České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Diskrétní Schrödingerův operátor s komplexním schodovitým potenciálem

Discrete Schrödinger operator with a complex step potential

Bakalářská práce

Autor: **Vojtěch Bartoš**

Vedoucí práce: **Ing. František Štampach, Ph.D.**

Akademický rok: 2021/2022

- Zadání práce -

- Zadání práce (zadní strana) -

Poděkování:
Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli doktoru Františku Štampachovi za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce.

Čestné prohlášení:
Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 7. července 2022 Vojtěch Bartoš

Název práce:

Diskrétní Schrödingerův operátor s komplexním schodovitým potenciálem

Autor: Vojtěch Bartoš

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Matematické modelování

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. František Štampach, Ph.D., Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT, Katedra matematiky

Abstrakt: Tato práce zkoumá speciální třídu Schrödingerových operátorů na $\ell^2(\mathbb{Z})$. Hledáme spektrum těchto operátorů a porovnáváme ho se spojitou analogií. Potenciál je závislý na jednom komplexním parametru, a tedy operátor obecně není samosdružený. Nalezení rezolventy je formálně docíleno pomocí Greenova jádra, přestože není splněn předpoklad samosdruženosti. Spektrum a jeho části byly identifikovány pro libovolný komplexní parametr. Využitím Birmanova–Schwingerova principu byly nalezeny tzv. spektrální obálky zkoumaného operátoru s ℓ^1 poruchou.

Klíčová slova: Birmanův–Schwingerův princip, diagonální porucha, diskrétní Schrödingerův operátor, nesamosdruženost, schodovitý potenciál, spektrální obálky

Title:

Discrete Schrödinger operator with a complex step potential

Author: Vojtěch Bartoš

Abstract: We study the spectrum of a specific class of Schrödinger operators on $\ell^2(\mathbb{Z})$ and compare it with its continuous analogue. The potential is dependant on a single complex parameter α, therefore, the operator is generally non-self-adjoint. Finding the resolvent is formally achieved by using the Green Kernel Theorem, though the operator in question is non-self-adjoint. The proposition of the theorem was proven for our case without the self-adjointness assumption. The spectrum and its parts were identified for any aforementioned complex parameter. Utilizing the Birman–Schwinger principle we have obtained spectral enclosures of the operator, which had been perturbed by an ℓ^1 potential.

Key words: Birman–Schwinger principle, diagonal perturbation, discrete Schrödinger operator, non-self-adjountness, spectral enclosures, step-like potential

Obsah

Úvod

Laplaceův operátor je ve spojitém případě operátor druhé derivace (v 1D), tedy pro funkce diferencovatelné do druhého řádu máme

$$\forall f \in C^2(\mathbb{R}) \quad : \quad -\Delta f = -\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}.$$

V diskrétním případě jde o součet operátoru dopředné translace a operátoru zpětné translace na prostoru komplexních dvojitě nekonečných posloupností

$$\forall x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} \quad : \quad (H_0 x)_n = x_{n-1} + x_{n+1}.$$

Takto zavedený diskrétní Laplaceův operátor se liší od přímé diskrétní analogie spojitého Laplaceova operátoru o dvojnásobek identity, což je z pohledu spektrální analýzy nepodstatná modifikace, protože způsobí pouze posunutí spektra na reálné přímce. Diskrétní a spojitý případ Laplaceova operátoru nalézají souvislost v numerické matematice. Schrödingerův operátor dostáváme, když k Laplaceovu operátoru přičteme nějaký potenciál. Tyto operátory mají značné využití v kvantové mechanice, kde hraje důležitou roli jejich spektrální analýza. Od počátku se v kvantové mechanice uvažovaly pouze samosdružené operátory, protože mají reálné spektrum, ale v posledních letech se začaly využívat i operátory nesamosdružené. V této práci se ale oprostíme od fyzikálních motivací a budeme se na náš problém dívat čistě z matematického hlediska. Spektrální analýza spojitých operátorů je známá a značně pokročilá disciplína. Spektrální analýza diskrétních operátorů není tak rozšířená, a proto v této práci představíme některé techniky hledání spektra diskrétního nesamosdruženého operátoru při jejich aplikaci na zkoumaný operátor.

Hlavním cílem této bakalářské práce je spektrální analýza jednoparametrické třídy Schrödingerových operátorů na $\ell^2(\mathbb{Z})$ s komplexním schodovitým potenciálem, kde se parametr vyskytuje jako koeficient u schodovitého potenciálu. Jedná se tedy o diskrétní a obecně nesamosdružený operátor. Chceme podat diskrétní analogii výsledku z článku [3], kde je mimo jiné nalezeno spektrum spojitého 1D Schrödingerova operátoru s potenciálem $\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(x)$. Dalším úkolem je lokalizace spektra porušeného operátoru, kde poruchou rozumíme přičtení diagonálního operátoru s ℓ^1 posloupností na diagonále.

V první kapitole shrneme základní poznatky z funkcionální analýzy, omezenost operátorů, jejichž maticové reprezentace jsou jednoduše nekonečné strukturované matice, zejména Toeplitzova a Hankelova. V poslední části této kapitoly definujeme diskrétní a esenciální spektrum a mimo jiné vyslovíme Birmanův–Schwingerův princip, což je stěžejní nástroj pro lokalizaci spektra porušeného operátoru.

Druhá kapitola je věnována představení zkoumaného operátoru, ukázání jeho základních vlastností a především nalezení a klasifikaci jeho spektra. Nejdůležitějším krokem je konstrukce Greenova jádra, pomocí které nalezneme rezolventu.

Třetí kapitola shrnuje výsledky předchozí kapitoly a porovnává spektrum zkoumaného diskrétního operátoru se spojitým.

Ve čtvrté kapitole replikujeme výsledky článku [7], kde byly nalezeny tzv. spektrální obálky diskrétního Schrödingerova operátoru s komplexním ℓ^1 potenciálem. Přičteme tedy k našemu schodovitému potenciálu ještě diagonální operátor, který má na diagonále $\ell^1(\mathbb{Z})$ posloupnost, a hledáme množinu, která obsahuje celé spektrum porušeného operátoru, t.j. spektrální obálku.

Kapitola 1

Teoretické poznatky

V této kapitole vyslovíme tvrzení a definice, které budou potřebné v dalších částech textu. Nejprve připomeňme potřebné definice a výsledky z kurzů FAN1 a FA2 na FJFI.

Definice 1.1 (operátorová norma)**:** Nechť X je normovaný vektorový prostor a $A \in \mathscr{B}(X)$, potom definujeme *normu omezeného operátoru* jako

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Věta 1.2 (Weylovo kritérium)**:** Nechť $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je normální operátor a $\lambda \in \mathbb{C}$, potom platí

$$\lambda \in \sigma(A) \Longleftrightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{H} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ \|x_n\| = 1 \ \& \ \lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda)x_n\| = 0.$$

Poznámka. Tvrzení lze ekvivalentně zapsat

$$\lambda \in \sigma(A) \Longleftrightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{H} \setminus \{0\} \ : \ \lim_{n\to\infty} \frac{\|(A-\lambda)x_n\|}{\|x_n\|} = 0.$$

Definice 1.3 (Kompaktní operátor)**:** Nechť $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Řekneme, že A je *kompaktní*, jestliže zobrazuje omezené množiny na prekompaktní. Množinu všech kompaktních operátorů z $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ značíme $\mathscr{K}(\mathscr{H})$.

Věta 1.4 (Riesz–Schauder)**:** Mějme kompaktní operátor A na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ nekonečné dimenze. Potom:

1. $0 \in \sigma(A)$,
2. každý nenulový bod spektra je vlastní hodnota, tj. $\sigma(A) \setminus \{0\} \subset \sigma_{\mathrm{p}}(A)$,
3. množina vlastních hodnot je nejvýše spočetná,
4. všechny nenulové vlastní hodnoty mají konečnou násobnost,
5. spektrum má nejvýše jeden hromadný bod $\lambda = 0$.

1.1 Speciální druhy jednoduše nekonečných matic

Tato část bude věnována několika specifickým druhům operátorů na $\ell^p(\mathbb{N}_0)$, jejichž maticové reprezentace jsou jednoduše nekonečné matice. Bude nás zajímat omezenost těchto operátorů. V této části budeme čerpat zejména z [6].

Definice 1.5 (Toeplitzova matice)**:** Nechť $a = \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, potom definujeme *Toeplitzovu* nekonečnou matici jako

$$T(a) := (a_{m-n})_{m,n=0}^{\infty} = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Definice 1.6 (Hankelova matice)**:** Nechť $b = \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, potom definujeme *Hankelovu* nekonečnou matici jako

$$H(b) := (b_{m+n})_{m,n=0}^{\infty} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Tvrzení 1.7 (Omezenost $T(a)$)**:** Nechť $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ a $1 \leq p \leq +\infty$, potom operátor na $\ell^p(\mathbb{N}_0)$, jehož maticovou reprezentací je $T(a)$, je omezený a platí

$$\|T(a)\|_p \leq \|a\|_1.$$

Důkaz. V tomto důkazu značí $\|\cdot\|$ vždy $\ell^p(\mathbb{N}_0)$ normu buď vektoru, nebo operátoru. Pro $\forall n \in \mathbb{Z}$ definujme $e_n = \{\delta_{m,n}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ a platí $\forall n \in \mathbb{Z} : \|e_n\|_1 = 1$. Potom pro nějaké fixní $n \geq 0$ má $T(e_n)$ tvar

$$T(e_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \\ \vdots & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & \vdots & 0 & \dots & \\ 1 & 0 & \vdots & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

kde jednička v prvním sloupci je na n-tém řádku, přičemž indexování začíná nulou. $T(e_n)$ působí na $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}_0} \in \ell^p(\mathbb{N}_0)$ následovně:

$$T(e_n)x = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, x_0, x_1, \dots\}.$$

Počítejme normu

$$\|T(e_n)x\| = \Big(0 + \dots + 0 + \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \|x\|.$$

Pro $n < 0$ platí

$$T(e_n) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

kde jednička v prvním řádku je v n-tém sloupečku, dále platí

$$T(e_n)x = \{x_{-n}, x_{-n+1}, \dots\},$$

$$\|T(e_n)x\| = \Big(\sum_{k=-n}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sum_{k=0}^{-n-1} |x_k|^p + \sum_{k=-n}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \|x\|.$$

Z toho je zřejmé, že $\forall n \in \mathbb{Z} : \|T(e_n)\| \le 1$. Potom můžeme pro $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ zapsat

$$T(a) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T(e_n),$$

neboť řada na pravé straně konverguje ve stejnoměrné topologii, jak plyne z odhadu

$$\|T(a)\| = \Big\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T(e_n)\Big\| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| \|T(e_n)\| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| = \|a\|_1. \qquad \square$$

Tvrzení 1.8 (Omezenost $H(a)$)**:** Nechť $a \in \ell^1(\mathbb{N}_0)$ a $1 \le p \le +\infty$, potom operátor na $\ell^p(\mathbb{N}_0)$, jehož maticovou reprezentací je $H(a)$, je omezený a platí

$$\|H(a)\|_p \le \|a\|_1.$$

Důkaz. V tomto důkazu opět značí $\|\cdot\|$ vždy $\ell^p(\mathbb{N}_0)$ normu. Znovu uvažujme $e_n = \{\delta_{m,n}\}_{m\in\mathbb{N}_0}$, tentokrát ale pro $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Potom pro nějaké fixní $n \ge 0$ má $H(e_n)$ tvar

$$H(e_n) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & & \\ 1 & 0 & \vdots & & & \\ 0 & \vdots & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

a pro $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \in \ell^p(\mathbb{N}_0)$ platí

$$H(e_n)x = \{x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0, 0, 0, \dots\},$$

spočtěme normu

$$\|H(e_n)x\| = \Big(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \|x\|.$$

Tedy pro $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \|H(e_n)\| \le 1$, tím máme vše připraveno pro ukázání hledané nerovnosti

$$\|H(a)\| = \Big\|\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n H(e_n)\Big\| \le \sum_{n\in\mathbb{N}_0} |a_n| \|H(e_n)\| \le \sum_{n\in\mathbb{N}_0} |a_n| = \|a\|_1. \qquad \square$$

Příklad 1.9: Uvažujme speciální příklad Hankelova operátoru s maticovou reprezentací danou pro $\forall m, n \in \mathbb{N}_0 : H_{m,n}(q) = q^{m+n}$, kde $|q| < 1$. Ukažme, že $H(q) \in \mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{N}_0))$ a že platí

$$\|H(q)\|_2 \leq \frac{1}{1-|q|^2},$$

což je mírně lepší odhad, než dává Tvrzení 1.8.

Řešení. V tomto příkladu značí $\|\cdot\|$ vždy ℓ^2 normu. Zvolme $\psi \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ libovolně pevně,

$$(H(q)\psi)_n = \sum_{m=0}^{\infty} H_{m,n}(q)\psi_m = \sum_{m=0}^{\infty} q^{m+n}\psi_m = q^n \sum_{m=0}^{\infty} q^m \psi_m,$$

nyní spočtěme ℓ^2 normu

$$\|H(q)\psi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(H(q)\psi)_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |q|^{2n} \Big| \sum_{m=0}^{\infty} q^m \psi_m \Big|^2.$$

Poznamenejme, že sumy na pravé straně nemají společné indexy. Definujme pomocný vektor $\phi_q := (1, q, q^2, \dots)$, potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} |q|^{2n} = \|\phi_q\|^2 = \frac{1}{1-|q|^2},$$

$$\Big| \sum_{m=0}^{\infty} q^m \psi_m \Big| \leq \Big(\sum_{m=0}^{\infty} |q|^m |\psi_m| \Big) = \langle |\phi_q|, |\psi| \rangle_{\ell^2} \overset{\text{C.-S.}}{\leq} \|\phi_q\| \|\psi\|,$$

kde $|\phi_q|, |\psi|$ značí posloupnosti se členy v absolutní hodnotě. Celkem platí, že

$$\|H(q)\psi\| \leq \|\phi_q\|^2 \|\psi\|.$$

Tím dostáváme hledanou nerovnost

$$\|H(q)\| \leq \|\phi_q\|^2 = \frac{1}{1-|q|^2}.$$

Lemma 1.10: Nechť $p, q \in \mathbb{C}$, $|p|, |q| < 1$ a definujme operátor $L = L(p, q)$ na $\ell^2(\mathbb{N})$ s maticovou reprezentací $\forall m, n \in \mathbb{N} : L_{m,n} := p^m q^n$. Potom $L \in \mathscr{B}\big(\ell^2(\mathbb{N})\big)$. Definujeme-li $\pi_q := (q, q^2, q^3, \dots)$, platí $\|L\| \leq \|\pi_p\| \|\pi_q\|$.

