstern D.: *Unendlich oft differenzierbare nicht-analytische Funktionen*, Math. Nachr. 12 (1954), 74.

[19] Moskowitz M., Paliogiannis F.: *Functions of several real variables*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2011.

[20] Olver F. W. J.: *Asymptotics and special functions* AKP Classics. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1997.

[21] Rosenthal A.: *On functions with infinitely many derivatives*, Proc. Amer. Math. Soc. 4, (1953), 600-602;

[22] Rudin W.: *Principles of mathematical analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976.

[23] Rudin W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, Praha, 2003.

[24] Solovay R. M.: *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Annals of Math. 92 (1970), 1-56.

[25] Spivak M.: *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company, 1965.

[26] Steen L. A., Seebach J. A. Jr.: *Counterexamples in Topology*, Courier Corporation, 1995.

[27] Vrána L.: *Matematická analýza III - funkční posloupnosti a řady*, Ediční středisko ČVUT, 1990.