Důkaz. V tomto důkazu značí $\|\cdot\|$ vždy ℓ^2 normu. Zvolme $\psi \in \ell^2(\mathbb{N})$ libovolně pevně,

$$(L\psi)_m = \sum_{n=1}^{\infty} L_{m,n}\psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} p^m q^n \psi_n = p^m \sum_{n=1}^{\infty} q^n \psi_n.$$

Dále odhadněme normu

$$\begin{aligned}\|L\psi\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |(L\psi)_m|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |p|^{2m} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} q^n \psi_m \Big|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |p|^{2m} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |q|^n |\psi_m| \Big)^2 \\ \overset{\text{C.-S.}}{\leq} \sum_{m=1}^{\infty} |p|^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} |q|^{2n} \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^2 = \|\pi_p\|^2 \|\pi_q\|^2 \|\psi\|^2,\end{aligned}$$

kde jsme v označené nerovnosti využili Cauchy–Schwarzovu nerovnost. To implikuje

$$\|L\| \leq \|\pi_p\|\|\pi_q\|.$$

Navíc platí

$$\|\pi_p\| = \sqrt{\frac{|p|^2}{1-|p|^2}}, \qquad \|\pi_q\| = \sqrt{\frac{|q|^2}{1-|q|^2}},$$

proto L je omezený operátor na $\ell^2(\mathbb{N})$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Poznámka. Z důkazu je vidět, že hodnota normy L nezáleží na pořadí argumentů p, q.

1.2 Žukovského transformace

Vezměme $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 2\}$, potom existují dvě $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tak, že

$$\lambda = \xi + \xi^{-1}. \tag{1.2.1}$$

Vynásobíme-li rovnici (1.2.1) ξ, dostaneme kvadratickou rovnici, u které dokážeme explicitně napsat dvě řešení závislá na λ, a to

$$\xi^2 - \lambda\xi + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \xi_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}, \tag{1.2.2}$$

z čehož plyne existence dvou řešení rovnice (1.2.1) pro $\lambda \neq \pm 2$. Jelikož konstantní člen v kvadratické rovnici je roven 1, platí $\xi_1\xi_2 = 1$ a z toho

$$|\xi_1| \leq 1 \Longleftrightarrow |\xi_2| \geq 1.$$

Pro $\lambda = 2$, resp. $\lambda = -2$, existuje jediné řešení rovnice (1.2.1) a to $\xi = 1$, resp. $\xi = -1$, pro nulu řešení neexistuje žádné.

Žukovského transformací rozumíme přiřazení λ k tomu ξ, které je v absolutní hodnotě menší nebo rovno jedné. Toto přiřazení není úplně jednoznačné, neboť může nastat situace, kdy jsou oba kořeny na jednotkové kružnici. K tomu, kam mapuje transformace takováto ξ, se vrátíme později. Nyní zkoumejme blíže chování této transformace, $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, |\xi| \leq 1$ můžeme zapsat v polárním tvaru jako

$$\xi = r\cos\varphi + \mathrm{i}r\sin\varphi, \quad r \in (0, 1], \quad \varphi \in [-\pi, \pi),$$

potom ξ^{-1} lze zapsat jako

$$\xi^{-1} = \frac{1}{r}\cos(-\varphi) + \frac{\mathrm{i}}{r}\sin(-\varphi).$$

Dosaďme do (1.2.1)

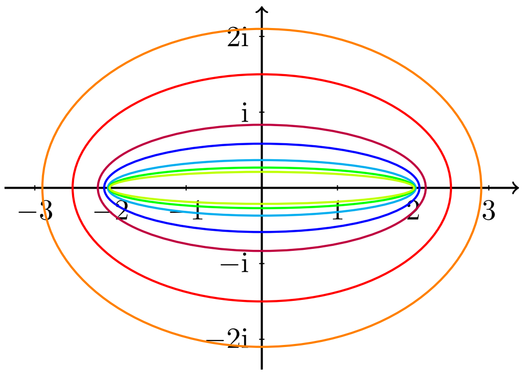
$$\begin{aligned} \lambda &= r\cos\varphi + \mathrm{i}r\sin\varphi + \frac{1}{r}\cos(-\varphi) + \frac{\mathrm{i}}{r}\sin(-\varphi) \\ &= \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + \mathrm{i}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Je vidět, že když zafixujeme $r \neq 1$, dostaneme rovnici elipsy v komplexní rovině. Pro ilustraci můžeme nahlédnout na obr. 1.1, kde jsou tyto elipsy vykresleny pro několik hodnot r. Položíme-li $r = 1$, neboli $|\xi| = 1$, dostaneme

$$\lambda = 2\cos\varphi.$$

Tedy pro ξ z jednotkové kružnice dostaneme $\lambda \in [-2, 2]$. Snadno lze také nahlédnout, že pro $\lambda \in [-2, 2]$ existují dvě ξ splňující rovnici (1.2.1). Jedná se o výše zmíněnou vadu na jednoznačnosti přiřazení λ a ξ. Žukovského transformace je tedy bijektivní zobrazení mezi množinami

$$\mathbb{C} \setminus [-2, 2] \quad \longleftrightarrow \quad \{\xi \in \mathbb{C} \mid 0 < |\xi| < 1\}.$$



Obrázek 1.1: λ z (1.2.3) pro několik vybraných hodnot r

Definice 1.11 (Úsečka v komplexní rovině)**:** Nechť $a, b \in \mathbb{C}$, potom značíme *úsečku v komplexní rovině* mezi body a a b jako konvexní kombinaci těchto bodů

$$[a, b] := \{at + b(1-t) \mid t \in [0, 1]\}.$$

1.3 Poruchová teorie

V této části se budeme opírat o poznatky z knih [4] a [5]. Zavedeme diskrétní a esenciální spektrum a vyslovíme věty potřebné k lokalizaci spektra porušeného operátoru. Hlavním výsledkem je Birmanův–Schwingerův princip.

Definice 1.12 (Esenciální spektrum)**:** Nechť $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. *Diskrétní spektrum* definujeme jako množinu

$$\sigma_{\mathrm{d}}(A) := \big\{\lambda \in \mathbb{C} \;\big|\; \lambda \text{ je izolovaná vlastní hodnota } A,\;\; \nu_{\mathrm{a}}(\lambda) < \infty\big\},$$

kde *algebraickou násobností* vlastní hodnoty λ rozumíme

$$\nu_{\mathrm{a}}(\lambda) := \dim \operatorname{Ran} P_\lambda, \qquad P_\lambda := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_\lambda} (A - \lambda)^{-1} \mathrm{d}z.$$

Jordanova křivka γ_λ, podle které se integruje, je taková, že $\sigma(A) \setminus \{\lambda\} \subset \operatorname{ext}(\gamma_\lambda)$. *Esenciální spektrum* definujeme jako

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A) := \sigma(A) \setminus \sigma_{\mathrm{d}}(A).$$

Poznámka. Existuje alespoň 5 různých definic esenciálního spektra pro nesamosdružené operátory, viz [5]. My budeme pracovat s definicí z [4].

Poznámka. Pro samosdružený operátor $A = A^* \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je definice značně jednodušší.

$$\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \in \sigma(A) \ \ \& \ \ \lambda \text{ není izolovaná vlstní hodnota konečné násobnosti,}$$

kde násobností rozumíme $\nu_{\text{a}}(\lambda) = \nu_{\text{g}}(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}\big(A - \lambda\big)$.

Věta 1.13: Nechť $V = \operatorname{diag}\big(\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}\big)$, potom

$$V \in \mathscr{K}(\mathscr{H}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n \to \pm\infty} v_n = 0.$$

Důkaz. Protože V je diagonální matice, platí $\forall n \in \mathbb{Z} : v_n \in \sigma_{\text{p}}(V)$, a tedy $\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset \sigma(V)$, ale spektrum je uzavřená množina a musí platit $\overline{\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}} \subset \sigma(V)$. Rovnost dokážeme tak, že ukážeme, že doplněk této množiny je obsažený v rozolventní množině. Zvolme $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}}$, z toho plyne

$$\operatorname{dist}\big(\lambda, \overline{\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}}\big) =: d > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall n \in \mathbb{Z} : |v_n - \lambda| \geq d > 0.$$

Inverze diagonální matice $(V - \lambda)$ je tvaru

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ : \ \big(V - \lambda\big)^{-1} e_n = \frac{1}{v_n - \lambda} e_n \qquad \Longrightarrow \qquad \big\| \big(V - \lambda\big)^{-1} \big\| \leq \frac{1}{d}.$$

Tato implikace plyne z faktu, že $\big(V - \lambda\big)^{-1}$ je diagonální matice a v je omezená posloupnost

$$\big\| \big(V - \lambda\big)^{-1} \big\|^2 = \sup_{\substack{x \in \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \|x\|=1}} \big\| \big(V - \lambda\big)^{-1} x \big\|^2 = \sup_{\substack{x \in \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \|x\|=1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{|v_n - \lambda|^2} \leq \frac{1}{d^2}.$$

Celkem dostáváme

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}} \ : \ \exists \big(V - \lambda\big)^{-1} \in \mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{Z})) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{C} \setminus \overline{\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}} \subset \rho(V).$$

Věta 1.4 nám dává bližší popis spektra kompaktního operátoru. Pro $V \in \mathscr{K}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ platí

$$\sigma(V) = \begin{cases} \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}, \ \text{kde } k \in \mathbb{N} \\ \{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}, \ \ \lim_{n \to \pm\infty} \lambda_n = 0. \end{cases}$$

Definujme množinu $(\sigma(V))' := \sigma(V) \setminus \{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, potom podle vyslovené věty nastane jeden ze dvou případů:

$$(\sigma(V))' = \emptyset, \qquad \text{nebo} \qquad (\sigma(V))' = \{0\}.$$

Z první možnosti a faktu, že algebraická násobnost nenulových vlastních hodnot je konečná, plyne to, že V má konečně mnoho nenulových vlastních hodnot. Zapíšeme-li spektrum V jako dvojitě nekonečnou posloupnost $\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, platí

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}; \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \ |n| > n_0 : \quad v_n = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n \to \pm\infty} v_n = 0.$$

Z druhé možnosti a faktu, že $\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je omezená posloupnost, plyne opět

$$\lim_{n \to \pm\infty} v_n = 0.$$

Tím máme dokázanou první implikaci.

Nyní předpokládejme, že $\lim_{n\to\pm\infty} v_n = 0$. Definujme $V_n := P_n V P_n$, kde $n \in \mathbb{N}$ a P_n je projekce na $\mathrm{span}(e_{-n}, \dots, e_0, \dots, e_n)$. Dimenze V_n je konečná, skutečně

$$\dim \mathrm{Ran} V_n \le \dim \mathrm{Ran} P_n = 2n + 1 < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad V_n \in \mathscr{K}(\ell^2(\mathbb{Z})).$$

V_n konverguje stejnoměrně k V, neboť

$$x \in \ell^2(\mathbb{Z}) : ((V - V_n)x)_k = \begin{cases} v_k & |k| > n \\ 0 & |k| \le n \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \|V - V_n\| = \sup_{|k|>n} |v_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Tím je splněna postačující podmínka, aby V byl kompaktní operátor z [1, 6.1.6]. □

Lemma 1.14 ([4, Lemma 3, sec. XIII.4])**:** Nechť A, B jsou omezené operátory splňující

(a) $A - B$ je kompaktní operátor,

(b) $\big(\sigma(A)\big)^{\mathrm{o}} = \emptyset$ v $\mathbb{C}$,

(c) každá komponenta souvislosti $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ obsahuje bod z $\rho(B)$.

Potom

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A) \;=\; \sigma_{\mathrm{ess}}(B).$$

Důkaz. Pro důkaz se odkážeme na [4]. □

Lemma 1.15: Nechť $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Potom $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$.

Důkaz. Zvolme $\lambda \notin \sigma(AB) \cup \{0\}$, potom existuje omezená inverze k $(AB - \lambda)$. Položme

$$C := \frac{1}{\lambda}\big(- I + B(AB - \lambda)^{-1} A\big),$$

kde I značí identický operátor. Zřejmě C je omezený operátor. Ukažme, že C je inverzí k $(BA - \lambda)$, skutečně

$$\begin{aligned}(BA - \lambda)C &= -\frac{1}{\lambda}BA + I + \frac{1}{\lambda}BAB(AB - \lambda)^{-1}A - B(AB - \lambda)^{-1}A \\ &= I + \frac{1}{\lambda}B\big(- I + AB(AB - \lambda)^{-1} - \lambda(AB - \lambda)^{-1}\big)A \\ &= I + \frac{1}{\lambda}B\big(- I + (AB - \lambda)(AB - \lambda)^{-1}\big)A = I + \frac{1}{\lambda}BOA = I,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C(BA - \lambda) &= -\frac{1}{\lambda}BA + I + \frac{1}{\lambda}B(AB - \lambda)^{-1}ABA - B(AB - \lambda)^{-1}A \\ &= I + \frac{1}{\lambda}B\big(- I + (AB - \lambda)^{-1}AB - \lambda(AB - \lambda)^{-1}\big)A \\ &= I + \frac{1}{\lambda}B\big(- I + (AB - \lambda)^{-1}(AB - \lambda)\big)A = I + \frac{1}{\lambda}BOA = I,\end{aligned}$$

kde O značí nulový operátor. Dostáváme $\rho(AB) \setminus \{0\} \subset \rho(BA)$, tato inkluze bude stále platit, když z pravé strany vyjmeme nulu $\rho(AB)\setminus\{0\} \subset \rho(BA)\setminus\{0\}$, prohozením pořadí A, B dostaneme opačnou inkluzi. Potom přechodem k doplňkům dostáváme tvrzení lemma. □

Věta 1.16 (Birman–Schwinger)**:** Nechť $H, V \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $\lambda \in \rho(H)$. V rozložíme tak, aby byl složením dvou omezených operátorů $V = AB$, $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, a položme

$$K(\lambda) := B(H-\lambda)^{-1}A.$$

Potom

1. $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(H+V) \quad \Longrightarrow \quad -1 \in \sigma_{\mathrm{p}}(K(\lambda))$,
2. $V \in \mathscr{K}(\mathscr{H}) \quad \& \quad -1 \in \sigma_{\mathrm{p}}(K(\lambda)) \quad \Longrightarrow \quad \lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(H+V)$.

Důkaz. Dokažme nejdříve první ze dvou bodů. Zvolme $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(H+V)$, potom existuje nenulové $\psi \in \mathscr{H}$ takové, že

$$(H+V)\psi = \lambda\psi \qquad \Longleftrightarrow \qquad (H-\lambda)\psi = -V\psi. \tag{1.3.1}$$

Protože $\lambda \in \rho(H)$, existuje inverzní operátor k $(H-\lambda)$ a dostáváme

$$-\psi \;=\; (H-\lambda)^{-1}V\psi \;=\; (H-\lambda)^{-1}AB\psi.$$

Dále na rovnici aplikujme B a označme $\phi := B\psi$

$$-\phi \;=\; B(H-\lambda)^{-1}A\phi \;=\; K(\lambda)\phi. \tag{1.3.2}$$

ϕ je nenulový vektor. Pro spor předpokládejme opak,

$$\phi = 0 \implies B\psi = 0 \overset{A\cdot}{\implies} V\psi = 0 \xrightarrow{(1.3.1)} H\psi = \lambda\psi \implies \lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(H).$$

Tím dostáváme spor s předpokladem $\lambda \in \rho(H)$. Protože $\phi \neq 0$, z rovnice (1.3.2) vyplývá, že -1 je vlastní hodnotou $K(\lambda)$.

Nyní přejděme k důkazu druhého bodu. Číslo -1 je vlastní hodnotou $K(\lambda)$ a tedy i prvkem spektra, potom díky Lemma 1.15 platí $-1 \in \sigma\big((H-\lambda)^{-1}AB\big)$. Protože V je kompaktní operátor, je i $(H-\lambda)^{-1}V$ kompaktní. Z Věty 1.4 vyplývá, že -1 je vlastní hodnotou $(H-\lambda)^{-1}V$, a tedy

$$\exists\psi \neq 0 \quad : \quad (H-\lambda)^{-1}V\psi = -\psi.$$

Aplikujme-li na rovnici $(H-\lambda)$, dostaneme

$$\exists\psi \neq 0 \quad : \quad (H+V)\psi = \lambda\psi,$$

to jest $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(H+V)$, což jsme chtěli ukázat. □

Poznámka. Operátor $K(\lambda)$ z Věty 1.16 nazýváme Birmannův–Schwingerův operátor.

Důsledek 1.17: Při stejných předpokladech a značení jako v předchozí větě platí implikace

$$\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(H+V) \qquad \Longrightarrow \qquad \|K(\lambda)\| \geq 1.$$

Důkaz. Důkaz je zřejmý po obměně implikace

$$\|K(\lambda)\| < 1 \quad \Longrightarrow \quad -1 \notin \sigma(K(\lambda)) \quad \Longrightarrow \quad \lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(H+V).$$ □

Kapitola 2

Spektrální analýza operátoru H_α

Uvažujme Hilbertův prostor kvadraticky sčítatelných dvojitě nekonečných komplexních posloupností

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \Big\{ \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \Big\},$$

na němž zavedeme standardní ON bázi

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \qquad e_n := \{\delta_{k,n}\}_{k=-\infty}^{\infty}.$$

Diskrétní Schrödingerův operátor s komplexním schodovitým potenciálem budeme značit H_α a bude závislý na volném komplexním parametru α. $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ je tedy jednoparametrická třída operátorů. H_α definujeme pro $\forall x \equiv \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ následovně

$$(H_\alpha x)_n = \begin{cases} x_{n-1} + x_{n+1} & n < 0, \\ x_{n-1} + \alpha x_n + x_{n+1} & n \geq 0. \end{cases}$$

Operátor H_α má maticovou reprezentaci

$$H_\alpha = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & 1 & \alpha & 1 & & \\ & & & 1 & \alpha & 1 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Zřejmě pro $\alpha \notin \mathbb{R}$ není H_α samosdružený operátor, protože $H_\alpha^* = H_{\overline{\alpha}}$. Pro případ $\alpha \notin \mathbb{R}$ se dokonce nejedná ani o normální operátor:

$$\big(H_\alpha\, H_\alpha^*\big)_{-1,0} = (H_\alpha)_{-1,-2}(H_\alpha^*)_{-2,0} + (H_\alpha)_{-1,-1}(H_\alpha^*)_{-1,0} + (H_\alpha)_{-1,0}(H_\alpha^*)_{0,0} = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + \overline{\alpha},$$
$$\big(H_\alpha^*\, H_\alpha\big)_{-1,0} = (H_\alpha^*)_{-1,-2}(H_\alpha)_{-2,0} + (H_\alpha^*)_{-1,-1}(H_\alpha)_{-1,0} + (H_\alpha^*)_{-1,0}(H_\alpha)_{0,0} = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + \alpha.$$

H_α je omezený operátor, skutečně

$$H_\alpha = D + \alpha\, S + D^*,$$

kde

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \qquad De_n := e_{n-1}, \quad D^* e_n = e_{n+1},$$

$$\forall n \geq 0 : \quad Se_n := e_n, \qquad \forall n < 0 : \quad Se_n := 0.$$

Zřejmě platí

$$\|D\| = \|S\| = \|D^*\| = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \|H_\alpha\| \leq \|D\| + |\alpha|\|S\| + \|D^*\| = 2 + |\alpha|.$$

Uveďme postup hledání spektra:

1. Ukážeme, že bodové spektrum je prázdné.
2. Ukážeme, že reziduální spektrum je prázdné.
3. Nalezneme vhodnou podmnožinu rezolventní množiny operátoru.
4. Ukážeme, že doplněk této množiny je podmnožinou spektra.

2.1 Bodové spektrum

Komplexní číslo λ náleží bodovému spektru H_α, právě když existuje nenulový prvek x z $\ell^2(\mathbb{Z})$, který splňuje rovnici na vlastní čísla $H_\alpha x = \lambda x$. Tu lze rozepsat

$$\begin{aligned} \lambda x_n &= x_{n-1} + x_{n+1} \qquad && n < 0, \\ (\lambda - \alpha) x_n &= x_{n-1} + x_{n+1} \qquad && n \geq 0. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Definujme pomocnou posloupnost

$$\kappa_n := \begin{cases} \lambda & n < 0, \\ \lambda - \alpha & n \geq 0, \end{cases}$$

pomocí které dokážeme (2.1.1) zapsat v kompaktnějším tvaru

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad : \qquad \kappa_n x_n = x_{n+1} + x_{n-1}. \tag{2.1.2}$$

Jedná se o diferenční rovnici druhého řádu, jejíž množina řešení v prostoru dvojitě nekonečných komplexních posloupností má dimenzi 2. Pro její vyřešení aplikujeme Žukovského transformaci na λ a $\lambda - \alpha$ separátně

$$\lambda = \xi + \xi^{-1}, \qquad \lambda - \alpha = \eta + \eta^{-1}. \tag{2.1.3}$$

Je nutné podotknout, že parametry η a ξ nejsou vzájemně nezávislé. Touto transformací jsme si úlohu zjednodušili natolik, že obecné řešení dokážeme najít v jednoduchém tvaru. Předpokládejme, že $\xi \neq \pm 1$ a $\eta \neq \pm 1$, k těmto okrajovým případům se vrátíme později. Pro $n \leq -2$ řeší diferenční rovnici (2.1.1) posloupnosti $x_n = \xi^n$ a $x_n = \xi^{-n}$ a pro $n \geq 1$ jsou řešeními posloupnosti $x_n = \eta^{-n}$ a $x_n = \eta^n$, skutečně

$$\begin{aligned} \lambda x_n &= (\xi + \xi^{-1})\xi^n = \xi^{n+1} + \xi^{n-1} = x_{n+1} + x_{n-1} \\ \lambda x_n &= (\xi + \xi^{-1})\xi^{-n} = \xi^{-n+1} + \xi^{-n-1} = x_{n+1} + x_{n-1} \end{aligned} \qquad n \leq -2,$$

$$\begin{aligned} (\lambda - \alpha) x_n &= (\eta + \eta^{-1})\eta^n = \eta^{n+1} + \eta^{n-1} = x_{n+1} + x_{n-1} \\ (\lambda - \alpha) x_n &= (\eta + \eta^{-1})\eta^{-n} = \eta^{-n+1} + \eta^{-n-1} = x_{n+1} + x_{n-1} \end{aligned} \qquad n \geq 1.$$

Obecné řešení je tedy tvaru

$$\begin{aligned} x_n &= A\xi^n + B\xi^{-n} && n < 0, \\ x_n &= C\eta^n + D\eta^{-n} && n \geq 0, \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

kde dvě ze čtyř konstant A, B, C, D určíme z napojení těchto částečných řešení. Vyhodnotíme je dosazením obecného řešení (2.1.4) do rovnice na vlastní čísla (2.1.1) v indexech $n \in \{-1, 0\}$.

$$\begin{aligned} n = -1 \quad &: \quad A\xi^{-2} + B\xi^2 + C + D = (\xi + \xi^{-1})(A\xi^{-1} + B\xi) \\ & \quad\;\; A + B = C + D, \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

$$\begin{aligned} n = 0 \quad &: \quad A\xi^{-1} + B\xi + C\eta + D\eta^{-1} = (\eta + \eta^{-1})(C + D) \\ & \quad\;\; A\xi^{-1} + B\xi = C\eta^{-1} + D\eta. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Odečtením ξ násobku rovnice (2.1.5) od rovnice (2.1.6) získáme vyjádření A a obdobně pro B, C a D, za předpokladu, že $\eta \neq \eta^{-1}$, resp. $\xi \neq \xi^{-1}$, jehož opak by vedl k tvrzení, že $|\eta| = 1$, resp. $|\xi| = 1$, tím se v tuto chvíli zabývat nebudeme,

$$\begin{aligned} A &= C\,\frac{\eta^{-1} - \xi}{\xi^{-1} - \xi} + D\,\frac{\eta - \xi}{\xi^{-1} - \xi}, & B &= C\,\frac{\eta^{-1} - \xi^{-1}}{\xi - \xi^{-1}} + D\,\frac{\xi - \eta^{-1}}{\xi - \xi^{-1}}, \\ C &= A\,\frac{\xi^{-1} - \eta}{\eta^{-1} - \eta} + B\,\frac{\xi - \eta}{\eta^{-1} - \eta}, & D &= A\,\frac{\xi^{-1} - \eta^{-1}}{\eta - \eta^{-1}} + B\,\frac{\xi - \eta^{-1}}{\eta - \eta^{-1}}. \end{aligned}$$

Definujme dvě pomocné množiny dvojitě nekonečných posloupností

$$\begin{aligned} \ell^2(+\infty) &:= \Big\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} \;\Big|\; \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < \infty \Big\}, \\ \ell^2(-\infty) &:= \Big\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} \;\Big|\; \sum_{n=-\infty}^{0} |x_n|^2 < \infty \Big\}. \end{aligned}$$

Volbou dvou ze čtyř parametrů (zbylé dva už jsou nutně určeny podmínkou navázání) dostaneme dvě specifická řešení rovnice na vlastní čísla, označme je y a z,

$$y_n = \begin{vmatrix} A = 0 \\ B = 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} \xi^{-n} & n < 0, \\ \frac{\xi - \eta}{\eta^{-1} - \eta}\eta^n + \frac{\xi - \eta^{-1}}{\eta - \eta^{-1}}\eta^{-n} & n \geq 0, \end{cases} \tag{2.1.7}$$

$$z_n = \begin{vmatrix} C = 1 \\ D = 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} \frac{\eta^{-1} - \xi}{\xi^{-1} - \xi}\xi^n + \frac{\eta^{-1} - \xi^{-1}}{\xi - \xi^{-1}}\xi^{-n} & n < 0, \\ \eta^n & n \geq 0, \end{cases} \tag{2.1.8}$$

o kterých můžeme říct, že

$$\begin{aligned} |\xi| < 1 &\iff y \in \ell^2(-\infty), \\ |\eta| < 1 &\iff z \in \ell^2(+\infty). \end{aligned}$$

Ověřme jejich lineární nezávislost:

$$\begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\xi-\eta}{\eta^{-1}-\eta} + \frac{\xi-\eta^{-1}}{\eta-\eta^{-1}} & 1 \\ \frac{\xi-\eta}{\eta^{-1}-\eta}\eta + \frac{\xi-\eta^{-1}}{\eta-\eta^{-1}}\eta^{-1} & \eta \end{vmatrix}$$
$$= \frac{\xi-\eta}{\eta^{-1}-\eta}\eta + \frac{\xi-\eta^{-1}}{\eta-\eta^{-1}}\eta - \frac{\xi-\eta}{\eta^{-1}-\eta}\eta - \frac{\xi-\eta^{-1}}{\eta-\eta^{-1}}\eta^{-1} = \xi - \eta^{-1} \neq 0.$$

y a z jsou lineárně nezávislé, právě když $\eta^{-1} \neq \xi$, opak by vedl k tvrzení, že $\alpha = 0$, kterým se zabývat nebudeme. Skutečně

$$\begin{aligned} \xi + \xi^{-1} - \alpha &= \eta + \eta^{-1} \\ \xi + \xi^{-1} - \alpha &= \xi^{-1} + \xi \\ \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Můžeme tedy tvrdit, že y a z jsou lineárně nezávislé a libovolné řešení rovnice (2.1.1) můžeme zapsat jako lineární kombinaci y a z. Ukážeme, že neexistuje nenulové řešení ležící v $\ell^2(\mathbb{Z})$. Vezměme $x = ay + bz$, kde $a, b \in \mathbb{C}$,

$$x_n = \begin{cases} a\xi^{-n} + b\Big(\frac{\eta^{-1}-\xi}{\xi^{-1}-\xi}\xi^n + \frac{\eta^{-1}-\xi^{-1}}{\xi-\xi^{-1}}\xi^{-n}\Big) & n < 0, \\ a\Big(\frac{\xi-\eta}{\eta^{-1}-\eta}\eta^n + \frac{\xi-\eta^{-1}}{\eta-\eta^{-1}}\eta^{-n}\Big) + b\eta^n & n \geq 0, \end{cases}$$

to je jistě řešení rovnice (2.1.1), a předpokládejme, že $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, dále z definice Žukovkého transformace předpokládáme, že $|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1$. Platí

$$x \in \ell^2(\mathbb{Z}) \quad \Longrightarrow \quad x \in \ell^2(-\infty) \quad \& \quad x \in \ell^2(+\infty).$$

Pro $|\xi| = 1$, resp. $|\eta| = 1$, a $a, b \neq 0$, není splněna nutná podmínka konvergence řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2, \qquad \text{resp.} \qquad \sum_{n=-\infty}^{-1} |x_n|^2,$$

tím dojdeme ke sporu s předpokladem $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Nyní uvažujme pouze případ $|\xi| < 1, |\eta| < 1$, potom člen s ξ^n je v sumě pro záporné indexy podstatně divergentní. Abychom byli v souladu s předpokladem $x \in \ell^2(-\infty)$, musí být tento člen vynulován, toho docílíme, když nastane jedna z možností

$$b = 0, \qquad \text{nebo} \qquad \frac{\eta^{-1}-\xi}{\xi^{-1}-\xi} = 0.$$

Druhá možnost se redukuje na $\eta^{-1} = \xi$, což je ekvivalentní s tvrzením, že $\alpha = 0$. Spektrum operátoru H_0 je dobře známe a tímto případem se tedy zabývat nebudeme. V sumě pro kladné indexy je podstatně divergentní člen s η^{-n}. Aby byl vynulován, musí nastat jedna ze dvou možností

$$a = 0, \qquad \text{nebo} \qquad \frac{\xi-\eta^{-1}}{\eta-\eta^{-1}} = 0.$$

Opět se druhou možností nebudeme zabývat. Dostáváme tedy, že

$$x \in \ell^2(\mathbb{Z}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = 0 \quad \& \quad b = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall n \in \mathbb{Z} : x_n = 0.$$

Nyní vyřešme okrajové případy $\xi = \pm 1$, $\eta = \pm 1$ a jejich kombinace. Nejprve zvolme případ $\xi = -1$ a $\eta \neq \pm 1$, pro indexy $n \leq -2$ řeší diferenční rovnici (2.1.1) posloupnosti $x_n = (-1)^n$ a $x_n = n(-1)^n$, skutečně

$$\begin{aligned} \lambda x_n &= -2(-1)^n = (-1)^{n+1} + (-1)^{n-1} = x_{n+1} + x_{n-1} \\ \lambda x_n &= -2n(-1)^{-n} = -(2n-1+1)(-1)^n & n \leq -2. \\ &= (n+1)(-1)^{n+1} + (n-1)(-1)^{n-1} = x_{n+1} + x_{n-1} \end{aligned}$$

Pro indexy $n \geq 1$ již známe řešení ve tvaru $x_n = \eta^{-n}$ a $x_n = \eta^n$. Řešení pro všechny indexy je tedy tvaru

$$\begin{aligned} x_n &= A(-1)^n + Bn(-1)^{-n} & n < 0, \\ x_n &= C\eta^n + D\eta^{-n} & n \geq 0. \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Zřejmě, aby $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, musí $A, B = 0$. Pokud $|\eta| = 1$ a $C, D \neq 0$, není opět splněna nutná podmínka konvergence řady s indexy na okolí $+\infty$. Pokud $|\eta| < 1$ a x má být nenulové řešení rovnice (2.1.1) ležící v $\ell^2(\mathbb{Z})$, musí platit $A, B, D = 0$ a $D \neq 0$. Tím se ale dostaneme do sporu s podmínkou na koeficienty A, B, C, D, kterou dostaneme dosazením řešení (2.1.9) do (2.1.1) pro $n = -1$

$$\begin{aligned} A - 2B + C\eta^0 + D\eta^0 &= -2(A - B) \\ A - 4B + C + D &= 0. \end{aligned}$$

Nyní zvolme $\xi = -1$ a $\eta = 1$, potom řešení pro všechny indexy je tvaru

$$\begin{aligned} x_n &= A(-1)^n + Bn(-1)^{-n} & n < 0, \\ x_n &= C + Dn & n \geq 0. \end{aligned}$$

Zřejmě řešení tohoto tvaru v $\ell^2(\mathbb{Z})$ je pouze triviální. Ostatní okrajové případy a jejich kombinace by se řešily analogicky.

Tvrdíme tedy, že neexistuje nenulové řešení rovnice na vlastní čísla (2.1.1) takové, které by leželo v $\ell^2(\mathbb{Z})$. Tím jsme ukázali, že bodové spektrum je prázdné

$$\sigma_{\mathrm{p}}(H_\alpha) = \emptyset.$$

2.2 Reziduální spektrum

Sdružený operátor k H_α má tvar $H_\alpha^* = H_{\overline{\alpha}}$. Podle definice reziduálního spektra

$$\lambda \in \sigma_{\mathrm{r}}(H_\alpha) \iff \lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(H_\alpha) \;\;\&\;\; \overline{\mathrm{Ran}(H_\alpha - \lambda)} \neq \ell^2(\mathbb{Z}).$$

O bodovém spektru už víme, že je prázdné, podívejme se tedy blíže na druhou podmínku

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Ran}(H_\alpha - \lambda)} \neq \ell^2(\mathbb{Z}) &\iff \mathrm{Ker}(H_\alpha - \lambda)^* \neq \{0\} & (2.2.1) \\ &\iff \mathrm{Ker}(H_\alpha^* - \overline{\lambda}) \neq \{0\} \\ &\iff \overline{\lambda} \in \sigma_{\mathrm{p}}(H_\alpha^*) \equiv \sigma_{\mathrm{p}}(H_{\overline{\alpha}}) \\ &\iff \lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(H_\alpha). & (2.2.2) \end{aligned}$$

Rozeberme nejdříve první ekvivalenci (2.2.1), protože není triviální. Pro omezený operátor B na Hilbertově prostoru platí

$$\mathrm{Ker}B^* = (\mathrm{Ran}B)^\perp.$$

To zaručuje platnost následující implikace, ze které je platnost ekvivalence (2.2.1) zřejmá

$$(\mathrm{Ran}(H_\alpha - \lambda))^\perp = \mathrm{Ker}(H_\alpha - \lambda)^* \implies \overline{\mathrm{Ran}(H_\alpha - \lambda)} = (\mathrm{Ker}(H_\alpha - \lambda)^*)^\perp.$$

Také se blíže podívejme na poslední ekvivalenci (2.2.2)

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma_\mathrm{p}(H_\alpha) &\iff \exists \psi \in l^2(\mathbb{Z}), \psi \neq 0 : H_\alpha \psi = \lambda\psi \\ &\iff \exists \psi \in l^2(\mathbb{Z}), \psi \neq 0 : H_{\overline{\alpha}}\overline{\psi} = \overline{\lambda\psi}) \\ &\iff \overline{\lambda} \in \sigma_\mathrm{p}(H_{\overline{\alpha}}). \end{aligned}$$

Celkem tedy můžeme o prvku z reziduálního spektra říci, že

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma_\mathrm{r}(H_\alpha) &\iff \lambda \notin \sigma_\mathrm{p}(H_\alpha) \;\;\&\;\; \lambda \in \sigma_\mathrm{p}(H_\alpha) \\ &\iff \lambda \in (\sigma_\mathrm{p}(H_\alpha))^\mathrm{c} \cap \sigma_\mathrm{p}(H_\alpha) \\ &\iff \lambda \in \emptyset. \end{aligned}$$

Neboli reziduální spektrum zkoumaného operátoru je prázdné

$$\sigma_\mathrm{r}(H_\alpha) = \emptyset.$$

2.3 Spojité spektrum

Tato sekce bude obsáhlejší než ty předchozí, proto je důležité si pro přehlednost nastínit postup. V předchozích dvou sekcích jsme ukázali, že $\sigma(H_\alpha) = \sigma_\mathrm{c}(H_\alpha)$. Stačí tedy nalézt rezolventní množinu operátoru H_α a tím bude spektrum plně určeno. Nejdříve definujeme vhodného kandidáta na rezolventní množinu, tuto množinu budeme značit X, následně pomocí Greenova jádra ukážeme, že $X \subset \rho(H_\alpha)$. Druhým krokem bude dokázat opačnou inkluzi $X \supset \rho(H_\alpha)$, toho docílíme pomocí Weylova kritéria.

Definice množiny X

Připomeňme řešení diferenční rovnice na vlastní čísla y (2.1.7) a z (2.1.8), která jsou závislá na ξ a η, pokud jsou navíc ξ a η v absolutní hodnotě menší než 1, lze jim jednoznačně přiřadit λ dle (2.1.3). Dále víme, že platí

$$\begin{aligned} |\xi| < 1 &\iff y \in \ell^2(-\infty), \\ |\eta| < 1 &\iff z \in \ell^2(+\infty). \end{aligned}$$

Zajistíme-li obě podmínky $|\xi| < 1$, $|\eta| < 1$, budeme mít dva vektory vhodné pro použití v Greenově jádře. Právě zajištění těchto dvou podmínek nám definuje množinu X, kandidáta na rezolventní množinu operátoru,

$$\begin{aligned} |\xi| < 1 \quad &\implies \quad \xi + \xi^{-1} \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2], \\ &\qquad\quad \eta + \eta^{-1} + \alpha \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2], \\[1ex] |\eta| < 1 \quad &\implies \quad \eta + \eta^{-1} \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2], \\ &\qquad\quad \eta + \eta^{-1} + \alpha \in \mathbb{C} \setminus [-2 + \alpha, 2 + \alpha], \end{aligned}$$

Celkem platí

$$|\xi| < 1 \;\&\; |\eta| < 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda \equiv \eta + \eta^{-1} + \alpha \in \mathbb{C} \setminus \big([-2,2] \cup [-2+\alpha, 2+\alpha]\big).$$

Definujme množinu X následovně

$$X \;:=\; \mathbb{C} \setminus \big([-2,2] \cup [-2+\alpha, 2+\alpha]\big).$$

Definice Greenova jádra

V této části se budeme opírat o poznatky z [2]. Tento text pojednává o spektrálních vlastnostech Jacobiho operátorů, tj. operátorů, jež mají tridiagonální maticovou reprezentaci. H_α je Jacobiho operátor. Konkrétně budeme využívat Greenovo jádro pro nalezení rezolventní množiny operátoru H_α. Toto tvrzení, jak je vysloveno v [2], předpokládá samosdruženost operátoru, je ale zřejmé, že pro volbu $\alpha \notin \mathbb{R}$ operátor H_α tento předpoklad nesplňuje. Budeme postupovat tak, že se konstrukcí Greenova jádra inspirujeme a ukážeme, že Greenovo je rezolventou H_α i pro náš speciální případ. Tedy musíme ukázat, že se jedná o omezený operátor a je inverzí k $(H_\alpha - \lambda)$. Tím ukážeme, že $X \subset \rho(H_\alpha)$. Tato konstrukce vyžaduje vektory y a z z definice množiny X. Greenovo jádro $G(\lambda)$ nabývá pro indexy $m, n \in \mathbb{Z}$ hodnot

$$G_{m,n}(\lambda) = \frac{1}{w_k(y,z)} \begin{cases} z_n y_m & m \le n, \\ z_m y_n & m > n, \end{cases}$$

kde $w \equiv w_k(y,z) = z_{k+1}y_k - z_k y_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$. w se nazývá Wronskián a je zřejmé, že je nenulový právě tehdy, když y a z jsou lineárně nezávislé, tuto podmínku už jsme ověřili dříve. Za zmínku také stojí fakt, že značíme G jako závislé na λ, skutečně to tak je, ale tato závislost je schovaná ve vektorech y a z, které jsou samy definovány pomocí ξ a η, ty jsou jednoznačně určeny $\lambda \in X$. Stejně je závislý i Wronskián na λ.

Důležitý poznatek o Wronskiánu $w_k(y,z)$ je fakt, že je nezávislý na k. Skutečně, zvolme libovolné $k \in \mathbb{Z}$ a připomeňme rovnici na vlastní čísla (2.1.2), ze které vyjádříme $x_{n+1} = \kappa_n x_n - x_{n-1}$, potom

$$\begin{aligned} w_k(y,z) = z_{k+1}y_k - z_k y_{k+1} &= (\kappa_k z_k - z_{k-1})y_k - z_k(\kappa_k y_k - y_{k-1}) \\ &= \kappa_k z_k y_k - z_{k-1}y_k - z_k \kappa_k y_k + z_k y_{k-1} = z_k y_{k-1} - z_{k-1} y_k = w_{k-1}(y,z). \end{aligned}$$

Rovnají se tedy dva sousední indexy, z čehož díky libovolnosti k plyne, že se rovnají všechny. To nás opravňuje nepsat u Wronskiánu spodní index.

Pro přehlednost příštích úvah definujme $\widetilde{G} := wG$. Než budeme dále pokračovat, podívejme se, jak vypadá maticová reprezentace $\widetilde{G}$:

$$\widetilde{G} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ \\ \cdots & z_{-2}y_{-2} & z_{-1}y_{-2} & z_0 y_{-2} & z_1 y_{-2} & z_2 y_{-2} & \cdots \\ \cdots & z_{-1}y_{-2} & z_{-1}y_{-1} & z_0 y_{-1} & z_1 y_{-1} & z_2 y_{-1} & \cdots \\ \hline \cdots & z_0 y_{-2} & z_0 y_{-1} & z_0 y_0 & z_1 y_0 & z_2 y_0 & \cdots \\ \cdots & z_1 y_{-2} & z_1 y_{-1} & z_1 y_0 & z_1 y_1 & z_2 y_1 & \cdots \\ \cdots & z_2 y_{-2} & z_2 y_{-1} & z_2 y_0 & z_2 y_1 & z_2 y_2 & \cdots \\ ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right). \tag{2.3.1}$$

Omezenost operátoru $G(\lambda)$

Nejdříve poznamenejme, že operátor G je omezený, právě když je $\widetilde{G}$ omezený. Pro jednoduchost zápisu budeme omezenost zkoumat na operátoru $\widetilde{G}$. Postupovat budeme tak, že $\widetilde{G}$ rozdělíme na čtyři různé operátory, které nám v součtu dají $\widetilde{G}$, toho docílíme pomocí projektorů P, resp. Q, jež jsou projekce na $\operatorname{span}\big(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}\big)$, resp. $\operatorname{span}\big(\{e_{-n}\}_{n\in\mathbb{N}}\big)$

$$P = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{matrix} \end{array}\right), \qquad Q = I - P = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \ddots & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Zapišme $\widetilde{G}$ blokově, bloky budou definovány dělícími čarami v (2.3.1),

$$\widetilde{G} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Nyní chceme oddělit jednotlivé bloky, toho docílíme násobením $\widetilde{G}$ výše uvedenými projekcemi:

$$P\widetilde{G}P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

$$Q\widetilde{G}P = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P\widetilde{G}Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad Q\widetilde{G}Q = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Skutečně

$$\widetilde{G} = P\widetilde{G}P + Q\widetilde{G}P + P\widetilde{G}Q + Q\widetilde{G}Q.$$

Podívejme se nejdříve na sčítanec $P\widetilde{G}P$. Ukažme, že zobrazení

$$\Phi : \mathscr{B}\big(\ell^2(\mathbb{N}_0)\big) \longrightarrow \mathscr{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big) : M \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

je izometrie. Dokažme tvrzení $\forall M \in \mathscr{B}\big(l^2(\mathbb{N}_0)\big) : \|\Phi(M)\| = \|M\|$. Ukážeme pomocí dvou nerovností

$$\|M\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in l^2(\mathbb{N}_0)}} \|Mx\| = \sup_{\substack{\|\tilde{x}\|=1 \\ \tilde{x}\in\ell^2(\mathbb{Z}) \\ \tilde{x}_n=0, n<0}} \|\Phi(M)\tilde{x}\| \le \sup_{\substack{\|\tilde{x}\|=1 \\ \tilde{x}\in\ell^2(\mathbb{Z})}} \|\Phi(M)\tilde{x}\| = \|\Phi(M)\|.$$

Pro ukázání opačné nerovnosti si uvědomme, jak působí P na $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$:

$$(Px)_n = \begin{cases} 0 & n < 0, \\ x_n & n \ge 0, \end{cases}$$

navíc platí, že $\|Px\| \le \|x\|$. Nechť $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ takové, že $\|x\| = 1$, potom

$$\|\Phi(M)x\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ M(Px) \end{matrix} \right\| = \|M(Px)\| \le \|M\|\|Px\| \le \|M\|.$$

To už implikuje $\|\Phi(M)\| \leq \|M\|$ a celkem dostáváme rovnost, z čehož vyplývá, že Φ je izometrie. Můžeme tedy tvrdit, že $\|P\widetilde{G}P\| = \|D\|$.

Napišme explicitně, jak vypadají prvky D. Nechť $m, n \in \mathbb{N}_0$

$$D_{m,n} = \begin{cases} z_n y_m & m \leq n, \\ z_m y_n & m > n. \end{cases}$$

Připomeňme, jak vypadají posloupnosti y a z zúžené na $\mathbb{N}_0$, navíc pro přehlednost zaveďme konstanty $a := \frac{\xi-\eta}{\eta^{-1}-\eta}$ a $b := \frac{\xi-\eta^{-1}}{\eta-\eta^{-1}}$,

$$y_n = \frac{\xi - \eta}{\eta^{-1} - \eta}\eta^n + \frac{\xi - \eta^{-1}}{\eta - \eta^{-1}}\eta^{-n} = a\eta^n + b\eta^{-n}, \qquad z_n = \eta^n.$$

Dosaďme do D:

$$D_{m,n} = \begin{cases} \eta^n(a\eta^m + b\eta^{-m}) = a\eta^{n+m} + b\eta^{n-m} & m \leq n, \\ \eta^m(a\eta^n + b\eta^{-n}) = a\eta^{m+n} + b\eta^{m-n} & m > n. \end{cases}$$

Pro $m \leq n$ je $n - m \geq 0$ a pro $m > n$ je $m - n > 0$, zapišme tento exponent jednodušeji pro $\forall m, n \in \mathbb{N}_0$ pomocí absolutní hodnoty,

$$D_{m,n} = a\eta^{n+m} + b\eta^{|n-m|}.$$

Nyní připomeňme značení Toeplitzovy a Hankelovy matice z Definic 1.5 a 1.6 a definujme pomocné posloupnosti

$$q := \{\eta^{|n|}\}_{n\in\mathbb{Z}} \qquad \text{a} \qquad \tilde{q} := \{\eta^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Potom D je lineární kombinací Toeplitzovy a Hankelovy matice,

$$D = aH(\tilde{q}) + bT(q).$$

A tedy pro normu platí

$$\|P\widetilde{G}P\| = \|D\| \leq |a|\|H(\tilde{q})\| + |b|\|T(q)\| < \infty,$$

kde konečnost $\|T(q)\|$, resp. $\|H(\tilde{q})\|$, plyne z Tvrzení 1.7, resp. 1.8.

Jako další sčítanec vezměme $Q\widetilde{G}Q$. Zaveďme přeindexování matice A, nenulového bloku dvojitě nekonečné matice $Q\widetilde{G}Q$, pro $m, n \in \mathbb{N} : A^{--}_{m,n} := A_{-m,-n}$. Definujme zobrazení

$$\Psi : \mathscr{B}\big(l^2(\mathbb{N})\big) \longrightarrow \mathscr{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big) : M^{--} \longmapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zobrazení Ψ je izometrie, postupovalo by se stejně jako u důkazu izometrie Φ. Platí tedy, že $\|Q\widetilde{G}Q\| = \|A^{--}\|$. Uvažujme $m, n \in \mathbb{N}$, potom matice A a matice A^{--} mají tvar

$$A_{-m,-n} = \begin{cases} z_{-n}y_{-m} & -m \leq -n, \\ z_{-m}y_{-n} & -m > -n, \end{cases} \qquad A^{--}_{m,n} = \begin{cases} z_{-n}y_{-m} & m \geq n, \\ z_{-m}y_{-n} & m < n. \end{cases}$$

Připomeňme posloupnosti y a z zúžené na záporné indexy a opět pro přehlednost zaveďme konstanty $c := \frac{\eta^{-1}-\xi}{\xi^{-1}-\xi}$ a $d := \frac{\eta^{-1}-\xi^{-1}}{\xi-\xi^{-1}}$,

$$y_{-n} = \xi^n, \qquad z_{-n} = \frac{\eta^{-1} - \xi}{\xi^{-1} - \xi}\xi^{-n} + \frac{\eta^{-1} - \xi^{-1}}{\xi - \xi^{-1}}\xi^n = c\xi^{-n} + d\xi^n.$$

Podobně jako pro matici D zapišme A^{--} pomocí absolutní hodnoty v exponentu ξ:

$$A^{--}_{m,n} = c\xi^{|m-n|} + d\xi^{m+n}.$$

Jako v předchozím případě je A^{--} lineární kombinací Toeplitzovy a Hankelovy matice a je tedy omezená

$$\|Q\widetilde{G}Q\| = \|A^{--}\| < \infty.$$

Nyní uvažujme sčítanec $Q\widetilde{G}P$ a opět zaveďme přeindexování matice B, pro $m,n \in \mathbb{N}$: $B^{-+}_{m,n} := B_{-m,n-1}$ a definujme zobrazení

$$\Theta : \mathscr{B}\big(l^2(\mathbb{N})\big) \longrightarrow \mathscr{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big) : M^{-+} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Znovu tvrdíme, že Θ je izometrie a platí $\|Q\widetilde{G}P\| = \|B^{-+}\|$. Pro $m,n \in \mathbb{N}$ platí

$$B^{-+}_{m,n} = y_{-m}z_{n-1} = \xi^m\eta^{n-1} = \eta^{-1}\xi^m\eta^n.$$

Matici B^{-+} můžeme zapsat jako matici L z Lemmatu 1.10, $B^{-+} = \eta^{-1}L(\xi,\eta)$ a platí

$$\|Q\widetilde{G}P\| = \|B^{-+}\| \leq |\eta^{-1}|\sqrt{\frac{|\eta|^2}{1-|\eta|^2}}\sqrt{\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}} < \infty.$$

Ukázání omezenosti posledního sčítance $P\widetilde{G}Q$ je už snadné, protože když zavedeme vhodné přeindexování matice C, $\forall m,n \in \mathbb{N} : C^{+-} = C_{m-1,-n}$, zjistíme, že

$$C^{+-}_{m,n} = z_{m-1}y_{-n} = B^{-+} \quad\Longrightarrow\quad C^{+-} = \eta^{-1}L(\eta,\xi).$$

Navíc, jak říká poznámka pod Lemmatem 1.10, $\|L(\eta,\xi)\| = \|L(\xi,\eta)\|$. Z toho nutně plyne

$$\|P\widetilde{G}Q\| = \|C^{+-}\| = \|B^{-+}\| < \infty.$$

Tím máme dokázanou omezenost Greenova jádra G pro všechna $\lambda \in X$, neboť

$$\|G\| = \frac{1}{|w|}\|\widetilde{G}\| \leq \frac{1}{|w|}\big(\|P\widetilde{G}P\| + \|Q\widetilde{G}P\| + \|P\widetilde{G}Q\| + \|Q\widetilde{G}Q\|\big) < \infty.$$

$G(\lambda)$ je inverzí operátoru $(H_\alpha - \lambda)$

Připomeňme diferenční rovnici na vlastní čísla (2.1.2). Chceme ukázat, že $(H_\alpha - \lambda)G = G(H_\alpha - \lambda) = I$. Vezměme výraz $(H_\alpha - \lambda)G$, ten má v maticové reprezentaci hodnoty pro indexy $m,n \in \mathbb{Z}$

$$\big(G(H_\alpha - \lambda)\big)_{m,n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{m,k}(H_\alpha - \lambda)_{k,n} = G_{m,n-1} - \kappa_n G_{m,n} + G_{m,n+1}.$$

Ukázání toho, že je to identita by bylo komplikované, proto můžeme ekvivalentně ukázat, že $\forall x \in \ell^2(\mathbb{Z}) : (H_\alpha - \lambda)Gx = x$. Připomeňme ještě $wG = \widetilde{G}$, kde w je dříve definovaný Wronskián.

Počítejme

$$
\begin{aligned}
w\big((H_\alpha-\lambda)Gx\big)_m &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{G}_{m,n-1}x_n - \kappa_n\widetilde{G}_{m,n}x_n + \widetilde{G}_{m,n+1}x_n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{m-1} z_m \underbrace{(y_{n-1}-\kappa_n y_n + y_{n+1})}_{=0} x_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} y_m \underbrace{(z_{n-1}-\kappa_n z_n + z_{n+1})}_{=0} x_n \\
&\quad + (z_m y_{m-1} - \kappa_m z_m y_m + z_{m+1}y_m)x_m \stackrel{\star}{=} (z_m y_{m-1} - y_{m-1}z_m - z_m y_{m+1} + z_{m+1}y_m)x_m \\
&= (z_{m+1}y_m - z_m y_{m+1})x_m = w_m(y,z)x_m = wx_m,
\end{aligned}
$$

potom vydělením w dostaneme hledanou rovnost. V úpravách jsme využili faktu, že y a z jsou řešeními rovnice (2.1.2), proto jsou označené výrazy nulové, dále v označené rovnosti jsme dosadili za $\kappa_m y_m$ z rovnice (2.1.2). Prohozením pořadí $(H_\alpha-\lambda)$ a G bychom došli ke stejnému výsledku.

Celkem tvrdíme, že $\forall\lambda \in X : G(\lambda) \in \mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ a $G(\lambda)$ je inverzí operátoru $(H_\alpha-\lambda)$, neboli

$$\lambda \in X \Longrightarrow \lambda \in \rho(H_\alpha),$$

a tedy

$$X \subset \rho(H_\alpha).$$

Inkluze $\rho(H_\alpha) \subset X$

Postup v této části bude založený na Weylově kritériu (Věte 1.2), to ale předpokládá normalitu operátoru, což H_α nesplňuje. Nám ale stačí pouze jedna implikace, pro kterou tento předpoklad není potřebný.

Tvrzení 2.1 (Weylovo kritérium)**:** Nechť $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ a $\lambda \in \mathbb{C}$, potom platí

$$\inf\{\|(A-\lambda)\psi\| \mid \psi \in \mathscr{H}, \|\psi\| = 1\} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda \in \sigma(A).$$

Důkaz. Dokážeme obměněnou implikaci

$$\lambda \in \rho(A) \quad \Longrightarrow \quad \exists K > 0 \;:\; \inf\{\|(A-\lambda)\psi\| \mid \psi \in \mathscr{H}, \|\psi\| = 1\} \geq K.$$

Zvolme libovolné $\lambda \in \rho(A)$ a $\psi \in \mathscr{H}$, potom

$$\|\psi\| = \|(A-\lambda)^{-1}(A-\lambda)\psi\| \leq \|(A-\lambda)^{-1}\|\|(A-\lambda)\psi\|.$$

Aplikujme na nerovnost infimum přes $\|\psi\| = 1$

$$1 \leq \|(A-\lambda)^{-1}\| \inf_{\|\psi\|=1} \|(A-\lambda)\psi\|.$$

Neboť $\lambda \in \rho(A)$, platí $\|(A-\lambda)^{-1}\| \neq 0$. Tím je tvrzení dokázáno, protože

$$K := \frac{1}{\|(A-\lambda)^{-1}\|} \leq \inf_{\|\psi\|=1} \|(A-\lambda)\psi\|. \qquad \square$$

Poznámka. Je zřejmé, že následující výroky jsou ekvivalentní

$$\inf\{\|(A-\lambda)\psi\| \mid \psi \in \mathscr{H}, \|\psi\| = 1\} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}\setminus\{0\} \;:\; \lim_{n\to\infty} \frac{\|(A-\lambda)\psi_n\|}{\|\psi_n\|} = 0.$$

Naším úkolem nyní bude nalézt posloupnost $\{\psi^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell^2(\mathbb{Z})$ pro $\lambda \in X^{\mathrm{c}}$, kde

$$X^{\mathrm{c}} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\eta| = 1\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\xi| = 1\},$$

splňující

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|(H_\alpha - \lambda)\psi^{(n)}\|}{\|\psi^{(n)}\|} = 0.$$

Potom totiž $\lambda \in X^{\mathrm{c}} \Longrightarrow \lambda \in \sigma(H_\alpha)$, a tedy $X^{\mathrm{c}} \subset \sigma(H_\alpha)$, což je ekvivalentní s $\rho(H_\alpha) \subset X$.

Zvolme $\lambda \in X^{\mathrm{c}}$ takové že, $|\eta| = 1$ a definujme pro $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\zeta^{(n)} := \{\dots, 0, 0, 1, \eta, \eta^2, \dots, \eta^n, 0, 0, \dots\}.$$

Proveďme několik pomocných výpočtů,

$$\|\zeta^{(n)}\|^2 = \sum_{k=0}^{n} |\eta^k|^2 = \sum_{k=0}^{n} 1 = n,$$

$$\begin{aligned}
\big((H_\alpha - \lambda)\zeta^{(n)}\big)_m &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (H_\alpha - \lambda)_{m,k}\zeta_k^{(n)} \\
m = -1: \quad &= 1, \\
m = 0: \quad &= (\alpha - \lambda) + \eta = -\eta - \eta^{-1} + \eta = -\eta^{-1} \\
m \in \{1, 2, \dots, n-1\}: \quad &= \eta^{m-1} + (\alpha - \lambda)\eta^m + \eta^{m+1} = \eta^{m-1} + (-\eta - \eta^{-1})\eta^m + \eta^{m+1} = 0 \\
m = n: \quad &= \eta^{n-1} + (\alpha - \lambda)\eta^n = \eta^{n-1} + (-\eta - \eta^{-1})\eta^n = -\eta^{n+1} \\
m = n+1: \quad &= \eta^n,
\end{aligned}$$

$$\|(H_\alpha - \lambda)\zeta^{(n)}\|^2 = 1^2 + |-\eta^{-1}|^2 + |-\eta^{n+1}|^2 + |\eta^n|^2 = 4.$$

Nyní máme připravené vše pro vyhodnocení limity

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|(H_\alpha - \lambda)\zeta^{(n)}\|}{\|\zeta^{(n)}\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.$$

Na začátku jsme vzali $|\eta| = 1$, to můžeme zapsat ve tvaru $\eta = e^{\mathrm{i}\theta}$, kde $\theta \in [0, \pi]$, potom

$$\lambda = \eta + \eta^{-1} + \alpha = e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta} + \alpha = 2\cos\theta + \alpha \in [-2 + \alpha, 2 + \alpha].$$

Weylovo kritérium tedy říká, že $[-2 + \alpha, 2 + \alpha] \subset \sigma(H_\alpha)$

Nyní zvolme $\lambda \in X^{\mathrm{c}}$ takové že, $|\xi| = 1$ a definujme pro $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\chi^{(n)} := \{\dots, 0, \xi^n, \dots, \xi^2, \xi, 0, 0, \dots\}.$$

Opět proveďme pomocné výpočty

$$\|\chi^{(n)}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\eta^k|^2 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n,$$

$$\begin{aligned}
\big((H_\alpha-\lambda)\chi^{(n)}\big)_m &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}(H_\alpha-\lambda)_{m,k}\chi_k^{(n)}\\
m=n-1: \qquad &= \xi^{-n},\\
m=n: \qquad &= -\lambda\xi^{-n}+\xi^{-n-1}=\xi^{-n+1}\\
m\in\{n-1,\dots,-2\}: \qquad &= \xi^{m-1}-\lambda\xi^m+\xi^{m+1}=\xi^{m-1}+(-\xi-\xi^{-1})\xi^m+\xi^{m+1}=0\\
m=-1: \qquad &= \xi^2-\lambda\xi^1=-\xi^0=-1\\
m=0: \qquad &= \xi,
\end{aligned}$$

$$\|(H_\alpha-\lambda)\chi^{(n)}\|^2=|\xi^n|^2+|-\xi^{n+1}|^2+|-1|^2+|\xi|^2=4.$$

Opět vyhodnoťme limitu pro Weylovo kriterium

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|(H_\alpha-\lambda)\chi^{(n)}\|}{\|\chi^{(n)}\|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0.$$

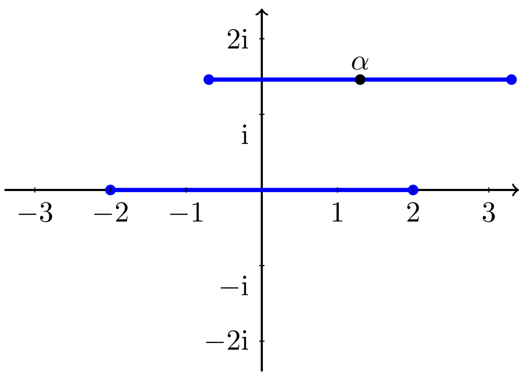
Nyní jsme měli $|\xi|=1$, které můžeme zapsat ve tvaru $\xi=e^{\mathrm{i}\theta}$, kde opět $\theta\in[0,\pi]$, potom

$$\lambda=\xi+\xi^{-1}=e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}=2\cos\theta\in[-2,2].$$

Weylovo kritérium tedy říká, že $[-2,2]\subset\sigma(H_\alpha)$.

Spektrum operátoru H_α (k nahlédnutí na Obrázku 2.1) je sjednocení dvou úseček v komplexní rovině, navíc spektrum je čistě spojité,

$$\sigma(H_\alpha)=\sigma_{\mathrm{c}}(H_\alpha)=[-2,2]\cup[-2+\alpha,2+\alpha]=[-2,2]+\alpha\{0,1\}.$$



Obrázek 2.1: Spektrum operátoru H_α

Kapitola 3

Porovnání spektra diskrétního operátoru H_α s jeho spojitou analogií

V této části budeme porovnávat spektrum diskrétního operátoru H_α na $\ell^2(\mathbb{Z})$ se spektrem spojitého operátoru H na $L^2(\mathbb{R})$ z [3]. H je definovaný jako

$$H := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(x), \qquad \mathrm{Dom}(H) := W^{2,2}(\mathbb{R}),$$

kde $W^{2,2}(\mathbb{R})$ je Sobolevův prostor, což jsou takové funkce z $L^2(\mathbb{R})$, jejichž slabé derivace prvního a druhého řádu jsou v $L^2(\mathbb{R})$.

Porovnejme nejdříve spektra těchto operátorů bez schodovitého potenciálu, protože ta jsou dobře známa. H bez schodovitého potenciálu je hamiltonián volné částice, t.j. 1D Laplaceův operátor

$$-\Delta = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2},$$

jeho spektrum je

$$\sigma(-\Delta) = [0, \infty).$$

H_α bez schodovitého potenciálu je diskrétní Laplaceův operátor, označme ho H_0, jeho spektrum je

$$\sigma(H_0) = [-2, 2],$$

což je v souladu s tvrzením výše při volbě $\alpha = 0$. Na obrázku 3.1 jsou k nahlédnutí spektra zkoumaných operátorů bez komplexního schodovitého potenciálu.

Abychom u H_α dostali odpovídající potenciál jako u H, zvolíme $\alpha = 2\mathrm{i}$ a přičteme k $H_{2\mathrm{i}}$ $(-\mathrm{i})$ násobek identického operátoru. Takto upravený operátor můžeme zapsat jako

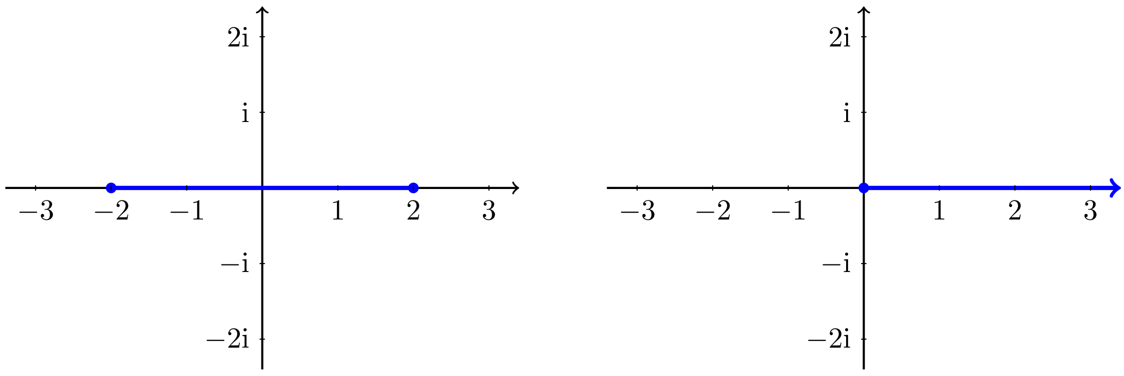
$$\widetilde{H} := H_{2\mathrm{i}} - \mathrm{i}I = H_0 + \mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(n),$$

kde definujeme pro $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$

$$(\mathrm{sgn}(n)\psi)_n := \begin{cases} \psi_n & n \geq 0 \\ -\psi_n & n < 0. \end{cases}$$

Zřejmě spektrum operátoru $\widetilde{H}$ je spektrum operátoru $H_{2\mathrm{i}}$ posunuté o $-\mathrm{i}$,

$$\sigma(\widetilde{H}) = [-2 + \mathrm{i}, 2 + \mathrm{i}] \cup [-2 - \mathrm{i}, 2 - \mathrm{i}] = [-2, 2] + \mathrm{i}\{-1, 1\}.$$



(a) $\sigma(H_0)$ (b) $\sigma(-\Delta)$

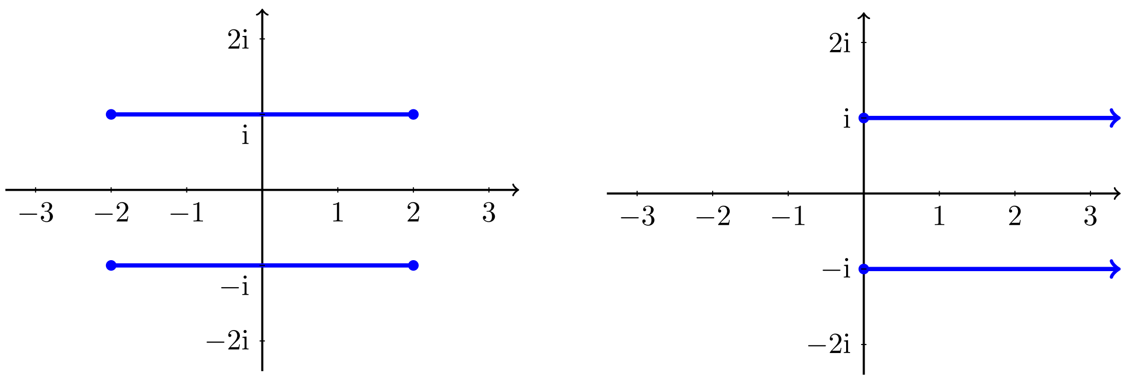
Obrázek 3.1: Spektra diskrétního a spojitého Laplaceova operátoru

Spektrum spojitého operátoru H, jak je uvedeno v [3], je

$$\sigma(H) = [0, +\infty) + \mathrm{i}\{-1, 1\}.$$

Schodovitý potenciál tedy má na spektrum těchto operátorů stejný efekt. V obou případech se spektrum operátoru se schodovitým potenciálem (na Obrázku 3.2) rovná dvěma kopiím spektra operátoru bez potenciálu posunutých o $+\mathrm{i}$ a o $-\mathrm{i}$,

$$\sigma(\widetilde{H}) = \sigma(H_0) + \mathrm{i}\{-1, 1\}, \qquad \sigma(H) = \sigma(-\Delta) + \mathrm{i}\{-1, 1\}.$$



(a) $\sigma(\widetilde{H})$ (b) $\sigma(H)$

Obrázek 3.2: Spektra diskrétního a spojitého Schrödingerova operátoru se schodovitým komplexním potenciálem

Kapitola 4

Lokalizace spektra H_α s diagonální ℓ^1 poruchou

Zvolme libovolnou dvojitě nekonečnou posloupnost $v = \{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ a definujme pomocí ní diagonální operátor $V := \operatorname{diag}\big(\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}\big)$ na $\ell^2(\mathbb{Z})$. Cílem této kapitoly bude lokalizovat spektrum operátoru $H_\alpha + V$, to jest nalézt množinu $\Omega(\alpha, v) \subset \mathbb{C}$ takovou, že bude obsahovat celé spektrum $\sigma(H_\alpha + V) \subset \Omega(\alpha, v)$. U množiny $\Omega(\alpha, v)$ přirozeně předpokládáme závislost na parametru α a na posloupnosti v. Takto zavedená množina, říkejme jí ***spektrální obálka***, není tímto jednoznačně určena, jakákoliv její nadmnožina splňuje stejné podmínky. Otázku tzv. optimality budeme řešit později.

4.1 Aplikace teoretických poznatků

Tvrzení v této části jsou aplikována přímo na náš případ $H_\alpha + V$, kde $V := \operatorname{diag}\big(\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}\big)$.

Tvrzení 4.1: Je-li $\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ omezená posloupnost, potom $H_\alpha + V$ je omezený operátor.

Důkaz. V je omezený, neboť

$$\|V\| \leq m, \text{ kde } \qquad m := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|.$$

Potom z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá

$$\|H_\alpha + V\| \leq \|H_\alpha\| + \|V\| \leq 2 + |\alpha| + m.$$

□

Tvrzení 4.2: Nechť $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, potom $V := \operatorname{diag}\big(\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}\big)$ je kompaktní operátor na $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Důkaz. Z předpokladu nutně plyne $\lim_{n\to\pm\infty} v_n = 0$. Potom Věta 1.13 dokončuje důkaz. □

Tvrzení 4.3: Operátory H_α a $H_\alpha + V$, kde V je kompaktní operátor, mají shodné esenciální spektrum, tj.

$$\sigma_{\text{ess}}(H_\alpha) = \sigma_{\text{ess}}(H_\alpha + V).$$

Důkaz. Stačí ověřit předpoklady Věty 1.14 pro volbu $A = H_\alpha$, $B = H_\alpha + V$. Jedná se o omezené operátory a $A-B = -V$ je kompaktní. Zřejmě $\big([-2,2] \cup [-2+\alpha, 2+\alpha]\big)^{\circ} = \emptyset$ v $\mathbb{C}$. Z omezenosti operátorů plyne

$$\rho(H_\alpha) \subset \mathbb{C} \setminus D(0, \|H_\alpha\|), \qquad \rho(H_\alpha + V) \subset \mathbb{C} \setminus D(0, \|H_\alpha + V\|), \tag{4.1.1}$$

kde $D(z,r) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < r\}$ je disk v komplexní rovině se středem v $z \in \mathbb{C}$ a s poloměrem $r > 0$. $\rho(H_\alpha)$ má právě jednu komponentu souvislosti. Tyto množiny (4.1.1) mají neprázdný průnik, a je tedy splněn i poslední předpoklad. □

Tvrzení 4.4: Diskrétní spektrum porušeného operátoru je obsaženo v

$$\sigma_{\mathrm{d}}(H_\alpha + V) \subset \big\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_\alpha) \;\big|\; \|K(\lambda)\| \geq 1\big\},$$

kde $K(\lambda)$ je Birmanův–Schwingerův operátor z Věty 1.16.

Důkaz. Diskrétní spektrum je podmnožinou bodového spektra. Proto $\sigma_{\mathrm{d}}(H_\alpha) = \emptyset$, z čehož vyplývá $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_\alpha) = \sigma(H_\alpha)$. Díky Tvrzení 4.3 můžeme celkem říct

$$\sigma(H_\alpha + V) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H_\alpha) \cup \sigma_{\mathrm{d}}(H_\alpha + V).$$

Hledaná inkluze potom okamžitě plyne z Důsledku 1.17. □

Poznámka. Počítání normy operátoru $K(\lambda)$ by bylo velmi složité a nás zajímá pouze, kdy je větší nebo rovna 1, proto budeme hledat horní odhad $\|K(\lambda)\|$.

Tvrzení 4.5: Mějme Birmanův–Schwingerův operátor

$$K(\lambda) = |V|^{1/2}(H_\alpha - \lambda)^{-1} V_{1/2}$$

pro $\lambda \in \rho(H_\alpha)$, kde

$$|V|^{1/2} = \operatorname{diag}\Big(\big\{|v_n|^{\frac{1}{2}}\big\}_{n\in\mathbb{Z}}\Big), \qquad V_{1/2} = \operatorname{diag}\Big(\big\{|v_n|^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sgn} v_n\big\}_{n\in\mathbb{Z}}\Big).$$

Funkci signum pro komplexní čísla zavádíme jako

$$\operatorname{sgn} z := \begin{cases} \frac{z}{|z|} & z \neq 0, \\ 0 & z = 0. \end{cases}$$

Potom platí

$$\|K(\lambda)\| \leq g_\alpha(\lambda) \|v\|_{\ell^1},$$

kde

$$g_\alpha(\lambda) := \sup_{n,m\in\mathbb{Z}} \big|(H_\alpha - \lambda)^{-1}_{n,m}\big|.$$

Důkaz. Prvky B–S operátoru jsou $\forall m,n \in \mathbb{Z} \;:\; K(\lambda)_{n,m} = |v_n|^{\frac{1}{2}} (H_\alpha - \lambda)^{-1}_{n,m} |v_m|^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sgn} v_m$. Zvolme libovolné $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ a odhadněme normu

$$\begin{aligned}
\|K(\lambda)\psi\|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|\big(K(\lambda)\psi\big)_n\big|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big|\sum_{m\in\mathbb{Z}} K(\lambda)_{n,m}\psi_n\Big|^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big|\sum_{m\in\mathbb{Z}} |v_n|^{\frac{1}{2}} (H_\alpha - \lambda)^{-1}_{n,m} |v_m|^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sgn}(v_m)\psi_n\Big|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n| \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \big|(H_\alpha - \lambda)^{-1}_{n,m}\big| |v_n|^{\frac{1}{2}} |\psi_n|\Big)^2 \\
&\leq g_\alpha^2(\lambda) \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n| \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |v_m|^{\frac{1}{2}} |\psi_m|\Big)^2 \overset{\text{C.-S.}}{\leq} g_\alpha^2(\lambda) \|v\|_{\ell^1}^2 \|\psi\|_{\ell^2}^2,
\end{aligned}$$

z čehož už je hledaná nerovnost zřejmá. □

Poznámka. Závislost spektrální obálky na posloupnosti v se díky tomuto tvrzení redukuje pouze na závislost na ℓ^1 normě posloupnosti v.

Tvrzení 4.6: Spektrální obálka je tvaru

$$\Omega(\alpha, v) = \big\{\lambda \in \rho(H_\alpha) \;\big|\; g_\alpha(\lambda) \cdot \|v\|_{\ell^1} \geq 1\big\}.$$

Definice 4.7: O spektrální obálce řekneme, že je *optimální*, jestliže pro každý hraniční bod existuje taková porucha, že tento hraniční bod je v diskrétním spektru porušeného operátoru, tj.

$$\forall Q > 0,\ \forall \lambda_0 \in \big\{\lambda \in \rho(H_\alpha) \;\big|\; Q g_\alpha(\lambda) = 1\big\},\ \exists v \in \ell^1(\mathbb{Z}), \|v\|_{\ell^1} = Q \ :\ \lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{d}}(H_\alpha + \mathrm{diag}(v)).$$

Poznámka. Optimalita nám říká, že spektrální obálka je v jistém smyslu nejmenší možná. Množina, která by měla hranici ve vnitřku optimální spektrální obálky, už nemůže být spektrální obálkou.

4.2 Spektrální obálky operátoru $H_\alpha + V$

Kdybychom dokázali najít přímo $g_\alpha(\lambda)$, nebyla by vyloučená optimalita těchto spektrálních obálek. Hledání $g_\alpha(\lambda)$ se ale ukazuje jako velmi složité. Hledáme supremum výrazu přes dva diskrétní parametry se dvěma volnými komplexními parametry

$$g_\alpha(\lambda) = \sup_{m,n\in\mathbb{Z}} \big|(H_\alpha - \lambda)^{-1}_{m,n}\big| = \sup_{m,n\in\mathbb{Z}} \big|G_{m,n}(\lambda)\big|,$$

kde $G(\lambda)$ značí Greenovo jádro z předchozí části. $G(\lambda)$ můžeme zapsat pomocí ξ a η, jež jsou jednoznačně určené rovnicemi (2.1.3) pomocí $\alpha \in \mathbb{C}$ a $\lambda \in \rho(H_\alpha)$, a platí $|\xi| < 1$, $|\eta| < 1$

$$G_{m,n}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{w}\left(\frac{\xi-\eta}{\eta^{-1}-\eta}\eta^{m+n} + \frac{\xi-\eta^{-1}}{\eta-\eta^{-1}}\eta^{|m-n|}\right) & m, n \geq 0, \\ \frac{1}{w}\eta^m\xi^{-n} & m \geq 0, n < 0, \\ \frac{1}{w}\left(\frac{\eta^{-1}-\xi}{\xi^{-1}-\xi}\xi^{|m-n|} + \frac{\eta^{-1}-\xi^{-1}}{\xi-\xi^{-1}}\xi^{-m-n}\right) & m, n < 0, \\ \frac{1}{w}\eta^n\xi^{-m} & m < 0, n \geq 0, \end{cases}$$

kde $w = \xi - \eta^{-1}$. Nejdříve určeme absolutní hodnotu $G(\lambda)$ v indexech $m, n = 0$:

$$\big|G_{0,0}(\lambda)\big| = \left|\frac{1}{w}\left(\frac{\xi-\eta}{\eta^{-1}-\eta} + \frac{\xi-\eta^{-1}}{\eta-\eta^{-1}}\right)\right| = \frac{1}{|w|}\left|\frac{\xi-\eta-\xi+\eta^{-1}}{\eta^{-1}-\eta}\right| = \frac{1}{|w|}. \tag{4.2.1}$$

Odhad $G(\lambda)$ v absolutní hodnotě je snadný pro prvky s jedním indexem kladným a jedním záporným, navíc platí, že tyto prvky jsou v absolutní hodnotě menší než $\big|G_{0,0}(\lambda)\big|$, což je prvek na diagonále. Vezměme $m \geq 0$ a $n < 0$, resp. $m < 0$ a $n \geq 0$, potom

$$\big|G_{m,n}(\lambda)\big| = \left|\frac{1}{w}\eta^m\xi^{-n}\right| \leq \frac{1}{|w|}|\xi| < \frac{1}{|w|}, \quad \text{resp.} \quad \big|G_{m,n}(\lambda)\big| = \left|\frac{1}{w}\eta^n\xi^{-m}\right| \leq \frac{1}{|w|}|\xi| < \frac{1}{|w|}.$$

Připomínáme $wG = \widetilde{G}$. Pro prvky $\widetilde{G}(\lambda)$ s indexy stejného znaménka platí, že supremum může být pouze na diagonále. Skutečně pro $m, n \geq 0$, $m \geq n$ platí

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{m,n\geq 0\\ m\geq n}} \big|\widetilde{G}_{m,n}(\lambda)\big| &= \sup_{\substack{m,n\geq 0\\ m\geq n}} \big|a\eta^{m+n} + b\eta^{m-n}\big| = \sup_{\substack{m,n\geq 0\\ m\geq n}} \big|\eta^m\big|\big|a\eta^n + b\eta^{-n}\big| \\ &= \sup_{n\geq 0}\big|a\eta^n + b\eta^{-n}\big| \sup_{m\geq n}\big|\eta^m\big| = \sup_{n\geq 0}\big|\eta^n\big|\big|a\eta^n + b\eta^{-n}\big| = \sup_{n\geq 0}\big|a\eta^{2n} + b\big| = \sup_{n\geq 0}\big|\widetilde{G}_{n,n}(\lambda)\big|,\end{aligned}$$

kde $a := \frac{\xi-\eta}{\eta^{-1}-\eta}$ a $b := \frac{\xi-\eta^{-1}}{\eta-\eta^{-1}}$. Analogicky bychom ukázali i ostatní případy. Celkem tedy můžeme tvrdit, že supremum se nachází na diagonále, tj.

$$g_\alpha(\lambda) = \sup_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|G_{m,n}(\lambda)\right| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left|G_{n,n}(\lambda)\right|.$$

V tomto odstavci nastíníme složitost závislosti $g_\alpha(\lambda)$ na jejích parametrech, a tím odůvodníme, proč se budeme zabývat pouze horním odhadem $g_\alpha(\lambda)$. Pro ilustraci zvolme $\alpha = 2\mathrm{i}$. Pomocí numerických výpočtů jsme zjistili

$$\forall n \in \{-1000, \dots, -1, 1, \dots, 1000\} : \left|\widetilde{G}_{n,n}\Big(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{11}{10}\Big)\right| < 1, \tag{4.2.2}$$

$$\forall n \in \{-1000, \dots, -1, 1, \dots, 1000\} : \left|\widetilde{G}_{n,n}\Big(\frac{1}{10} - \mathrm{i}\frac{1}{10}\Big)\right| > 1. \tag{4.2.3}$$

Dle vztahu (4.2.1) platí

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \rho(H_\alpha) : \left|G_{0,0}(\lambda)\right| = \frac{1}{|w|}.$$

Vztah (4.2.2) nám tedy naznačuje možnou pravdivost výroku, že

$$g_{2\mathrm{i}}\Big(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{11}{10}\Big) = \left|G_{0,0}\Big(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{11}{10}\Big)\right| = \frac{1}{|w|}.$$

Naopak vztah (4.2.3) naznačuje nerovnost, tedy

$$g_{2\mathrm{i}}\Big(\frac{1}{10} - \mathrm{i}\frac{1}{10}\Big) > \left|G_{0,0}\Big(\frac{1}{10} - \mathrm{i}\frac{1}{10}\Big)\right| = \frac{1}{|w|}.$$

Numerické výsledky ukazují, že supremum může být nabýváno pro různé volby α a λ v různých indexech, proto úlohu zjednodušíme.

Dále hledejme horní odhad $g_\alpha(\lambda)$ pomocí trojúhelníkové nerovnosti:

$$\left|G_{n,n}(\lambda)\right| = \left|\frac{1}{w}\left(\frac{\xi-\eta}{\eta^{-1}-\eta}\eta^{2n} + \frac{\xi-\eta^{-1}}{\eta-\eta^{-1}}\right)\right| \le \frac{1}{|w|}\left(\left|\frac{\xi-\eta}{\eta^{-1}-\eta}\right| + \left|\frac{\xi-\eta^{-1}}{\eta-\eta^{-1}}\right|\right) \qquad n \ge 0,$$

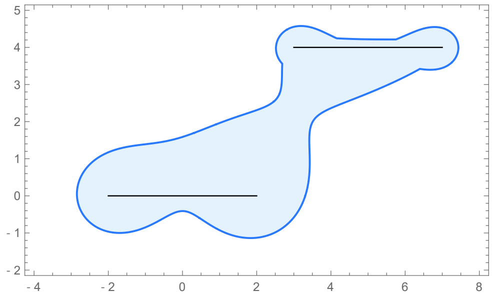
$$\left|G_{n,n}(\lambda)\right| = \left|\frac{1}{w}\left(\frac{\eta^{-1}-\xi}{\xi^{-1}-\xi} + \frac{\eta^{-1}-\xi^{-1}}{\xi-\xi^{-1}}\xi^{-2n}\right)\right| \le \frac{1}{|w|}\left(\left|\frac{\eta^{-1}-\xi}{\xi^{-1}-\xi}\right| + \left|\frac{\eta^{-1}-\xi^{-1}}{\xi-\xi^{-1}}\right|\right) \qquad n < 0.$$

Označme tento horní odhad $g_\alpha(\lambda)$ jako $\widetilde{g}_\alpha(\lambda)$, ten je tvaru

$$\widetilde{g}_\alpha(\lambda) = \frac{1}{|w|}\max\left\{ \left|\frac{\xi-\eta}{\eta^{-1}-\eta}\right| + \left|\frac{\xi-\eta^{-1}}{\eta-\eta^{-1}}\right|,\ \left|\frac{\eta^{-1}-\xi}{\xi^{-1}-\xi}\right| + \left|\frac{\eta^{-1}-\xi^{-1}}{\xi-\xi^{-1}}\right|\right\}.$$

Porovnejme naše výsledky s [7], kde byly nalezeny spektrální obálky porušeného operátoru H_0 a byla dokázána jejich optimalita. Volbou $\alpha = 0$ se ztotožní $\xi = \eta$, a tedy pro námi nalezený horní odhad platí $\widetilde{g}_0(\lambda) = |w|^{-1} = |\xi - \xi^{-1}|^{-1}$. Naše spektrální obálky se shodují s optimálními z [7].

Popišme, co nám vlastně ukazuje spektrální obálka. Na Obrázku 4.1 máme spektrální obálku pro specifickou volbu α a $\|v\|_{\ell^1}$. Esenciální spektrum je vyobrazeno černými úsečkami. Světlou barvou je pro názornost vyplněn i vnitřek obálky, to v dalších obrázcích nebudeme dělat. Mimo esenciální spektrum obsahuje obálka pouze prvky z diskrétního spektra, což jsou podle definice



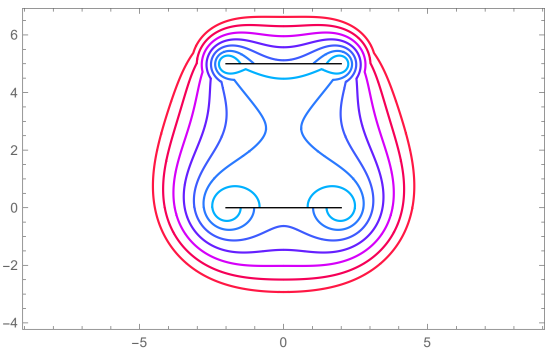
Obrázek 4.1: Spektrální obálka pro volbu $\alpha = 5 + 4\mathrm{i}$ a $\|v\|_{\ell^1} = {}^9\!/\!_8$

izolované body, a tedy hromadné body diskrétního spektra mohou být pouze prvky esenciálního spektra. Navíc diskrétní spektrum může být nejvýše spočetné.

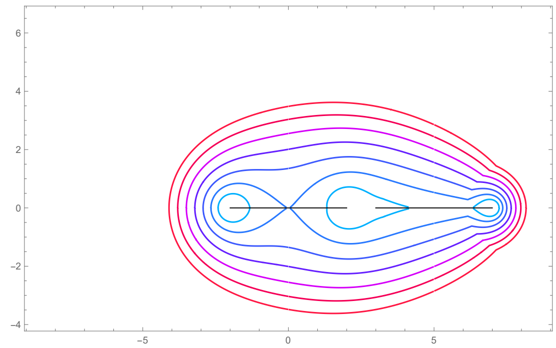
Na Obrázcích 4.2a až 4.2k jsou vyobrazeny spektrální obálky

$$\left\{\lambda \in \rho(H_\alpha) \;\middle|\; \widetilde{g}_\alpha(\lambda) \cdot \|v\|_{\ell^1} \geq 1\right\}$$

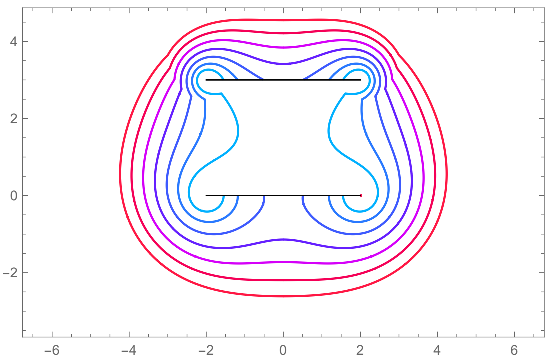
operátoru $H_\alpha + V$ pro různé volby parametru α, přičemž každý obrázek obsahuje spektrální obálku pro $\|v\|_{\ell^1} = {}^3\!/\!_4, {}^4\!/\!_4, {}^5\!/\!_4, {}^6\!/\!_4, {}^7\!/\!_4, {}^8\!/\!_4, {}^9\!/\!_4$.



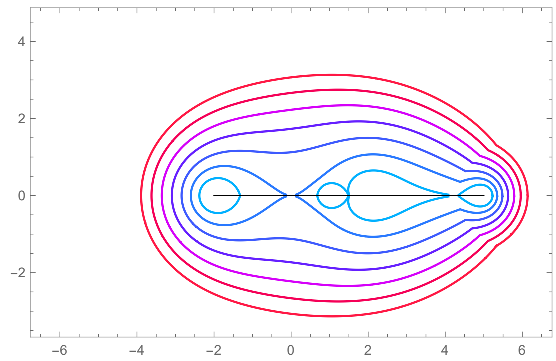
(a) $\alpha = 5\mathrm{i}$



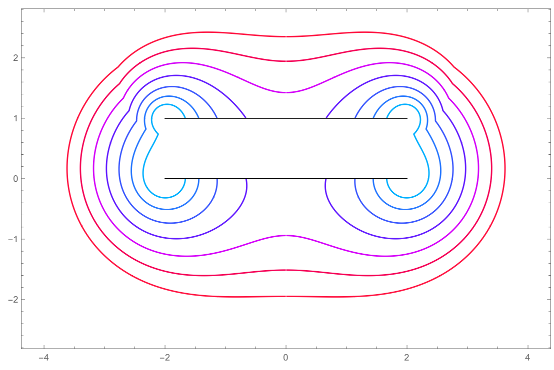
(b) $\alpha = 5$



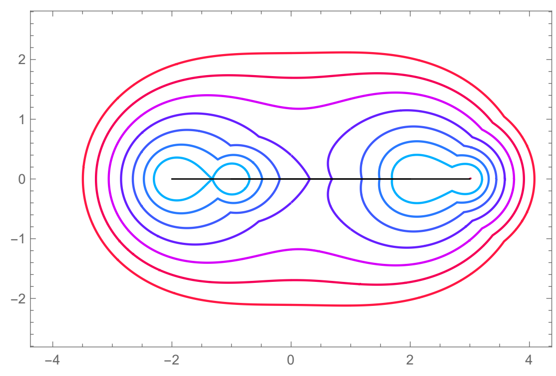
(c) $\alpha = 3\mathrm{i}$



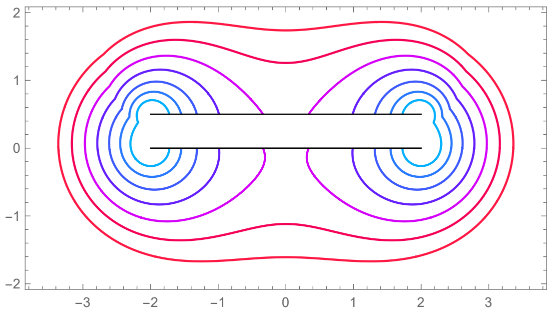
(d) $\alpha = 3$



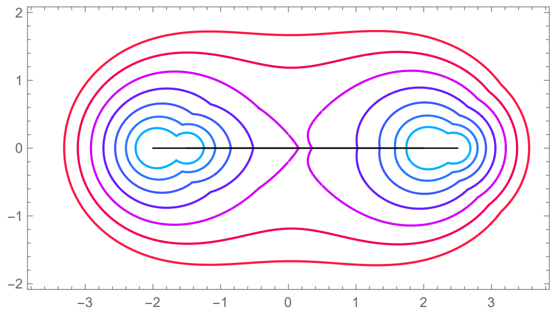
(e) $\alpha = \mathrm{i}$



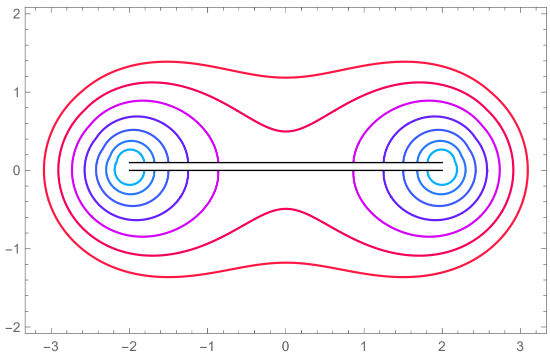
(f) $\alpha = 1$



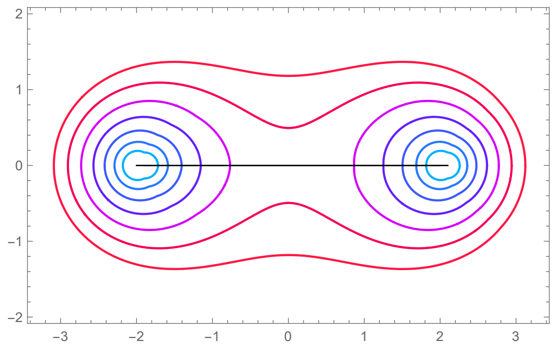
(g) $\alpha = 0.5\mathrm{i}$



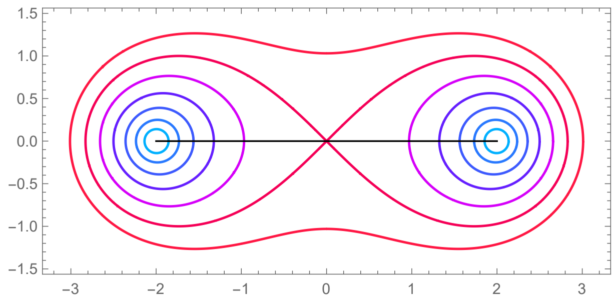
(h) $\alpha = 0.5$



(i) $\alpha = 0.1\mathrm{i}$



(j) $\alpha = 0.1$



(k) $\alpha = 0$

Obrázek 4.2: Spektrální obálky pro vybrané hodnoty α a $\|v\|_{\ell^1} = 3/4, 4/4, 5/4, 6/4, 7/4, 8/4, 9/4$.

Závěr

Značná část této bakalářské práce byla věnována nalezení spektra diskrétního Schrödingerova operátoru s komplexním schodovitým potenciálem H_α pro libovolný komplexní parametr α.

Nejdříve jsme zavedli Žukovského transformace pro λ a $\lambda - \alpha$, které nám umožnily nalézt řešení diferenční rovnice na vlastní čísla v jednoduchém tvaru, a ukázali jsme, že v $\ell^2(\mathbb{Z})$ je takovéto řešení pouze triviální. Tím jsme ukázali, že bodové spektrum je prázdné. Díky vhodným vlastnostem H_α bylo z definice ukázáno, že i reziduální spektrum je prázdné, a tedy spektrum je ryze spojité.

Definovali jsme vhodnou množinu $X = \mathbb{C}\setminus\big([-2,2]\cup[-2+\alpha,2+\alpha]\big)$ a ukázali pomocí Greenova jádra, že je obsažena v rezolventní množině. Věta o Greenově jádře předpokládá samosdruženost operátoru, to H_α obecně nesplňuje, proto jsme větu použili pouze formálně pro konstrukci operátoru $G(\lambda)$, o kterém jsme následně ukázali, že je omezený a jedná se o inverzi k $(H_\alpha - \lambda)$ pro $\lambda \in X$. Dále jsme pomocí Weylova kritéria ukázali, že platí i opačná inkluze, tedy že rezolventní množina je obsažena v X. Z toho přímo plyne $\sigma(H_\alpha) = \sigma_{\mathrm{c}}(H_\alpha) = [-2,2] \cup [-2+\alpha, 2+\alpha]$. Spektrum diskrétního i spojitého Schrödingerova operátoru vykazuje podobné chování při odpovídajícím schodovitém potenciálu.

Pro lokalizaci spektra porušeného operátoru H_α jsme využili Birmanův–Schwingerův princip, který pro nejlepší výsledky vyžaduje nalezení suprema přes $m, n \in \mathbb{Z}$ z výrazu $|(H_\alpha - \lambda)^{-1}_{m,n}|$, které značáme $g_\alpha(\lambda)$. Pomocí numerických výpočtů jsme naznačili značnou složitost závislosti $g_\alpha(\lambda)$ na α a λ, a proto jsme se omezili na hledání horního odhadu $g_\alpha(\lambda)$. Pomocí tohoto horního odhadu jsme našli spektrální obálky porušeného operátoru H_α a vykreslili je pro různé volby α. Navíc při volbě $\alpha = 0$ se naše spektrální obálky shodují s optimálními z článku [7].

Literatura

[1] J. Blank, P. Exner, M. Havlíček, *Lineární operátory v kvantové fyzice.* Karolinum, 1993.

[2] E. Koelink, *Spectral theory and special functions.* Adv. Theory Spec. Funct. Orthogonal Polynomials, Nova Sci. Publ., Hauppauge, NY, 2004, 45–84.

[3] R. Henry, D. Krejčiřík, *Pseudospectra of the Schrödinger operator with a discontinuous complex potential.* J. Spectr. Theory 7, 2017, 659–697.

[4] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics, Volume 4.* Academic Press, 1978.

[5] D. E. Edmunds, W. D. Evans, *Spectral theory and differential operators.* Clarendon Press, Oxford University Press, 1987.

[6] A. Böttcher, S. M. Grudsky, *Spectral Properties of Banded Toeplitz Matrices.* SIAM, 2005.

[7] O. O. Ibrogimov, F. Štampach, *Spectral enclosures for non-self-adjoint discrete Schrödinger operators.* Integr. Equ. Oper. Theory 91, 2019, 1–15.